
Zbl 030.15202

Erdős, Paul; Piranian, George

Over-convergence on the circle of convergence. (In English)

Duke Math. J. 14, 647-658 (1947). [0012-7094]

Stellt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vom Konvergenzradius 1 eine analytische Funktion $f(x)$ dar, die auf einem abgeschlossenen Bogen C des Einheitskreises regulär ist, so kann bekanntlich der Fall eintreten, daß eine Teilfolge $s_{m_i}(z)(i = 1, 2, ...)$ der Folge der Partialsummen $s_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(m = 0, 1, ...)$ der Reihe in einem den Bogen C enthaltenden Gebiet gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Nach dem Ostrowskischen Überkonvergenzsatz trifft dies für die Teilfolge $s_{m_i}(z)$ genau dann zu, wenn zu der Indexfolge m_i eine zweite n_i mit $\underline{\lim}_{i\to\infty} n_i/m_i > 1$ existiert derart daß $a_n = 0$ ist für alle n aus den Intervallen $m_i < n \le n_i(i = 1, 2, ...)$. Die Verff. beschäftigen sich mit der Frage, wie weit unter Verzicht auf die Voraussetzung $\underline{\lim}_{i\to\infty} n_i/m_i > 1$ noch die Konvergenz der Folge $s_{m_i}(z)$ auf dem Bogen C selbst behauptet werden kann. Daß dies unter geeigneten Bedingungen für die Koeffizientenfolge a_n möglich sein muß, zeigt schon der Satz von M. Riesz, nach dem die gesamte Folge $s_m(z)$ längs C gleichmäßig gegen $F(z)$ konvergiert, falls $a_n \to 0$ gilt. Durch geeignete Modifikation des bekannten Landauschen Beweises des Rieszschen Satzes [vgl. *E. Landau*, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1929, S. 73] ergeben sich verschiedene Resultate der genannten Art. Der einfachste Satz lautet: Ist die Koeffizientenfolge a_n beschränkt und gilt $a_n = 0$ für $m_i \le n \le n_i$, wo $n_i - m_i \to \infty$ streben soll, so gilt $s_{m_i}(z) \to f(z)$ gleichmäßig längs C; genauer konvergiert $s_{m_i}(z)$ so stark gegen $f(z)$, daß mit jeder Konstanten $k < 1$ die Abschätzung $|f(z) - s_{m_i}(z)| < (n_i - m_i)^{-(n_i-m_i)^k}$ für alle hinreichend großen i besteht. Ähnliche Sätze gelten unter den Voraussetzungen $|a_n| < n^2$ (t konstant) und allgemeiner $|a_n| < e^{\varphi(n)}$, wo $\varphi(n)$ eine gewissen Einschränkungen unterworfene monoton wachsende Funktion bedeutet.

Jedem der damit gewonnenen "Überkonvergenzsätze" läßt sich ein Satz über Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen entnehmen. So folgt aus dem oben wiedergegebenen Satz fast unmittelbar: Die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vom Konvergenzradius 1 besitze Doppellückenin dem Sinne, daß für drei Indexfolgen m_i, n_i, n'_i $(i = 1, 2, ..)$ mit $\lim_{i\to\infty}(n_i - m_i) = \lim_{i\to\infty}(n'{}_i - n_i) = +\infty$ und eine ganze Zahl $k > 0$ alle $a_n = 0$ sind, deren Indizes n den Intervallen $m_i < n \le n_i$ oder $n_i + k < n \le n'{}_i$ $(i = 1, 2, ...)$ angehören. Ist dann die Koeffizientenfolge a_n beschränkt, während anderseits die zwischen den Lückenpaaren stehenden Koeffizienten $a_{n_{i+j}}$ $(i = 1, 2, ...; j = 1, 2, ..., k)$ keine Nullfolge bilden, so ist $f(z)$ nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar.

{Anm. d. Ref.: Die sich so ergebenden Nichtfortsetzbarkeitssätze stehen in enger Beziehung zu den Resultaten des Ref. [Math. Z. 32, 415-421 (1930)] und *H. Claus* [Math. Z. 49, 161-191 (1943)].}

F.Lösch (Stuttgart)

Classification:

30B30 Boundary behavior of power series (one complex variable)