Zbl 114.26304

Erdős, Pál

Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie.

On some problems of additive number theory. (In German)

J. Reine Angew. Math. 206, 61-66 (1961). [0075-4102]

Eine Menge $\mathfrak{B}$ ($0 \in \mathfrak{B}$) nichtnegativer ganzer Zahlen heißt eine wesentliche Komponente, wenn für jede Menge $\mathfrak{A} = \{0 = a_0 < a_1 < a_2 \cdots\}$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit der Dichte $D(\mathfrak{A} = \alpha(0 < \alpha < 1)$ die Dichte $D(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ der Summenmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ größer als α ist. Man kennt dabei als Abschätzung der Dichte der Summenmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ nach unten $D(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geq \alpha + \alpha(1 - \alpha)/2r$, wenn $\mathfrak{A}$ eine Basis r-ter Ordnung ist. Zum Beweis dieser Aussage benutzt man den folgenden Hilfssatz: Gibt es für eine Menge $\mathfrak{A}$ der Dichte α zu jeder Zahl n ein $k = k(n)$, so daß die Anzahl der Zahlen $\leq n$ in der Menge $\{a_i, a_i + k\}$ größer oder gleich $(\alpha + \varepsilon)n$ ist, dann sei $\max \varepsilon = f(\alpha)$, und es gilt $f(\alpha) \geq \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha)$. Die Vermutung, daß sogar $f(\alpha) \geq \alpha(1 - \alpha)$ sei, wird in der vorliegenden Arbeit durch wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen für jedes α widerlegt. Ferner wird der Beweis für $f(\alpha) > \alpha - 2\alpha^{3/2}$ nach einer Methode von Brauer skizziert. Schließlich werden auf Verallgemeinerung und eine Reihe von offenen Fragen hingewiesen.

E.Härtter

Classification:
11B13 Additive bases
11B83 Special sequences of integers and polynomials

Keywords:
essential component; density of sum sets