Übungsserie 5

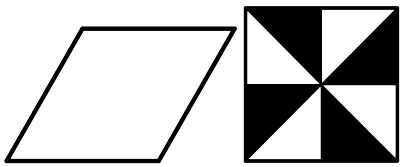
Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 11. Mai 2012** in der Vorlesung

1. Zeigen Sie unabhängig voneinander die folgenden zwei Eigenschaften der **Fibonacci-Zahlen** $f_1, f_2, f_3, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ Tipp: Für die Fibonacci-Zahlen gilt $f_n + f_{n+1} = \ldots$ z.B. $f_1 + f_2 = \ldots$)
   Eigenschaft ①: $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1$
   Eigenschaft ②: $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1} - f_0 f_1$ mit $f_0 = f_2 - f_1$

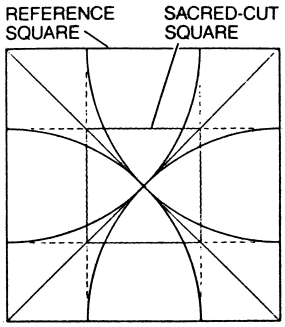
2. Gegeben sind ein **Rhombus** (Raute) und ein quadratisches **Muster** (Figur 1).

   (a) Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein und ermitteln Sie für beide Figuren alle vier Kongruenztransformationen, welche die Figur mit sich selbst zur Deckung bringen.

   (b) Stellen Sie die zugehörigen **Verknüpfungstafeln** auf und nennen Sie einen strukturellen Unterschied.



Figur 1 (Aufgabe 2)



Figur 2 (Aufgabe 3)

3. Ausgrabungen in OSTIA (Hafenstadt des antiken Roms) deuten auf ein Proportionensystem hin, welches dort im Grossen bis hin zum Kleinen zur Anwendung kam [Kappraff, S. 30]. Man spricht vom **heiligen Schnitt**. Ein nach dem heiligen Schnitt geteiltes Referenzquadrat wird wie folgt konstruiert: Um jede Quadratecke wird der Kreisbogen durch die Quadratmitte gezogen. Durch Verbinden der Schnittpunkte der Kreisbogen mit den Quadratseiten entsteht in der Mitte ein massstäblich verkleinertes Quadrat, das so genannte *heilig-Schnitt-Quadrat* (Figur 2).

   (a) Wie gross ist das Seitenlängenverhältnis von Referenz- und heilig-Schnitt-Quadrat?

   (b) Im Referenzquadrat mit Seitenlänge a wird das heilig-Schnitt-Quadrat gezeichnet. Anschliessend wird das heilig-Schnitt-Quadrat als neues Referenzquadrat aufgefasst und darin wiederum das heilig-Schnitt-Quadrat gezeichnet, und immer so weiter. Wie gross ist der Flächeninhalt von dem Ausgangsquadrat und allen unendlich vielen heilig-Schnitt-Quadraten zusammen? (Die Endlichkeit der Summe sei vorausgesetzt.)

4. **Abstrakte Gruppen**: Welche der folgenden Zahlenmengen bilden bezüglich der Zahlen-Multiplikation (Zeichen $\cdot$) eine Gruppe? Ist die Gruppe endlich oder unendlich, kommutativ oder nicht-kommutativ?

$\mathbb{E} = \{1, 11, 111, 1111, \ldots\}$	Menge der Einerziffer Zahlen
$\$ = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$	Menge der Stammbrüche
$\mathbb{M} = \{-1, 1\}$	Menge aus Eins und Minuseins
$\mathbb{P} = \{\ldots, 2^{-1}, 2^0, 2^1, \ldots\}$	Menge der ganzen Potenzen von 2

