Zbl 488.10043

Erdős, Paul; Sárkőzy, András

Some asymptotic formulas on generalized divisor functions. II. (In English)

J. Number Theory 15, 115-136 (1982). [0022-314X]

Im Anschluß an ihre Arbeit "Some asymptotic formulas on generalized divisor functions. I", die im Turán-Gedenkband der Ungarischen Akademie der Wissenschaften erscheinen wird, beschäftigen sich die Verfasser nochmals mit der Aufgabe, für Teilmengen $A \subset \mathbb{N}$ die Größenordnung von $D_A(x) = \max_{1\le n\le x} \tau A(n)$, wobei $\tau A(n) = \sum_{d|n, d\in A} 1$ ist, mit Hilfe der Funktion $f_A(x) = \sum_{a\le x, a\in A} \frac{1}{a}$ abzuschätzen, was wegen $\sum_{n\le x} \tau A(n) = x \cdot f_A(x) + O(x)$ natürlich erscheint. Die Verfasser zeigen (Theorem 2)

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, D_A(x)\cdot \exp\{-(\frac{e}{16}-\varepsilon)\cdot \log^2 f_A(x)\} = \infty,$$

falls $f_A(x) \to \infty$ geht. Dieses Ergebnis ist in einem gewissen Sinne bestmöglich, denn es gibt (Theorem 3) eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ der Dichte 1, für alle die

$$(*) \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\, D_A(x)\cdot \exp\{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)\cdot \log^2 f_A(x)\} = 0$$

ist. In Satz 5 wird sogar die Existenz einer Folge A nachgewiesen, für welche die Beziehung (*) mit der Konstanten $(\frac{e}{8}+\varepsilon)$ an Stelle von $(\frac{1}{2}+\varepsilon)$ richtig ist. [Dies gibt eine Antwort auf eine in der eingangs zitierten Arbeit der Verfasser geäußerten Vermutung.] In die Beweise gehen unter anderem ein: eine obere Abschätzung der Anzahl $\#\{n \le x; \omega^+(n,y) \le t\}$ (mit $\omega^+(n,y) = \#\{p|n, p > y\}$) und die von *K.K.Norton* [Ill. J. Math. 20, 681-705 (1976; Zbl 329.10035)] stammende Abschätzung

$$\#\{n \le x, \sum_{p|n, p\in E} 1 > \alpha\cdot E(x)\} \le c\cdot x\cdot \exp\{(\alpha - 1 - \alpha\log\alpha)E(x)\},$$

in welcher $\alpha \ge 1$ ist und $E(x)$ für $\sum_{p\le x, p\in E} \frac{1}{p}$ steht.

W.Schwarz

Classification:
11N37 Asymptotic results on arithmetic functions
11K65 Arithmetic functions (probabilistic number theory)
11B99 Sequences and sets

Keywords:
asymptotic formulas; generalized divisor functions; large values