Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Mathematica
Volumen 32, 2007, 235–250

UNE CARACTÉRISATION ALGÉBRIQUE DES HOMÉOMORPHISMES QUASI-MÖBIUS

Marc Bourdon

Université de Lille I, Laboratoire Paul Painlevé, UMR CNRS 8524
F-59655 Villeneuve d'Ascq, France; bourdon@math.univ-lille1.fr

Abstract. Let Z_1, Z_2 be compact metric spaces. Under some natural assumptions, we characterise quasi-Möbius homeomorphisms between Z_1 and Z_2, in terms of isomorphisms between functions algebras on Z_i, which are defined by Besov norms.

Résumé. Soit Z_1, Z_2 deux espaces métriques compacts. Sous quelques hypothèses naturelles, on caractérise les homéomorphismes quasi-Möbius de Z_1 sur Z_2, en termes d'isomorphismes d'algèbres de fonctions définies par des normes de Besov.

0. Introduction

Soit (Z, d) un espace métrique, le *birapport* de quatre points deux à deux distincts de Z est défini par

$$[\xi, \xi', \eta, \eta'] = \frac{d(\xi, \eta)d(\xi', \eta')}{d(\xi, \eta')d(\xi', \eta)}.$$

Un homéomorphisme $f\colon (Z_1, d_1) \to (Z_2, d_2)$ entre deux espaces métriques est dit *quasi-Möbius* s'il existe un homéomorphisme croissant de $]0, +\infty[$ tel que pour tout quadruplet (ξ, ξ', η, η') de points deux à deux distincts de Z_1, on ait :

$$[f(\xi), f(\xi'), f(\eta), f(\eta')] \leq \varphi([\xi, \xi', \eta, \eta']).$$

L'inverse d'un homéomorphisme quasi-Möbius, la composée de deux homéomorphismes quasi-Möbius, sont quasi-Möbius. Cette notion apparaît dans [25] pour la première fois. Pour les espaces métriques compacts elle est équivalente à celle d'homéomophismes quasi-symétriques (voir [25], § 3). Elle est centrale dans la théorie des espaces Gromov hyperboliques, car toute quasi-isométrie entre espaces Gromov hyperboliques se prolonge aux bords en un homéomorphisme quasi-Möbius (voir [2], [9], [10]).

Pour une vaste classe d'espaces métriques compacts, on donne, dans ce papier, une caractérisation algébrique des homéomorphismes quasi-Möbius. Afin d'énoncer

---

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 46J10, 49Q15, 20F67.

Key words: Homéomorphismes quasi-Möbius, quasi-isométries, cohomologie ℓ_p, espaces de Besov.

le résultat, rappelons quelques définitions. Un espace métrique (Z,d) est dit *Ahlfors-régulier* si sa dimension de Hausdorff Q et sa Q-mesure de Hausdorff $\mathscr{H}$ satisfont

$$C^{-1}r^Q \leq \mathscr{H}(B(r)) \leq Cr^Q,$$

pour toute boule $B(r)$ de (Z,d) de rayon $r \leq \mathrm{diam}(Z,d)$, avec $C > 0$ constante indépendante par r. Par exemple, si X est un espace Gromov hyperbolique qui possède un sous-groupe d'isométries proprement discontinu et cocompact, alors le bord de X muni d'une métrique visuelle est Ahlfors-régulier (voir [8], 7.4).

Un espace métrique (Z,d) est dit *linéairement localement connexe* (LLC en abrégé) s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Si $B(z,r)$ est une boule dans Z et $x,y \in B(z,r)$, alors il existe un continuum $C \subset B(z,\lambda r)$ contenant x et y.

(ii) Si $B(z,r)$ est une boule dans Z et $x,y \in Z \setminus B(z,r)$ alors il existe un continuum $C \subset Z \setminus B(z,r/\lambda)$ contenant x et y.

Par exemple si X est un espace Gromov hyperbolique qui possède un sous-groupe d'isométries proprement discontinu et cocompact, et si son bord Z est connexe, alors Z est LLC[1].

Soit à présent $p \in [1,+\infty[$ et (Z,d) un espace métrique compact Ahlfors-régulier de dimension de Hausdorff Q et de mesure de Hausdorff $\mathscr{H}$. Pour $u\colon Z \to \mathbf{R}$ mesurable, définissons sa p-norme de Besov par :

$$\|u\|_{B_p} = \left(\int_{Z\times Z} \frac{|u(\xi)-u(\eta)|^p}{d(\xi,\eta)^{2Q}}\, d\mathscr{H}(\xi)\, d\mathscr{H}(\eta)\right)^{1/p}.$$

Et définissons une algèbre de fonctions $A_p(Z)$ par

$$A_p(Z) = \{u\colon Z \to \mathbf{R} \text{ continues}\,;\ \|u\|_{B_p} < +\infty\}.$$

C'est une algèbre pour l'addition et la multiplication ponctuelles, car en utilisant l'inéqualité de Minkowski il vient

$$\|uv\|_{B_p} \leq \|u\|_\infty \|v\|_{B_p} + \|v\|_\infty \|u\|_{B_p}. \tag{0.1}$$

En toute rigueur $\|*\|_{B_p}$ est seulement une semi-norme sur $A_p(Z)$, en effet $\|u\|_{B_p} = 0$ équivaut à u constante.

