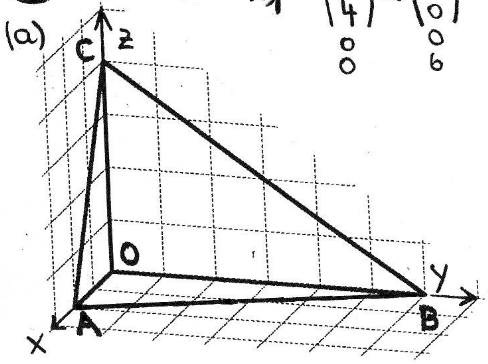
Übungsserie 2. HS 2015. Seite 1

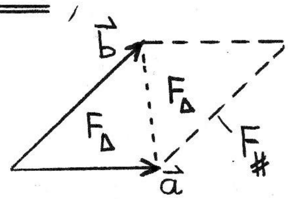
1

(a)



(b) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-24\\0\\0\end{pmatrix}}}$ $\quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}}}$ $\quad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix}}}$,

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_G = \begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}24\\8\\12\end{pmatrix}}}$



(c) Für das von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm: $F_{\#} = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Dreieck: $F_{\Delta} = \frac{1}{2} F_{\#} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

(d) $F_1 = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-24\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \underline{12}$, $F_2 = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}\right| = \underline{4}$, $F_3 = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix}\right| = \underline{6}$

$F_G = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}24\\8\\12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 6^2} = \underline{\underline{14}}$, es ist $12^2 + 4^2 + 6^2 = 14^2$ ✓

2

(a) t-Werte von Kurvenpunkten im Ursprung: $\left.\begin{aligned} 0 &\overset{\text{Soll}}{=} x(t) = t^2 - 1 \\ 0 &\overset{\text{Soll}}{=} y(t) = t^3 - t \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \underline{t = \pm 1}$

$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \vec{r}(-1)$, also eine Selbstdurchdringung in $(0,0)$

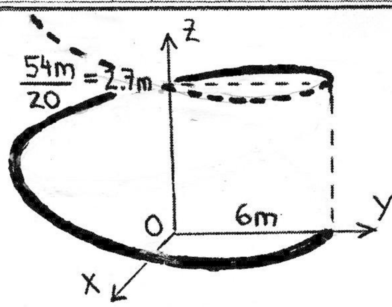
(b) Tangentialvektor: $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix}2t\\3t^2-1\end{pmatrix}$, für $t=-1$: $\vec{r}\,'(-1) = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$, $t=1$: $\vec{r}\,'(1) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\underbrace{\vec{r}\,'(-1)}_{\neq \vec{0}} \cdot \underbrace{\vec{r}\,'(1)}_{\neq \vec{0}} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = -4 + 4 = 0 \longrightarrow$ Schnittwinkel ist $\underline{\underline{90°}}$

(c) Im "höchsten" Punkt der Schleife ist $\vec{r}\,'(t)$ <u>horizontal</u>: $0 \overset{\text{Soll}}{=} 3t^2 - 1 = y'(t) \Leftrightarrow 3t^2 = 1$

$\rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\qquad x\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$

3



In 120 Tagen 20 Etagen bzw. Umdrehungen → In 6 Tagen 1 Umdrehung

Winkel φ bez. y-Achse: $\varphi(t) = \frac{2\pi}{6d}\, t \quad (0 \leq t \leq 120\,d)$ $\quad d \mathrel{\hat{=}}$ days

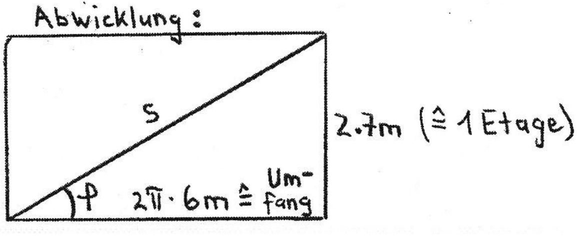
Höhe z bez. (x,y)-Ebene: $z(t) = \frac{54\,m}{120\,d} \cdot t = 0.45\,\frac{m}{d}\, t$ $\quad$ (In 6 Tagen 2.7m ≙ 1 Etage)

Der Radius ist konstant (Schraubenlinie!) sin ↔ cos tauschen für Uhrzeigersinn:

(a) $\gamma: [0, 120\,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\sin\varphi(t) \\ r\cos\varphi(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{6d}\,t\right) \\ 6m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6d}\,t\right) \\ 0.45\,\frac{m}{d} \cdot t \end{pmatrix}$

Abwicklung:

(b)



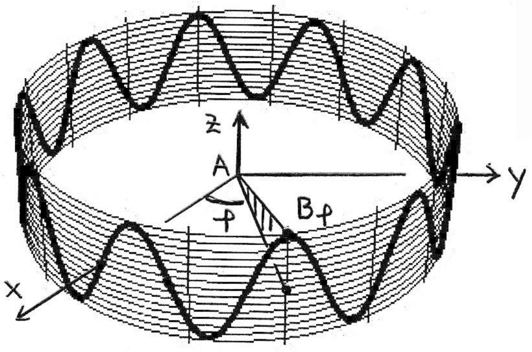
$s = \sqrt{2.7^2 + (2\pi \cdot 6)^2} = 37.8\,m$ pro Etage

Insgesamt $20 \cdot s = \underline{\underline{756\,m}}$

4 (a) Koordinatensystem: z-Achse = Ringachse, Ursprung im Ringzentrum, Lebenslinie "beginnt" auf x-Achse