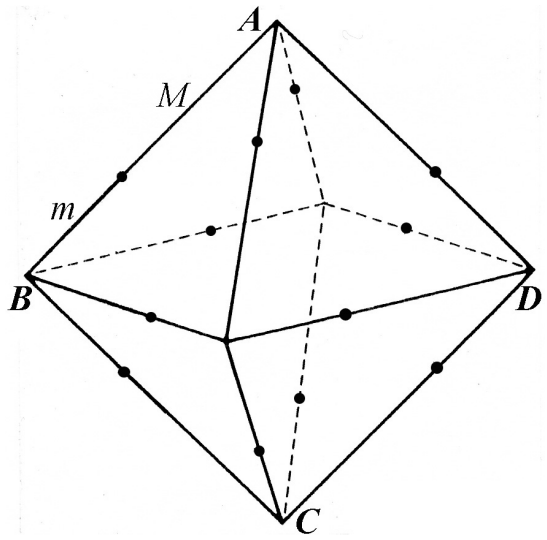
Verifizieren Sie im Falle einer Gruppe alle Gruppenaxiome, anderenfalls genügt es, das 'erste', nicht erfüllte Gruppenaxiom anzugeben und anhand eines Zahlen-Beispiels zu verdeutlichen.

Bitte wenden!

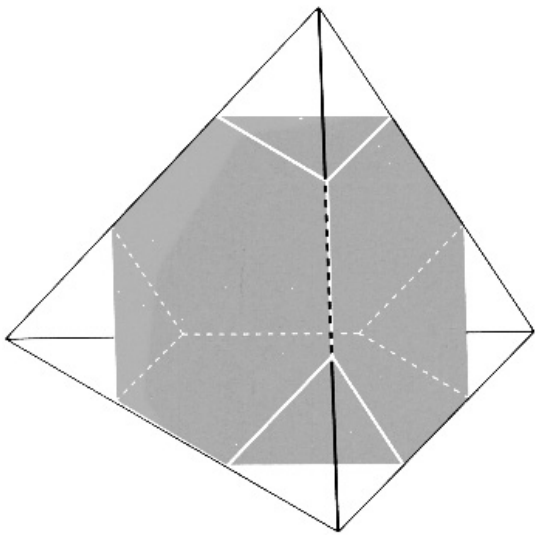
Übungsserie 5

5. (a) Zeigen Sie: Werden die Kanten eines **regulären Oktaeders** in geeigneter Weise nach dem Goldenen Schnitt geteilt, so sind die zwölf entstehenden Punkte die Ecken eines **regulären Ikosaeders** (Figur 3).
(Anleitung: Benutzen Sie den Sachverhalt von Aufgabe 2.5 (vgl. Skript zur Vorlesung, S. 69))

   (b) Berechnen Sie den Volumenunterschied zwischen Oktaeder und Ikosaeder (ausgedrückt durch m, die Länge des Minors der Oktaederkantenlänge).



Figur 3 (Aufgabe 5)



Figur 4 (Aufgabe 6)

6. Von einem regulären Tetraeder werden alle vier 'Ecken' abgeschnitten, so dass ein **Tetraederstumpf** entsteht, welcher durch vier reguläre Sechsecke und vier gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge a begrenzt wird (Figur 4).

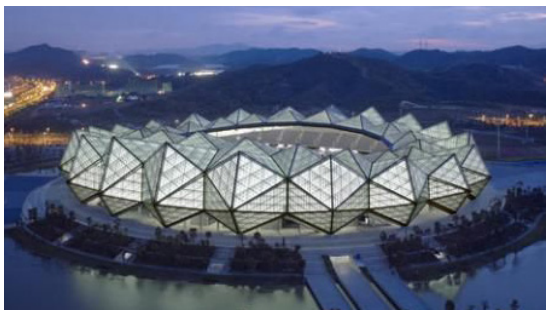
   (a) Der Tetraederstumpf stehe mit einem Sechseck auf der Grundrissebene (Figur 4). Skizzieren Sie die Ansicht von oben. (Achten Sie in der Skizze auf korrekte Winkel & Streckenverhältnisse.)

   (b) Wie gross ist das Volumen des Tetraederstumpfs (ausgedrückt durch a)?

   (c) Der Tetraederstumpf besitzt eine Umkugel. Berechnen Sie den Umkugelradius R.
Skizzieren Sie dazu Tetraeder und -stumpf im Würfel (Figur 2.93, Skript S. 96) mit Würfelmittelpunkt Z.