Pour $p < q$, l'algèbre $A_p(Z)$ est contenue dans $A_q(Z)$. Lorsque $p > Q$, elle contient les fonctions lipschitziennes de (Z,d). Par contre, pour $p \leq Q$, elle ne sépare pas en général les points de Z (voir [6], [5]). Il est établi dans [6] que tout homéomorphisme quasi-Möbius $f\colon (Z_1,d_1) \to (Z_2,d_2)$ entre deux espaces métriques compacts Ahlfors-réguliers (pas nécessairement de même dimension), induit un isomorphisme d'algèbres $f^*\colon u \mapsto u\circ f$ de $A_p(Z_2)$ sur $A_p(Z_1)$, qui est borné pour la

[1] Ce résultat, qui améliore le théorème de Bestvina et Mess [1] de la connexité locale du bord des groupes hyperboliques, m'a été expliqué par Kleiner [15]. La partie (i) découle du papier [4] de Bonk et Kleiner, la partie (ii) provient d'un argument simple de renormalisation combiné au théorème de Bowditch [7] et de Swarup [24] de non-existence de point de coupure global.

norme de Besov, c'est-à-dire qui satisfait pour tout $u \in A_p(Z_2)$:

$$\alpha \|u\|_{B_p} \leq \|f^*(u)\|_{B_p} \leq \beta \|u\|_{B_p},$$

avec $\alpha, \beta > 0$ indépendantes de u. On démontre ici une réciproque partielle de ce résultat.

Théorème 0.1. *Pour $i = 1, 2$ soit (Z_i, d_i) un espace métrique compact Ahlfors-régulier de dimension Q_i et LLC. Soit $p > max\{Q_1, Q_2\}$. Soit h un isomorphisme d'algèbres de $A_p(Z_2)$ sur $A_p(Z_1)$ pour lequel il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $u \in A_p(Z_2)$ on ait*

$$\alpha \|u\|_{B_p} \leq \|h(u)\|_{B_p} \leq \beta \|u\|_{B_p}.$$

Alors il s'écrit $h(u) = u \circ f$, où f est un homéomorphisme quasi-Möbius de (Z_1, d_1) sur (Z_2, d_2).

En utilisant d'autres algèbres de fonctions (les algèbres de Royden), une caractérisation algébrique similaire avait été obtenue précédemment par Nakai [19], Lewis [17], et Lelong-Ferrand [16], respectivement dans le cas des surfaces de Riemann, des domaines euclidiens et des variétés riemanniennes.

La preuve du théorème 0.1 repose en partie sur les propriétés d'une nouvelle capacité, notée Ω_p, qui est définie avec la norme de Besov comme suit. Pour deux continua disjoints non réduits à un point, C_0, C_1 de Z, on pose

$$\Omega_p(C_0, C_1) = \inf\{\|u\|_{B_p}^p \ ; \ u \in A_p(Z), \ u \leq 0 \text{ sur } \ C_0, \ u \geq 1 \text{ sur } \ C_1\}.$$

On démontre que pour p assez grand Ω_p se comporte essentiellement comme la n-capacité standard dans $\mathbf{R}^n$ (voir [26], [13], [27]). Rappelons que la distance relative entre les continua C_0 et C_1 est

$$\Delta(C_0, C_1) = \frac{d(C_0, C_1)}{\min\{\operatorname{diam} C_0, \operatorname{diam} C_1\}}.$$

Théorème 0.2. *Soit (Z, d) un espace métrique compact Ahlfors-régulier de dimension Q. Soit $p > Q$. Il existe des homéomorphismes décroissants φ et ψ de $]0, +\infty[$ tels que pour tout continua disjoints non réduits à un point, C_0 et C_1 de Z, on ait*

$$\varphi(\Delta(C_0, C_1)) \leq \Omega_p(C_0, C_1) \leq \psi(\Delta(C_0, C_1)).$$

Une conséquence immédiate du Théorème 0.2 est le résultat géométrique suivant.

Corollaire 0.3. *Soit (Z, d) et φ comme dans l'énoncé de 0.2. Alors pour toute fonction $u \in A_p(Z)$ et tout continua C_s et C_t contenus respectivement dans les lignes de niveaux s et t de u, avec $s \neq t$, on a*

$$\Delta(C_s, C_t) \geq \varphi^{-1}\left(\frac{\|u\|_{B_p}^p}{|s - t|^p}\right).$$

Terminons l'introduction par quelques

Remarques et questions. a) Dans l'énoncé du théorème 0.1, j'ignore si l'hypothèse LLC et l'hypothèse h bornée pour la norme de Besov, sont réellement nécessaires. Notons que dans les travaux antérieurs [19], [17] et [16], l'hypothèse h bornée en norme n'est pas nécessaire. Pour se passer de cette hypothèse il suffirait d'établir le résultat suivant (voir le début de la preuve de 2.2). Soit f un homéomorphisme de Z_1 sur Z_2 tel que l'application linéaire induite $f^*\colon u \mapsto u \circ f$ soit une bijection de $A_p(Z_2)$ sur $A_p(Z_1)$ bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_{B_p}$, alors f^* est bornée pour la norme $\|\cdot\|_{B_p}$.

