Zbl 289.04002
Erdős, Paul; Hajnal, András; Rothchild, B.
On chromatic number of graphs and set systems. (In English)
Cambridge Summer School math. Logic, Cambridge 1971, Lecture Notes Math. 337, 531-538 (1973).

[For the entire collection see Zbl 261.00006.]
Für Kardinalzahlen $\alpha, \beta, \gamma, k, i$ mit $2 \leq k < \omega$, $1 \leq i < k$ gilt per definitionem $R(\alpha, \beta, \gamma, k, i)$, wenn zu jedem Mengensystem $\mathcal{H} = (h, H)$ mit $|h| = \alpha$, $\mathrm{Chr}(\mathcal{H}) > \beta$ und $|S| = k$ für alle $S \in H$ ein $H' \subseteq H$ mit $|H'| = \gamma$ und $|\cap H'| \geq i$ existiert; dabei bedeutet $\mathrm{Chr}(\mathcal{H})$ die kleinste Kardinalzahl δ, so daß eine Zerlegung $h = \bigcup_{\sigma<\delta} h_\sigma$ existiert mit $S \not\subseteq h_\sigma$ für alle $S \in H$ und $\sigma < \delta$. *P. Erdős* und *A. Hajnal* hatten fälschlicherweise $R(\alpha, \beta, \beta^+, k, k-1)$ behauptet [Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 17, 61-99 (1966; Zbl 151.33701)].
Theorem 1: Für $\beta = \omega_\xi$ und $3 \leq k < \omega$ gilt $R(\beta^+, \beta, \beta^+, k, k-1)$, weiter $R(\alpha, \beta, \beta^+, k, 2)$ für $\alpha \leq \omega_{\xi+k-2}$. Theorem 2: Für $\beta = \omega_\xi$, $3 \leq k < \omega$, $2 \leq i \leq k-1$ und $\alpha = (\exp_{k-1}(\beta))^+$ gilt $R(\alpha, \beta, 2, k, i)$ nicht; dabei $\exp_0(\beta) = \beta$ und $\exp_{j+1}(\beta) = 2^{\exp_j(\beta)}$. Unter Voraussetzung der allgemeinen Kontinuumshypothese ist damit der Gültigkeitsbereich von $R(\alpha, \beta, \gamma, k, k-1)$ und $R(\alpha, \beta, \gamma, k, 2)$ bekannt.
In Theorem 3 wird gezeigt, daß die sich aus Satz 2 ergebenden Schranken nicht in allen Fällen scharf sind. Der kleinste ungeklärte Fall ist $R(\omega_2, \omega, 2, 5, 3)$.

H.A.Jung

Classification:
04A20 Combinatorial set theory
05C15 Chromatic theory of graphs and maps