   (d) Besitzt der Tetraederstumpf auch eine Kantenmittenkugel? (Falls „ja" berechnen Sie ihren Radius!) Die Kantenmittenkugel eines Körpers geht durch alle Kantenmitten des Körpers.

   (e) Werden alle Dreieckflächen des Tetraederstumpfs zu Ebenen ausgeweitet, ergeben deren Schnittlinien einen Körper, der den Stumpf enthält. Welcher Körper ist das?



Crystal Hall in Baku, Aserbeidschan (im Bau)

Übungsserie 5, FS 2012, Seite 1

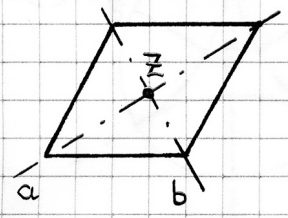
(1) ① $\| + f_1 \rightsquigarrow$ $f_1 + f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n}$ (f_3, f_5, f_7 … f_{2n+1}) $= f_{2n+1}$ ✓

② $\| + f_1 f_0$ $\quad f_1 f_0 + f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_2 f_1 - f_1^2 + f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_3 f_2 - f_2^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = \ldots = f_{n+1} f_n$

($f_1 f_0 = f_2 - f_1$; $f_2 f_1 - f_1^2 = f_3 - f_2$; $f_3 f_2 - f_2^2 = f_4 - f_3$; usw)

---

(2) (a) Rhomus: I; $R_{z,180°}$; S_a; S_b | Muster: I; $R_{90°}$; $R_{180°}$; $R_{270°}$ (um z) Mitte Muster!



(b)

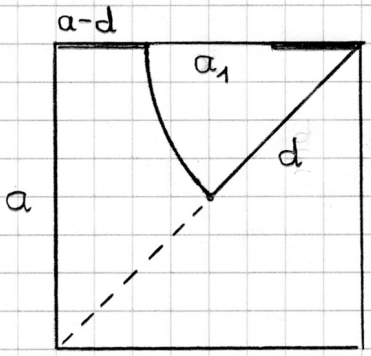
o	I	R	S_a	S_b
I	I	R	S_a	S_b
R	R	I	S_b	S_a
S_a	S_a	S_b	I	R
S_b	S_b	S_a	R	I

o	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}
I	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	I
R_{180}	R_{180}	R_{270}	I	R_{90}
R_{270}	R_{270}	I	R_{90}	R_{180}

In der Hauptdiagonale stets I, hier nicht (zyklisch!)

---

(3) (a)



$d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$a_1 = a - 2(a-d) = a - 2a + 2d = 2d - a = \sqrt{2}a - a = (\sqrt{2}-1)a$

Verhältnis: $\frac{a_1}{a} = \underline{\sqrt{2}-1}$ (≈ 0.414)

(b) $a_1 = \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\lambda \text{ Längenfaktor}} \cdot a$, $a_2 = \lambda a_1$, $a_3 = \lambda a_2$, … schrittweise massstäbl. Verkleinerung

$F = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots = a^2 + \lambda^2 a^2 + \lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \ldots = a^2 + \lambda^2 \underbrace{[a^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots]}_{F}$

$F = a^2 + \lambda^2 F \leftrightarrow F - \lambda^2 F = a^2 \leftrightarrow F(1-\lambda^2) = a^2$

$F = \frac{a^2}{1-\lambda^2} = \frac{a^2}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{a^2}{1-(2-2\sqrt{2}+1)} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}-2} = \frac{a^2}{2(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = \underline{\frac{a^2}{2}(\sqrt{2}+1)}$

---

(4) $\mathbb{E}$ Keine Gruppe, denn $s, t \in \mathbb{E}$: $s \cdot t$ im allg keine Einerziffer Zahl, z.B. $11 \cdot 11 = 121$ ↯ (G1)