Lorsque les espaces Z_i ne sont pas supposés LLC, le théorème 0.2 combiné aux inégalités (2.1) du chapitre 2, montrent que tout isomorphisme d'algèbres borné en norme de Besov, induit un homéomorphisme entre Z_1 et Z_2 qui quasi-préserve les distances relatives entre continua. Ceci soulève la question suivante (posée par le rapporteur) : un homéomorphisme qui quasi-préserve les distances relatives entre continua induit-il un isomorphisme entre les algèbres de Besov ?

b) Il est tentant de croire qu'il existe également une caractérisation algébrique des homéomorphismes de Möbius. Rappelons qu'un homéomorphisme $f\colon (Z_1, d_1) \to (Z_2, d_2)$ est dit de Möbius s'il préserve les birapports. Il est facile de montrer que l'isomorphisme $f^*\colon u \mapsto u \circ f$ de $A_p(Z_2)$ sur $A_p(Z_1)$, induit par un homéomorphisme de Möbius f, est une isométrie pour les normes de Besov. En effet, l'hypothèse de préservation des birapports implique que pour ξ, ξ', η, η' deux à deux distincts, on a :

$$d_2(f(\xi), f(\eta'))d_2(f(\xi'), f(\eta)) = \frac{d_2(f(\xi), f(\eta))}{d_1(\xi, \eta)} \frac{d_2(f(\xi'), f(\eta'))}{d_1(\xi', \eta')} d_1(\xi, \eta')d_1(\xi', \eta).$$

En faisant tendre η vers ξ et/ou η' vers ξ', on voit que

$$\omega(\xi) := \lim_{\eta \to \xi} \frac{d_2(f(\xi), f(\eta))}{d_1(\xi, \eta)}$$

est bien définie, que la fonction $\xi \mapsto \omega(\xi)$ est continue sur Z_1, et qu'elle satisfait l'identité

$$d_2^2(f(\xi), f(\xi')) = \omega(\xi)\omega(\xi')d_1^2(\xi, \eta).$$

En particulier f est lipschitzienne, les espaces (Z_i, d_i) ont même dimension de Hausdorff, disons Q, et leurs Q-mesures de Hausdorff $\mathscr{H}_i$ satisfont

$$f^*\mathscr{H}_2 = \omega^Q \mathscr{H}_1.$$

Les deux dernières identités impliquent immédiatement que f^* préserve les normes de Besov.

Réciproquement, soit $(Z_i, d_i), i = 1, 2$, deux espaces métriques Ahlfors-réguliers de même dimension Q, soit $p > Q$, et soit h un isomorphisme de $A_p(Z_2)$ sur $A_p(Z_1)$ qui préserve les normes de Besov. Est-ce que h s'écrit $h(u) = u \circ f$ avec f homéomorphisme de Möbius de Z_1 sur Z_2 ?

Remerciements. Le problème de la caractérisation algébrique des homéomorphismes quasi-Möbius m'a été posé par Pansu. Je lui dois également l'idée d'utiliser la cohomologie ℓ_p pour le résoudre. Je l'en remercie vivement ainsi que pour les nombreuses discussions. Merci également à Haissinsky pour son intérêt et ses remarques. Je remercie aussi Kleiner qui m'a indiqué que les bords des groupes hyperboliques sont LLC dès qu'ils sont connexes. Enfin merci au rapporteur pour ses suggestions, remarques et questions.

Notations. On dira que deux fonctions numériques f et g d'un même espace X, sont *comparables*, et on écrira alors $f \asymp g$, s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour tout $x \in X$ on ait $C^{-1}g(x) \leq f(x) \leq Cg(x)$.

1. Norme de Besov, distance relative et cohomologie ℓ_p

On étudie dans ce chapitre la norme de Besov en liaison avec la distance relative entre continua. On démontre le théorème 0.2 de l'introduction en deux étapes : les propositions 1.1 et 1.6 établissent respectivement les inégalités de droite et de gauche de l'énoncé. Les capacités Ω_p et la distance relative Δ sont définies dans l'introduction.

Proposition 1.1. *Soit (Z, d) un espace métrique compact Ahlfors-régulier. Soit $p > 1$. Il existe une homéomorphisme décroissant φ de $]0, +\infty[$, tel que pour tout continua C_0 et C_1 disjoints non réduits à un point, on ait :*

$$\Omega_p(C_0, C_1) \geq \varphi(\Delta(C_0, C_1)).$$

Dans la proposition ci-dessus, on ne suppose pas (Z, d) LLC, ni p supérieur à la dimension de Hausdorff de (Z, d). On suppose juste qu'il existe $u \in A_p(Z)$ avec $u \leq 0$ sur C_0 et $u \geq 1$ sur C_1, de manière à ce que $\Omega_p(C_0, C_1)$ soit bien définie. Cette condition est automatiquement satisfaite lorsque p est strictement supérieur à la dimension de Hausdorff de (Z, d), car $A_p(Z)$ contient alors les fonctions lipschitziennes de (Z, d).