Der Grundriss der Linie ist ein Kreis mit Radius 10 [mm]

$$\rightsquigarrow \quad \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 10\cos\varphi \\ 10\sin\varphi \\ z(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \text{ (Drehwinkel)}$$



$z(\varphi)$ oszilliert sinusförmig zw. -3 [mm] und $+3$ [mm], und zwar 10-mal für φ von 0 bis 2π: $z(\varphi) = 3\sin(10\varphi)$

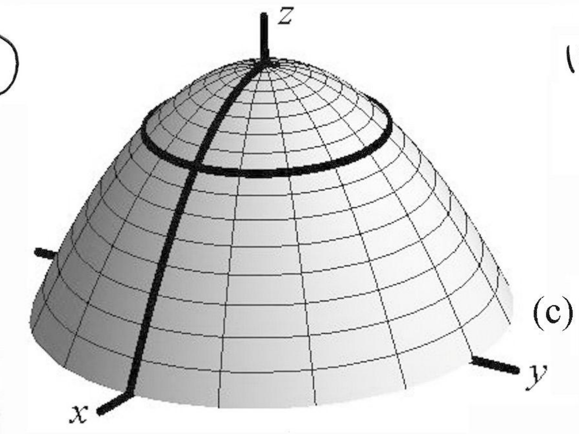
$$\text{Leb'linie: } [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 10\cos\varphi \\ 10\sin\varphi \\ 3\sin(10\varphi) \end{pmatrix}$$

(b) A ist fest. Um eine Linie AB_φ zu "zeichnen" ist ein Parameter t nötig. Für einen Flächenpunkt $\vec{r}$ auf der Linie AB_φ gilt:

$$\vec{r} = \vec{OA} + t\,\vec{AB_\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10\cos\varphi - 0 \\ 10\sin\varphi - 0 \\ 3\sin(10\varphi) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t\cos\varphi \\ 10t\sin\varphi \\ 3t\sin(10\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\text{Also:}\quad (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} 10t\cos\varphi \\ 10t\sin\varphi \\ 3t\sin(10\varphi) \end{pmatrix} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le t \le 1)$$

5



(b) φ-Linien: Kreise mit Mittelpt. auf z-Achse parallel (x,y)-Ebene

t-Linien: (Halb-)Parabeln mit Scheitel in (0,0,1) nach unten geöffnet mit Öff.faktor -1, in Ebenen $\perp$ (x,y)-Ebene

$$t\text{-Linie zu } \varphi = 0: \quad t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos 0 \\ t\sin 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$$

(c) $x = t\cos\varphi$, $y = t\sin\varphi$, $z = 1 - t^2 \rightsquigarrow t^2 = 1 - z$

$$x^2 + y^2 = (t\cos\varphi)^2 + (t\sin\varphi)^2 = t^2\cos^2\varphi + t^2\sin^2\varphi$$

$$= t^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} = t^2 = 1 - z$$

$$\rightsquigarrow \quad x^2 + y^2 = 1 - z$$

6

(a)
$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \cancel{-\frac{1}{2}R} \\ 0 \\ h/2\pi \end{pmatrix} \\ -\frac{1}{2}R \\ 0 \end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \cancel{0} \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ R \end{array} = \begin{pmatrix} 0 - R\cdot h/2\pi \\ 0 - 0 \\ -\frac{1}{2}R\cdot R - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi}Rh \\ 0 \\ -\frac{1}{2}R^2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \cancel{t_0 R\cos\varphi_0} \\ t_0 R\sin\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_0 R\cos\varphi_0 \\ t_0 R\sin\varphi_0 \end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \cancel{-R\sin\varphi_0} \\ R\cos\varphi_0 \\ h \end{pmatrix} \\ -R\sin\varphi_0 \\ R\cos\varphi_0 \end{array} = \begin{pmatrix} t_0 R\sin\varphi_0\cdot h - 0 \\ 0 - h\cdot t_0 R\cos\varphi_0 \\ \underbrace{t_0 R^2\cos^2\varphi_0 + t_0 R^2\sin^2\varphi_0}_{t_0 R^2\underbrace{(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0)}_{=1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 R\sin\varphi_0\cdot h \\ -t_0 R\cos\varphi_0\cdot h \\ t_0 R^2 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -t\cdot\sin\varphi \\ t\cdot\cos\varphi \\ t \end{pmatrix},\quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix},\quad \vec{s}\times\vec{t} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \cancel{-t\cdot\sin\varphi} \\ t\cdot\cos\varphi \\ t \end{pmatrix} \\ -t\cdot\sin\varphi \\ t\cdot\cos\varphi \end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \cancel{\cos\varphi} \\ \sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{array} = \begin{pmatrix} t\cos\varphi\cdot\varphi - t\sin\varphi \\ t\cos\varphi + \varphi t\sin\varphi \\ \underbrace{-t\sin^2\varphi - t\cos^2\varphi}_{-t(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi t\cos\varphi - t\sin\varphi \\ \varphi t\sin\varphi + t\cos\varphi \\ -t \end{pmatrix}$$

(d)
$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 0 \\ 2\cos\varphi \end{pmatrix},\quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix},\quad \vec{s}\times\vec{t} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \cancel{-2\sin\varphi} \\ 0 \\ 2\cos\varphi \end{pmatrix} \\ -2\sin\varphi \end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 0 - 2\cos\varphi \\ 0 + 2t\cdot 2\sin\varphi \\ -2\sin\varphi - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ 4t\sin\varphi \\ -2\sin\varphi \end{pmatrix}$$