$\$$ Keine Gruppe, denn $t \in \$$: $t \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \cdot t = 1$ (Neutralelement) $\rightsquigarrow t^{-1} = \frac{1}{t}$ kein Stammbruch

$\mathbb{M}$ endl. kommutative Gruppe

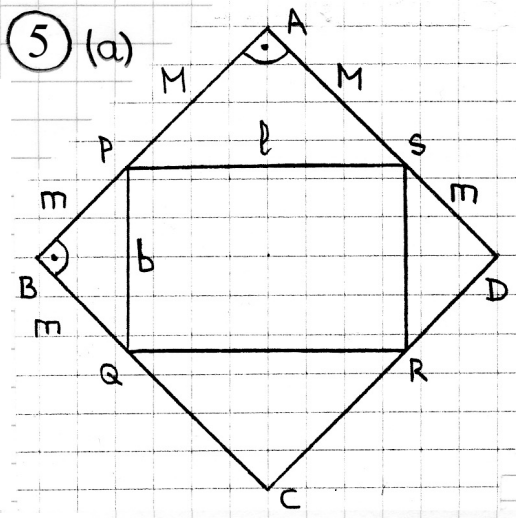
·	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Verknüpfungstafel bestätigt (G1), (G3), (G4), (KG) ↯ (G4)

(G2) gilt für $\mathbb{R}_\phi$, erst recht also für $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}_\phi$

$\mathbb{P}$ unendl. kommutative Gruppe: (G1) Für $2^n, 2^m \in \mathbb{P}$ ist $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$ auch 2er-Potenz;
(G2) $(2^n \cdot 2^m) \cdot 2^k = 2^{n+m+k} = 2^n(2^m \cdot 2^k)$ (G3) $1 = 2^0 \in \mathbb{P}$ (G4) zu $2^n \in \mathbb{P}$ ist $\frac{1}{2^n} = 2^{-n} \in \mathbb{P}$ mit $2^n \cdot 2^{-n} = 1$
(KG) $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} = 2^m \cdot 2^n$ mit $2^n \cdot 1 = 2^n$

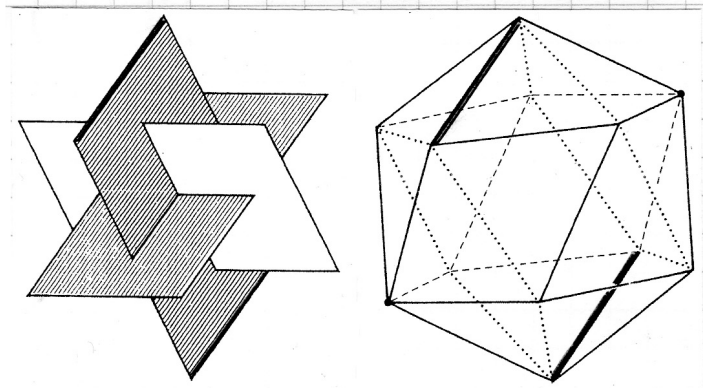
5 (a)



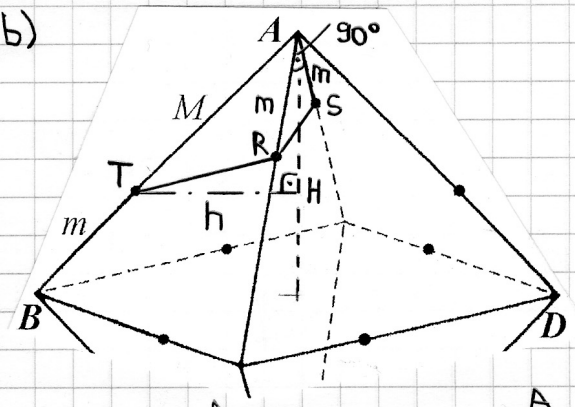
Die 6 Ecken und 12 Kanten des Oktaeders sind genau die Ecken und Seiten dreier paarweise senkrecht aufeinanderstehender Quadrate. In jedem Quadrat (z.B. ABCD) bilden die 4 Punkte (PQRS) ein Goldenes Rechteck:

$$\frac{l}{b} = \frac{\sqrt{M^2+M^2}}{\sqrt{m^2+m^2}} = \frac{\sqrt{2M^2}}{\sqrt{2m^2}} = \frac{\sqrt{2}\,M}{\sqrt{2}\,m} = \frac{M}{m} = \phi$$ Verhältnis des GS.