Afin de prouver la proposition 1.1, on utilise une identification entre la p-norme de Besov sur (Z, d) et la p-norme de la 1-cohomologie ℓ_p d'un graphe G hyperbolique dont (Z, d) est le bord de Gromov.

Le graphe G est défini comme suit. Normalisons la métrique d de manière à ce que $\mathrm{diam}(Z, d) = 1/2$. Pour $n \in \mathbf{N}$, choisissons une collection $z_n^1, \ldots, z_n^{k(n)}$ de points de Z telle que

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, k(n)\}, i \neq j, \text{on ait } \; d(z_n^i, z_n^j) \geq e^{-n}/2,$$

et telle que les boules $B(z_n^i, e^{-n}/2)$, $i \in \{1, \ldots, k(n)\}$, recouvrent (Z, d). Notons B_n^i la boule $B(z_n^i, e^{-n})$, et S_n le recouvrement $\{B_n^i;\ i \in \{1, \ldots, k(n)\}$. La normalisation sur le diamètre de Z impose à S_0 d'être réduit à un singleton $\{B_0^1\}$.

On définit les sommets de G comme les boules B_n^i, $n \in \mathbf{N}$, $i \in \{1, \ldots, k(n)\}$. Deux sommets distincts B et B' sont liés par une arête si

– B et B' appartiennent à un même S_n et $B \cap B' \neq \emptyset$, ou si

– l'un appartient à S_n, l'autre à S_{n+1} et $B \cap B' \neq \emptyset$.

Notons $|\cdot - \cdot|$ la métrique de longueur sur G qui donne à chaque arête la longueur 1. On désigne par O le sommet correspondant à la boule B_0^1. On a alors (voir [6] prop. 2.1 et lemme 2.2).

Proposition 1.2. (a) *Le graphe G est un graphe hyperbolique (au sens de Gromov) de valence bornée.*

(b) *Son bord s'identifie naturellement à Z. La métrique d est une métrique visuelle de paramètre e pour G. En d'autres termes, pour tous $\xi, \eta \in Z$ on a :*

$$d(\xi,\eta) \asymp e^{-(\xi|\eta)},$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit de Gromov de G basé en 0.

(c) *Soit $x, y \in G^0$ et B_x, B_y les boules correspondantes dans (Z, d). On a :*

$$e^{|x-y|} \asymp \frac{(\operatorname{diam} B_x \cup B_y)^2}{(\operatorname{diam} B_x)(\operatorname{diam} B_y)}.$$

Le premier espace de cohomologie ℓ_p de G est par définition (voir [11], [21], [6]) :

$$\ell_p H^1(G) := \{f \colon G^0 \to \mathbf{R}\ ;\ df \in \ell_p(G^1)\}/\ell_p(G^0) + \mathbf{R},$$

où G^0 et G^1 désignent respectivement l'ensemble des sommets et des arêtes orientées de G, où df est la fonction de G^1 définie par

$$\forall a \in G^1,\ df(a) = f(a_+) - f(a_-),$$

et où $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des fonctions constantes sur G^0. Muni de la norme induite par celle de la p-norme de df, l'espace $\ell_p H^1(G)$ est un espace de Banach.

Généralisant des travaux antérieurs de Strichartz [23] et de Pansu [20], il est établi dans [6] que tout représentant f d'une classe de cohomologie $[f] \in \ell_p H^1(G)$, se prolonge radialement à $Z = \partial G$, presque partout, en une fonction mesurable de Z notée f_∞ qui ne dépend que de la classe $[f]$. De plus, d'après [6] théorème 3.4, on a :

Théorème 1.3. *Soit*

$$B_p(Z) = \{u \colon Z \to \mathbf{R} \text{ mesurable}\,;\ \|u\|_{B_p} < +\infty\}/\sim$$

où $u \sim v$ si $u - v$ est presque partout constante sur Z. L'application

$$\begin{aligned} \ell_p H^1(G) &\to B_p(Z) \\ [f] &\to f_\infty \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach.

En utilisant cette représentation, on démontre à présent :

Lemme 1.4. *Soit $p > 1$. Il existe des constantes $A \geq 1$ et $B \geq 0$ telles que pour tout continua C_0 et C_1 dans Z, disjoints et non réduits à un point, on ait :*

$$\Omega_p(C_0, C_1) \geq (A|x_0 - x_1| + B)^{1-p},$$

où x_i, $(i = 0, 1)$, est un sommet de G tel que la boule correspondante dans Z contienne C_i et soit de rayon minimal.

Preuve de 1.4. On considère le graphe G défini ci-dessus. Choisissons mesurablement pour chaque $\xi \in C_i$, $(i = 0, 1)$, un rayon géodésique de G noté r^i_ξ, reliant x_i à ξ, dont les sommets forment une suite décroissante de boules d'intersection ξ.

Notons E_i, $(i = 0, 1)$, le graphe dans G qui est l'union des r^i_ξ lorsque ξ décrit C_i. Soit I un segment géodésique reliant x_0 à x_1. On considère alors le graphe

$$E := E_0 \sqcup \mathring{I} \sqcup E_1,$$

qu'on voit comme graphe immergé dans G. On note E^1 l'ensemble de ses arêtes (chaque arête est comptée autant de fois qu'elle apparaît dans E_0, I ou E_1). Pour tout $\xi \in C_0$ et $\eta \in C_1$, le chemin de E

$$\gamma_{\xi\eta} := r^0_\xi \cup I \cup r^1_\eta$$

relie ξ à η dans G. On le paramètre par $\mathbf{Z}$ en partant de x_0.

