Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 1

Lösung 1-1. $A_1 = \{\text{“Es fliesst Strom von A nach B”}\} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

$A_2 = \{\text{“Es fliesst kein Strom von A nach B”}\} = (E_1 \cap E_2 \cap E_3)^C = E_1^C \cup E_2^C \cup E_3^C$

$A_3 = \{\text{“Es fliesst Strom von C nach D”}\} = E_1 \cup E_2$

$A_4 = \{\text{“Es fliesst kein Strom von C nach D”}\} = (E_1 \cup E_2)^C = E_1^C \cap E_2^C$

$A_5 = \{\text{“Es fliesst Strom von E nach F”}\} = (E_1 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_4) \cup E_5$

$A_6 = \{\text{“Es fliesst Strom von G nach H”}\} = (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_4) \cap E_5$

Lösung 1-2. (a) Nehmen wir an, ein Würfel sei rot, der andere schwarz. Falls mit dem roten und dem schwarzen Würfel je eine Eins geworfen wird, haben wir das Ereignis “zwei Einsen”. Das Ereignis “eine Eins und eine Zwei” kann auf zwei Arten erzeugt werden. Es kann sein, dass mit dem roten Würfel eine Eins geworfen wird und mit dem schwarzen eine Zwei oder umgekehrt. Um diese Ereignisse formal zu erfassen, benutzen wir Klammern. Der erste Eintrag ist das Ergebnis des roten Würfels und der zweite das Ergebnis des schwarzen. Für die obigen Ereignisse haben wir also: $(1,1), (1,2)$ und $(2,1)$. Mit diesen Überlegungen erhalten wir den folgenden Ergebnisraum:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (2,6), (3,1) \ldots, (6,6)\}$$

Der Ergebinsraum Ω besteht aus 36 Elementarereignissen.

(b) Die Zufallsvariable S ist die Augensumme der Würfel. Ihr Wertebereich ist also gegeben durch: $\mathcal{W}(S) = \{2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$. In der folgenden Tabelle ist ihre Wahrscheinlichkeits-Verteilung beschrieben:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Lösung 1-3. Wir bezeichnen mit r die Anzahl roter Socken und b die Anzahl schwarzer. Die Anzahl aller möglichen Szenarien ist gleich $\frac{(r+b)(r+b-1)}{2!}$. Die Anzahl Szenarien, in denen wir zwei rote Socken ziehen ist gleich $\frac{r(r-1)}{2!}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir zwei rote Socken ziehen gleich

$$P[\{\text{zwei rote Socken}\}] = \frac{r(r-1)}{(r+b)(r+b-1)},$$

was nach Annahme gleich 1/2 sein muss. Das bedeutet, dass wir nach ganzen Zahlen r und b suchen, die

$$2r(r-1) = (r+b)(r+b-1) \quad \text{oder} \quad r^2 - (2b+1)r - b^2 + b = 0$$

erfüllen. Ergänzen wir den quadratischen Ausdruck, erhalten wir, dass die Wahrscheinlichkeit gleich 1/2 ist genau dann wenn

$$2r = 2b + 1 + \sqrt{8b^2 + 1}. \tag{1}$$

Siehe nächste Seite!

(a) Wir setzen $b = 1, 2, 3, \ldots$ in (1) und lösen jeweils nach r auf. Wir haben Glück, denn bei $b = 1$ erhalten wir gerade $r = 3$ und damit ist 4 die richtige Antwort.

(b) Wir setzen $b = 2, 4, 6, \ldots$ in (1) und lösen jeweils nach r auf. Schnell erkannt, löst das Paar $(r, b) = (15, 6)$ die Gleichung und somit ist 21 die richtige Antwort.

Lösung Challenge Serie 1. Wir gehen wie folgt vor: Wir bestimmen die Anzahl Zahlen, die eine Null an der k-ten Stelle haben, wobei $k = 1, \ldots, 8$. Das Resultat ist dann genau die Summe.

$k = 1$: Unter den Zahlen von 1 bis $222'222'222$ befinden sich genau $22'222'222$ Zahlen, die mit einer 0 enden, also an erster Stelle sind (nämlich 10, 20, ..., $222'222'220$).

$k = 2$: Um zu bestimmen wieviele Nullen sich an der zweiten Stelle befinden, bemerken wir, dass alles links von der zweiten Stelle die Zahlen 1 bis $2'222'222$ sein können und alles davor (also rechts davon) die Zahlen 0 bis 9. Das bedeuted, dass es $2'222'222 \cdot 10 = 22'222'220$ Zahlen sind mit einer Null an der zweiten Stelle.

$k = 3$: Mit einer analogen Überlegung erhält man $222'222 \cdot 100 = 22'222'200$ Zahlen mit einer Null an der dritten Stelle.

Fahren wir mit diesem Schema fort, so erhalten wir insgesamt, dass die Anzahl Nullen die aufgeschrieben wurden gleich sind mit

$$\begin{aligned} S = {} & 22'222'222 + 22'222'220 + 22'222'200 + 22'222'000 \\ & + 22'220'00 + 22'200'000 + 22'000'000 + 20'000'000. \end{aligned} \tag{2}$$

Kommen wir nun dazu, wie wir diese Summe auswerten. Jede dieser Zahlen lässt sich schreiben als

$$x_1 10^7 + x_2 10^6 + \cdots + x_8 = \sum_{k=0}^{7} x_k 10^k \quad x_k \in \{1, 2\}.$$

Wir erhalten, dass

$$\begin{aligned} S &= 22'222'222 + 22'222'220 + 22'222'200 + 22'222'000 \\ &\quad + 22'220'00 + 22'200'000 + 22'000'000 + 20'000'000 \\ &= 8 \cdot 20'000'000 + 7 \cdot 2'000'000 + 6 \cdot 200'00 + 5 \cdot 20'000 + 4 \cdot 2'000 + 3 \cdot 200 + 2 \cdot 20 + 2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^{8} k 10^{k-1}. \end{aligned}$$

Mit benützung der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} = \frac{n q^{n+1} - (n+1) q^{n+1} + 1}{(q-1)^2}$$

erhalten wir mit $q = 10$, dass $S = 175'308'642$.