Zbl 409.10042
Erdős, Paul; Nathanson, Melvyn B.
Bases and nonbases of square-free integers. (In English)
J. Number Theory 11, 197-208 (1979). [0022-314X]

Eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt (asymptotische) Basis (2. Ordnung), wenn jedes $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq N)$ darstellbar ist als $n = b_i + b_j$ mit $b_i, b_i \in B$. Eine Basis B heißt Minimalbasis, wenn keine echte Teilmenge von B Basis ist. - Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt (asymptotische) Nichtbasis (2. Ordnung), wenn A keine Basis ist. Eine Nichtbasis heißt maximale Nichtbasis, wenn jede echte Obermenge von A eine Basis ist. - Weiter heißt eine Basis B r-Minimalbasis ($r \in \mathbb{N}$), wenn für beliebige $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B$ die Menge $B \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}$ Basis ist, falls $k < r$, aber Nichtbasis ist, falls $k \geq r$. Demnach sind 1-Minimalbasen die oben definierten Minimalbasen. Diese Definition wird auch auf $r = \aleph_0$ erweitert: Eine Basis B heißt $\aleph_0$- Minimalbasis, wenn für jede endliche Teilmenge $B^* \subseteq B$ die Menge $B \setminus B^*$ Basis ist, aber für jede unendliche Teilmenge $B^* \subseteq B$ die Menge $B \setminus B^*$ Nichtbasis ist. Eine Menge $\aleph_0$- Minimalbasis ist also eine Basis, die keine Minimalbasis im oben definierten Sinn enthält. - Eine Nichtbasis A heißt s-maximale Nichtbasis ($s \in \mathbb{N}$) bezüglich einer Menge $C \subseteq \mathbb{N}_0$, wenn für beliebige $s_1, c_2, \ldots, c_k \in C \setminus A$ die Menge $A \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$ Nichtbasis ist, falls $k < s$, aber Basis ist, falls $k \geq s$. Mit Hilfe einiger Lemmata über die Menge Q der positiven quadratfreien Zahlen werden dann folgende interessanten Sätze bewiesen: Theorem 1: Es gibt eine Teilmenge von Q, die $\aleph_0$-Minimalbasis ist. Theorem 2: Für jedes $r \in \mathbb{N}$ gibt es eine Teilmenge von Q, die r-Minimalbasis ist. Theorem 3: Es gibt keine Teilmenge von Q, die maximale Nichtbasis ist. Theorem 4: Für jedes $s \in \mathbb{N}$ gibt es eine Teilmenge von Q, die s-maximale Nichtbasis bezüglich Q ist. Theorem 5: Es gibt eine Teilmenge von Q, die Nichtbasis ist, aber nicht enthalten ist in einer bezüglich Q maximalen Nichtbasis $\subseteq Q$.

E.Härtter

Classification:
11B13 Additive bases

Keywords:
minimal basis; nonbasis; square-free numbers