D'après le lemme de Frostman (voir [18], th. 8.8), puisque la 1-mesure de Hausdorff de C_i est non nulle, il existe une probabilité ν_i sur C_i telle que pour toute boule $B(r)$ de rayon r de (Z, d) on ait

$$\nu_i(B(r)) \leq C \frac{r}{\operatorname{diam} C_i}, \tag{1.1}$$

où C est une constante qui ne dépend que de (Z, d). Définissons pour $a \in E^1$:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(a) &:= \{(\xi, \eta) \in C_0 \times C_1 ; a \subset \gamma_{\xi\eta}\}, \\ m(a) &:= \nu_0 \times \nu_1(\mathscr{C}(a)). \end{aligned}$$

Pour $u \in A_p(Z)$ avec $u \leq 0$ sur C_0 et $u \geq 1$ sur C_1, soit $f \colon G \to \mathbf{R}$ avec $f_\infty = u$ et $\|df\| \asymp \|u\|_{B_p}$ (voir th. 1.3). Puisque u est continue l'égalité $f_\infty = u$ est valable partout sur Z. Par suite pour $\xi \in C_0$ et $\eta \in C_1$, on a

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} df(\gamma_{\xi\eta}[n, n+1]) = f_\infty(\eta) - f_\infty(\xi) = u(\eta) - u(\xi) \geq 1.$$

On obtient avec la définition de $m(a)$, puis avec Hölder en notant q le conjugué de p :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{C_0 \times C_1} \sum_{n \in \mathbf{Z}} df(\gamma_{\xi\eta}[n, n+1]) d\nu_0(\xi) d\nu_1(\eta) \\ &= \sum_{a \in E^1} df(a) m(a) \leq 3 \|df\|_p \left(\sum_{a \in E^1} m(a)^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

car chaque arête de G apparaît au plus 3 fois dans E^1. Ecrivons

$$\sum_{a \in E^1} m(a)^q = \sum_{a \in E^1_0} m(a)^q + \sum_{a \in I^1} m(a)^q + \sum_{a \in E^1_1} m(a)^q.$$

L'avant dernière somme est égale à la longueur du segment I c'est-à-dire $|x_0 - x_1|$. La première somme du membre de droite est égale à

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{a\in E_0^1(k)} m(a)^q,$$

où $E_0^1(k) = \{a \in E_0^1 \ ; \ |a_+ - x_0| = k\}$. Puisque $\nu_0 \times \nu_1$ est une probabilité, on a :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \sum_{a\in E_0^1(k)} m(a) = 1. \tag{1.2}$$

D'autre part, la propriété (1.1) de ν_0, le fait que d soit une métrique visuelle de paramètre e (voir prop. 1.2 (b)), et la propriété $|O - a_+| = |O - x_0| + k$ pour $a \in E_0^1(k)$, impliquent que

$$\forall a \in E_0^1(k), \quad m(a) \leq C'\ e^{-k}, \tag{1.3}$$

où C' est une constante qui ne dépend que G et de (Z, d). Par suite avec (1.2) et (1.3), il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\sum_{a\in E_0^1(k)} m(a)^q &= \sum_{k\geq 0}\sum_{a\in E_0^1(k)} m(a)^{q-1}m(a)\\ &\leq (C')^{q-1}\sum_{k\geq 0} e^{-(q-1)k}\left(\sum_{a\in E_0^1(k)} m(a)\right)\\ &\leq \frac{(C')^{q-1}}{1-e^{-(q-1)}} = C''.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$3\|df\|_p \geq (|x_0 - x_1| + 2C'')^{-1/q}. \qquad \square$$

Lemme 1.5. *Il existe des constantes positives α, β telles que si C et D sont deux continua disjoints et non réduits à un point, on ait*

$$\Omega_p(C, D) \geq \alpha \log \frac{\beta}{\Delta(C, D)}.$$

Preuve. Elle est inspirée de [13], proof of 3.6. On peut supposer $\operatorname{diam} C \leq \operatorname{diam} D$. Soit $\xi \in C$ tel que $d(\xi, D) = d(C, D) = d$. Soit k le plus grand entier strictement positif tel que

$$2^{k+2}\Delta(C, D) \leq 1.$$

Un tel entier existe si $\Delta(C, D) \leq 1/8$. On peut le supposer car pour $\Delta(C, D) \geq 1/8$ le lemme est trivialement vrai. Pour chaque entier $1 \leq j \leq k$ choisissons un continuum

$$C_j \subset C \cap B(\xi, 2^{j+1}d) \setminus \overline{B}(\xi, 2^{j-1}d)$$

de diamètre au moins $2^j d$, et choisissons D_j de la même façon. De tels continua existent par choix de k (voir [14] th. 2.16). Pour chaque j, on construit alors, comme dans la preuve de 1.4, un graphe E_j immergé dans G qui connecte C_j et D_j. Soit $[f] \in \ell_p H^1(G)$ avec $f_\infty = u$ et $\|df\|_p \asymp \|u\|_{B_p}$.

