

Zbl 084.04503

Erdős, Pál; Urbanik, Kazimierz

On sets which are measured by multiples of irrational numbers. (In English. RU summary)

Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 6, 743-748 (1958).

Bekanntlich hat jede Punktmenge A im Intervall $[0, 1]$, falls ihr Jordanscher Inhalt existiert, die Eigenschaft, daß für jede irrationale Zahl ξ die Menge der natürlichen Zahlen n mit $n\xi \in A \pmod{1}$ eine von ξ unabhängige natürliche Dichte besitzt. Die Verff. betrachten die Klasse Ξ aller Mengen $A \subseteq [0, 1)$ mit dieser Eigenschaft und untersuchen das Auftreten nichtmeßbarer Mengen $A \in \Xi$. Eine Klasse Ξ_0 von Mengen $A \subseteq [0, 1)$ wird Basis bzw. schwache Basis der Klasse Ξ genannt, wenn es zu jeder Menge $A \in \Xi$ eine Menge $B \in \Xi_0$ so gibt, daß für alle bzw. für fast alle irrationalen ξ die Menge der natürlichen Zahlen n mit $n\xi \in A - B \pmod{1}$ die natürliche Dichte Null hat; dabei ist $A - B$ die symmetrische Differenz. Es wird bewiesen, daß die Menge aller in einer gegebenen Basis (bzw. schwachen Basis) von Ξ enthaltenen nichtmeßbaren Mengen die Mächtigkeit $2^{2^{\aleph_0}}$ (bzw. wenigstens die Mächtigkeit 2^{\aleph_1}) hat. Die Beweise machen vom Auswahlaxiom Gebrauch.

B. Volkmann

Classification:

28A99 Classical measure theory

11B05 Topology etc. of sets of numbers