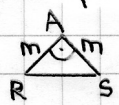
Gemäss Agb 2.5 bilden drei paarweise senkrecht aufeinanderstehende Goldene Rechtecke (Abbildung) ein reguläres Ikosaeder.



(b)



Vol.unterschied $= 6\cdot 2\cdot V_{RSAT}$, Pyramide RSAT: Grundfläche

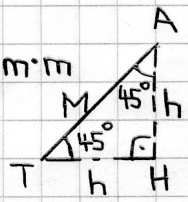


$\rightarrow \frac{1}{2} m\cdot m$

$= 12\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\, m^2 \frac{M}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, m^2 M$

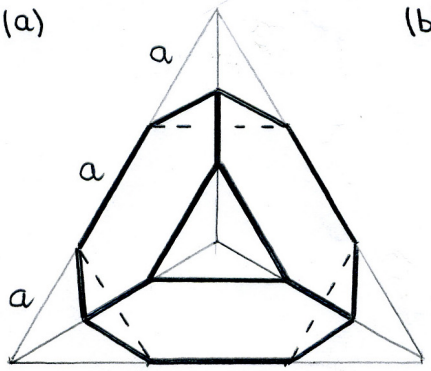
$= \underline{\underline{\sqrt{2}\,\phi\, m^3}}$, da $M = \phi m$

Höhe: $h^2 + h^2 = M^2$, $h = \frac{M}{\sqrt{2}}$



Vol.: $\frac{1}{3} G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} m^2 \cdot \frac{M}{\sqrt{2}}$

6 (a)



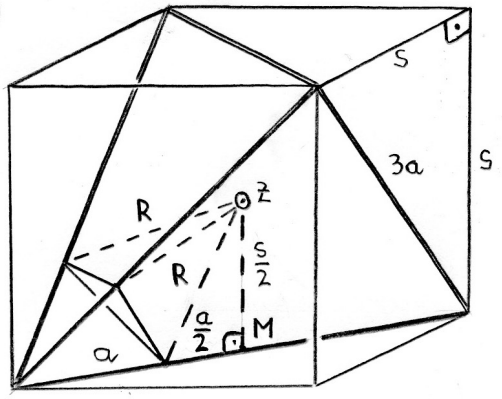
("strecken" werden gedrittelt)

(b) Grosses Tetraeder: $V_G = \frac{1}{3} G\cdot h = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\tilde{a}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{a}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\tilde{a} = \frac{\sqrt{2}}{12}\tilde{a}^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\, 27a^3$
(Skript S.61)

Abgeschnittene Ecke: $V_E = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

Volumen Stumpf: $V = V_G - 4V_E = 27\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 - 4\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \underline{\underline{\frac{23\sqrt{2}}{12}a^3}}$

(c)



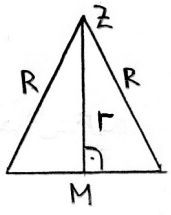
Der Umkugelmittelpunkt Z liegt aus Symmetriegründen im Würfelmittelpunkt. Der Würfel hat Kantenlänge s:

$s^2 + s^2 = (3a^2) \leftrightarrow 2s^2 = 9a^2 \leftrightarrow s = \sqrt{\frac{9}{2}}\,a$

Im ⊥ Dreieck: $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{9a^2}{2} = \frac{4a^2+18a^2}{16}$

$\underline{\underline{R = \frac{\sqrt{22}}{4}a}}$

(d) Ja. Jede Verbindung vom Zentrum Z mit einer Kantenmitte führt zu folgendem Dreieck



$r = \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{9}{2}}\,a = \sqrt{\frac{2\cdot 9}{4}}\,a = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\,3}{2}a}}$

(e) Ein reguläres Tetraeder