On a, d'après la preuve du lemme précédent

$$3\|df|_{E_j^1}\|_p \geq (|x_j - y_j| + 2C'')^{-1/q},$$

où x_j (resp. y_j) est un sommet de G dont la boule correspondante contient C_j (resp. D_j) et est de rayon minimal. Puisque les diamètres de C_j et de D_j sont au moins égaux à $2^j d$ et que $d(C_j, D_j)$ est inférieure à $2^{j+2}d$, il existe une constante A_0 qui ne dépend que de G telle que $|x_j - y_j| \leq A_0$ (voir prop. 1.2 (c)). On en déduit une constante A_1 qui ne dépend que de G et de p telle que pour tout $1 \leq j \leq k$ on ait :

$$\|df|_{E_j^1}\|_p \geq A_1.$$

De plus, si $x \in G^0$ est un sommet commun à E_i et à E_j avec $1 \leq i < j \leq k$, alors la boule B correspondante à x possède les propriétés suivantes. Il existe des constantes $\gamma, \delta \geq 1$, qui ne dépendent que de A_0, telles que B soit de rayon inférieur à $2^{i+1}d\gamma$ et telles que δB rencontre $B(\xi, 2^{i+1}d)$ et $B(\xi, 2^{j+1}d) \setminus B(\xi, 2^{j-1}d)$. Par suite il existe un entier N ne dépendant que de A_0, tel que pour $j \geq i + N$ les graphes E_i et E_j sont disjoints. Il vient finalement

$$\|df\|_p^p \geq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{k} \|df|_{E_j^1}\|_p^p \geq \frac{k}{N} A_1^p. \qquad \square$$

On démontre maintenant la proposition 1.1 en utilisant les deux lemmes précédents.

Preuve de 1.1. Pour t suffisamment petit $\varphi(t) = \alpha \log \frac{\beta}{t}$ convient d'après le lemme 1.5. Montrons que pour t assez grand $\varphi(t) = (\alpha \log t + \beta)^{1-p}$ convient, où α et β sont des constantes qui ne dépendent que de G et de p. Soit C, D deux continua disjoints non réduits à un point, avec $\Delta(C, D) \geq 1$. On peut supposer $\operatorname{diam} C \leq \operatorname{diam} D$, ce qui entraîne que $d(C, D) \geq \operatorname{diam} C = \delta$. Soit $\eta \in D$ avec $d(C, \eta) = d(C, D)$. Choisissons un continuum

$$C_1 \subset D \cap B(\eta, \delta)$$

de diamètre supérieur ou égal à $\delta/2$. Un tel continuum existe car $\operatorname{diam} D \geq \delta$ (voir [14] th. 2.16).

Soit x_0 et x_1 deux sommets de G tels que les boules correspondantes contiennent respectivement C et C_1 et soient de rayon minimal. D'après la proposition 1.2(c), on a puisque $d(C, C_1) \geq \delta = \operatorname{diam} C$ et puisque $\operatorname{diam} C_1 \in [\delta/2; 2\delta]$,

$$|x_0 - x_1| \leq 2 \log \frac{d(C, C_1)}{\delta} + \gamma,$$

où γ ne dépend que de G. Soit à présent $u \in A_p(Z, d)$ qui satisfait $u \leq 0$ sur C et $u \geq 1$ sur D. Puisque C_1 est contenu dans D, on a $u \geq 1$ sur C_1. En appliquant le lemme 1.4 à u, C et C_1, et ne remarquant que

$$\frac{d(C, C_1)}{\delta} \leq 2\Delta(C, D),$$

on obtient le résultat annoncé. $\square$

La proposition suivante associée à la proposition 1.1 démontre le théorème 0.2 de l'introduction.

Proposition 1.6. *Soit (Z,d) un espace métrique compact Q-régulier. Soit $p > Q$. Il existe un homéomorphisme décroissant ψ de $]0,+\infty[$ tel que pour tout continua C_0 et C_1 disjoints non réduits à un point, on ait :*

$$\Omega_p(C_0,C_1) \leq \psi\left(\Delta(C_0,C_1)\right).$$

Sa preuve utilisera le

Lemme 1.7. *Soit $0 < r < R < \frac{1}{2}\operatorname{diam} Z$ et soit $\zeta \in Z$. Pour $p > Q$, on a :*

$$\Omega_p(\bar{B}(\zeta,r), Z\setminus B(\zeta,R)) \leq C(\log\frac{R}{r})^{1-p},$$

où C ne dépend que de Z et de p.

