Zbl 312.05123

Erdős, Paul; Hajnal, András; Pósa, L.

Strong embeddings of graphs into colored graphs. (In English)

Infinite finite Sets, Colloq. Honour Paul Erdős, Keszthely 1973, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 10, 585-595 (1975).

[For the entire collection see Zbl 293.00009.]

Die Verff. beschäftigen sich mit unendlichen Graphen $\mathfrak{G} = \langle g, G\rangle$, wobei g die Knotenpunktmenge und G die Kantenmenge bezeichnen, und untersuchen deren Einbettungen in gefärbte Graphen. Unter eine Kantenfärbung von $\mathfrak{G}$ mit γ Farben versteht man die Folge $\{G_\nu : \nu < \gamma; \gamma > 0\}$, wobei die Kantenteilmenge G_ν zueinander disjunkt sind und ihre Vereinigung G ergibt. Ferner sei mit $\mathfrak{G}(h)$ der durch die Knotenpunktmenge $h \subset g$ aufgespannte Untergraph von $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Gegeben seien nun ein Graph $\mathfrak{H} = \langle h, H\rangle$ und eine eineindeutige Abbildung f von h in g mit folgenden Eigenschaften: a) Ist $\{x, y\} \in H$ eine Kante von $\mathfrak{H}$, dann folgt für die Bildkante: $\{f(x), f(y)\} \in G_\nu$ von $\mathfrak{G}_\nu$; b) sind dagegen $x, y \in h$ nicht durch eine Kante in $\mathfrak{H}$ verbunden, so folgt: $\{f(x), f(y)\} \notin G_\nu$. Mit anderen Worten: $\mathfrak{H}$ sei isomorph zu einem aufgespannten Untergraphen $\mathfrak{G}_\nu(g')$ von $\mathfrak{G}_\nu$. Dann sagt man: $\mathfrak{H}$ kann in die ν-te Farbe einer Kantenfärbung $\{G_\nu : \nu < \gamma\}$ von G eingebettet werden. Existiert darüber hinaus im Falle b) nicht nur in $\mathfrak{G}_\nu$, sondern auch in $\mathfrak{G}$ keine Kante $\{f(x), f(y)\}$, d.h. gilt $\mathfrak{G}_\nu(g') = \mathfrak{G}(g')$, so spricht man von einer starken Einbettung. Mit der starken Einbettung beschäftigen sich die Verff. in vorliegender Arbeit und benutzen dazu die beiden folgenden Zerlegungsrelationen, die von *P. Erdős* und *A. Hajnal* [Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18, 359-377 (1967; Zbl 169.26601)] und *C. W. Henson* [Can. J. Math. 25, 603-610 (1973; Zbl 274.05114)] eingeführt wurden: $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_\nu : \nu < \gamma$ seien Graphen. Dann sagt man, daß die Relationen $\mathfrak{G} \to (\mathfrak{H}_\nu)_{\nu<\gamma}$, $\mathfrak{G} \mapsto (\mathfrak{H}_\nu)_{\nu<\gamma}$ gelten, wenn es für jede Kantenfärbung $\{G_\nu : \nu < \gamma\}$ von $\mathfrak{G}$ mit γ Farben ein $\nu < \gamma$ derart gibt, daß $\mathfrak{H}_\nu$ in die ν-te Farbe eingebettet bzw. stark eingebettet werden kann. Stimmen alle $\mathfrak{H}_\nu$ mit $\mathfrak{H}$ überein, so schreibt man anstelle von $(\mathfrak{H}_\nu)_{\nu<\gamma}$ auch $(\mathfrak{H})_\gamma$.

Zum Beweis der folgenden Resultate (3 Sätze) verwenden die Verff. Ergebnisse und Methoden der transfiniten Mengenlehre, und es macht sich dabei die Einführung weiterer Begriffe notwendig. Satz 1: Sei $\mathfrak{H} = \langle h, H\rangle$ der unendliche vollständige paare Graph, d.h. $h = h_0 \cup h_1$, $h_0 \cap h_1 = \emptyset$, $|h_0| = |h_1| = \omega$, $H = [h_0, h_1]$. Dann gilt $\mathfrak{G} \not\mapsto (\mathfrak{H})_2$ für alle abzählbaren Graphen $\mathfrak{G}$. Der Beweis erfolgt indirekt, und es ist notwendig, einen geeigneten Repräsentanten eines sog. ω-guten Graphen ("ω-good graph") der infiniten Kardinalität ω einzufhren.

Bezeichnet man einen Graphen $\mathfrak{G}$ als lokal-endlich, wenn jeder Knotenpunkt von $\mathfrak{G}$ eine endliche Valenz entweder in $\mathfrak{G}$ oder im Komplement $\bar{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ besitzt, so lautet das zweite Ergebnis: Satz 2: Seien $\mathfrak{H}$ lokal-endlich und $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ abzählbar. Dann existiert ein abzählbarer Graph $\mathfrak{G}$ derart, daß $\mathfrak{G} \mapsto (\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ gilt. Der Beweis dieses Satzes vom Ramsey-Typ ist relativ lang und nicht ganz einfach. Von Bedeutung ist dabei die Zuordnung eines "κ-vollständigen eigentlichen Ideals" $I_{\mathfrak{G}} = I$ (κ ist eine transfinite Kardinalzahl) zu einem Graphen $\mathfrak{G}$.

Im Bemühen, eine Verallgemeinerung für größere Graphen zu finden, beweisen

die Verff. den Satz 3: Gegeben sei eine endliche Folge $\langle \mathfrak{H}_i : i < k \rangle$ von abzählbaren Graphen. Dann existiert ein Graph $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}| \le 2^\omega$ derart, daß $\mathfrak{G} \mapsto (\mathfrak{H}_i)_{i<k}$ gilt. Der Beweis wird mit ähnlichen Methoden wie der zu Satz 2 geführt, wobei wiederum das vollständige Ideal I verwendet wird. Erstaunlicherweise ist nicht bekannt, ob sich Satz 3 auf Graphen größerer Kardinalität ausdehnen läßt.
Die Verff. formulieren in diesem Zusammenhang das einfachste ungelöste Problem: Ist es wahr, daß es für alle Graphen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ der Kardinalität ω_1 einen Graphen $\mathfrak{G}$ (von angemessener Größe) derart gibt, daß $\mathfrak{G} \mapsto (\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ gilt?

H.-J.Presia

Classification:
05C99 Graph theory
05C15 Chromatic theory of graphs and maps
05C10 Topological graph theory
04A20 Combinatorial set theory