Preuve. Pour $\xi \in B(\zeta,R)\setminus\bar{B}(\zeta,r)$ on pose :

$$u(\xi) = \left(\log\frac{d(\xi,\zeta)}{r}\right)\cdot\left(\log\frac{R}{r}\right)^{-1},$$

pour $\xi \in \bar{B}(\zeta,r)$, on pose $u(\xi) = 0$, et pour $\xi \in Z\setminus B(\zeta,R)$ on pose $u(\xi) = 1$. La fonction u ainsi définie est continue sur Z. Soit aussi $v(\xi) = u(\xi)\cdot(\log\frac{R}{r})$, on va majorer $\|v\|^p_{B_p}$. A cette fin soit $k \geq 2$ le plus petit entier tel que $e^{k-1}r \geq R$. Définissons pour $i \in \{1,\ldots,k\}$

$$B_i = B(\zeta,e^i r)\setminus\bar{B}(\zeta,e^{i-1}r),$$

et aussi $B_0 = \bar{B}(\zeta,r)$ et $B_{k+1} = Z\setminus B(\zeta,e^k r)$. On a :

$$\|v\|^p_{B_p} = \sum_{0\leq i,j\leq k+1}\int_{B_i\times B_j}\frac{|v(\xi)-v(\eta)|^p}{d(\xi,\eta)^{2Q}}d\mathscr{H}(\xi)d\mathscr{H}(\eta).$$

Appelons I_{ij} l'intégrale du membre de droite. On a clairement $I_{ij} = I_{ji}$. On majore I_{ij} en distinguant plusieurs cas.

Pour $j \leq k$ et $0 \leq i \leq j-2$, on a par définition de v et par régularité de $\mathscr{H}$:

$$I_{ij} \leq C_0(j-i-1)^p(re^j)^{-2Q}(re^i)^Q(re^j)^Q,$$

c'est-à-dire :

$$I_{ij} \leq C_0(j-i)^p e^{(i-j)Q},$$

où C_0 ne dépend que des constantes de régularité de $\mathscr{H}$.

Pour $0 \leq i \leq j \leq k$, on a en remarquant que v est $1/e^{i-1}r$- lipschitzienne sur $\cup_{j\geq i}B_j$:

$$I_{ij} \leq (e^{i-1}r)^{-p}\int_{B_i\times B_j}\frac{d\mathscr{H}(\xi)d\mathscr{H}(\eta)}{d(\xi,\eta)^{2Q-p}}.$$

De plus, en recouvrant B_j par des boules centrées en $\xi \in B_i$ et de rayon e^l, $(l \in \mathbf{Z})$, on voit en comparant l'intégrale à une somme que

$$\int_{B_j} \frac{d\mathscr{H}(\eta)}{d(\xi,\eta)^{2Q-p}} \leq C_1(\operatorname{diam} B_j)^{p-Q},$$

où C_1 ne dépend que des constantes de régularité de $\mathscr{H}$ et de $p > Q$. Donc pour $0 \leq i \leq j \leq k$, il vient

$$I_{ij} \leq (e^{i-1}r)^{-p}(re^i)^Q C_1(re^j)^{p-Q} = C_2 e^{(i-j)(Q-p)}.$$

En particulier pour $j-1 \leq i \leq j \leq k$, l'intégrale I_{ij} est bornée par une constante qui ne dépend que de p et des constantes de régularité de $\mathscr{H}$.

Reste à majorer les intégrales I_{ij} lorsque $j = k+1$. Puisque v est constante sur $B_k \cup B_{k+1}$ on a $I_{ij} = 0$ pour $i, j \in \{k, k+1\}$. Pour $0 \leq i \leq k-1$, on a

$$I_{i,k+1} \leq (k-i+1)^p \int_{B_i \times B_{k+1}} \frac{d\mathscr{H}(\xi)d\mathscr{H}(\eta)}{d(\xi,\eta)^{2Q}}.$$

En recouvrant B_{k+1} par des boules de centre ζ et de rayon re^n, $(n \geq k+1)$, et en comparant l'intégale à une somme, on obtient pour $\xi \in B_i$:

$$\int_{B_{k+1}} \frac{d\mathscr{H}(\eta)}{d(\xi,\eta)^{2Q}} \leq C_3 \sum_{n=k+1}^{l} (re^n)^{-2Q}(re^n)^Q \leq C_4 r^{-Q} e^{-kQ},$$

où l est le plus petit entier tel que $re^l \geq \operatorname{diam} Z$, et où C_3 et C_4 ne dépendent que des constantes de régularité de $\mathscr{H}$ et de p. D'où :

$$I_{i,k+1} \leq C_5(k-i+1)^p e^{(i-k-1)Q}.$$

Finalement il vient

$$\|v\|_{B_p}^p \leq C_6 k + C_7 \sum_{0 \leq i \leq j-2 \leq k-1} (j-i)^p e^{(i-j)Q}.$$

La dernière somme est égale à

$$\sum_{l=2}^{k+1} (k+2-l) l^p e^{-lQ}.$$

En majorant $l^p e^{-lQ}$ par une constante fois a^{-l} (avec $a > 1$) et $k+2-l$ par $k+2$, on voit que la somme ci-dessus est majorée par $C_8 k$. Dès lors, on obtient

$$\|v\|_{B_p}^p \leq C_9 \log \frac{R}{r},$$

et donc

$$\|u\|_{B_p}^p = \left(\log \frac{R}{r}\right)^{-p} \|v\|_{B_p}^p \leq C_9 \left(\log \frac{R}{r}\right)^{1-p}. \qquad \square$$

Passons à la

Preuve de la proposition 1.6. Supposons d'abord $\Delta(C_0, C_1) > 1$. On peut supposer $\operatorname{diam} C_0 \leq \operatorname{diam} C_1$, de sorte que $d(C_0, C_1) > \operatorname{diam} C_0$. Soit $\xi \in C_0$ avec

$d(\xi, C_1) = d(C_0, C_1) = R$, et soit $r > 0$ minimal tel que C_0 soit contenu dans $\overline{B}(\xi, r)$. On a $r \leq \operatorname{diam} C_0 < R$. Puisque C_0 est contenu dans $\overline{B}(\xi, r)$ et que C_1 est contenu dans $Z \setminus B(\xi, R)$, on a

$$\Omega_p(C_0, C_1) \leq \Omega_p(\overline{B}(\xi, r), Z \setminus B(\xi, R)).$$

De plus, $R/r \geq \Delta(C_0, C_1)$, donc le lemme 1.7 montre que $\psi(t) = C(\log t)^{1-p}$ convient pour $t > 1$.

Supposons à présent $\Delta(C_0, C_1) \leq 1$. Soit $d = d(C_0, C_1)$, on suppose que $\operatorname{diam} C_0 \leq \operatorname{diam} C_1$. On a

$$\operatorname{diam} C_0 = d/\Delta(C_0, C_1).$$

Puisque (Z, d) et Q-régulier, il existe un recouvrement de C_0 par au plus Ak^Q boules de rayon $d/2$, où $k = 1/\Delta(C_0, C_1)$ et où A est une constante qui dépend que de Z. Soit $B(\xi_i, d/2)$, ($\xi_i \in C_0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \leq Ak^Q$), de telles boules. On définit comme dans la preuve de 1.7 des fonctions $u_i \in A_p(Z)$, dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 avec $u_i = 0$ sur $\overline{B}(\xi_i, d/2)$ et $u_i = 1$ sur $Z \setminus B(\xi_i, d)$. On pose :

$$u = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Puisque C_1 est contenu dans $Z \setminus B(\xi_i, d)$ on a $u = 1$ sur C_1. Pour $\xi \in C_0$, l'un au moins des $u_i(\xi)$ est nul et les autres sont inférieurs ou égaux à 1. Donc $u \leq 0$ sur C_0. Dès lors

$$\Omega_p(C_0, C_1) \leq \|u\|_{B_p}^p = \|\sum_{i=1}^{n} u_i\|_{B_p}^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{B_p}\right)^p.$$

Avec le lemme 1.7, cette dernière somme est majorée linéairement en fonction de n^p. Ainsi $\psi(t) = A_1 t^{-pQ}$ convient pour t petit. $\square$

Remarques. 1) Les expressions des fonctions φ, ψ obtenues dans les preuves de 1.1 et de 1.7 sont très similaires à celles que Heinonen et Koskela établissent pour les Q-modules de familles de courbes, dans [13] th. 3.6 et lemma 3.14.

2) La définition du graphe G exposée au début du chapitre diffère par un facteur $\frac{1}{2}$ de celle proposée dans [6]. Sans ce facteur, la première partie de la preuve du lemme 2.2 de [6] semble incorrecte. Nous remercions Keith et Pilgrim qui ont relevé cette erreur.

3) Le lemme de Frostman que l'on a utilisé lors de la preuve de 1.4, s'applique en général à des boréliens de $\mathbf{R}^n$. Cette hypothèse n'est pas restrictive ici, en vertu du théorème d'Assouad sur les plongements des espaces compacts Ahlfors-réguliers dans $\mathbf{R}^n$ (voir [12], th. 2.2).

4) Le rapporteur propose dans son rapport des preuves différentes et intéressantes de la proposition 1.1 et du lemme 1.4, qui se généralisent aux compacts qui sont seulement uniformément parfaits. A toute fin utile nous reproduisons ci-dessous ce passage du rapport :

"The conclusion of Proposition 1.1 and Lemma 1.4 appears to hold when the sets C_0 and C_1 are merely uniformly perfect (if one formulates this property in a quantitative fashion), rather than continua. If this is true, it would be of independent interest, and might yield a version of Theorem 0.1 under a weaker LLC-type condition (with uniformly perfect sets replacing continua).

To try to prove this, one could start by showing that if T is a rooted binary tree with basepoint x, then any fonction on T which vanishes at x and tends to 1 at infinity, has p-energy bounded away from zero. Then one can use author's sets E_0 and E_1, and argue that there are quasi-isometric embeddings $(T, x) \to (E_i, x_i)$ with uniform constants, when the sets C_i are uniformly perfect (with controlled constants). The quasi-isometry invariance of the ℓ_p-cohomology and Hölder should then imply the result."

2. Preuve du théorème 0.1

On démontre ici le théorème 0.1 de l'introduction. Sa preuve utilise le théorème 0.2, une expression du birapport à l'aide de la distance relative entre continua (lemme 2.1), qui est due à Bonk et Kleiner, et un argument d'analyse fonctionnelle (lemme 2.2), dû à Lelong-Ferrand. Le lemme suivant est le lemme 2.10 de [3].

Lemme 2.1. *Supposons que (Z, d) soit $\lambda - LCC$. Alors il existe des fonctions $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, dépendant uniquement de λ, avec les propriétés suivantes. Soit $\varepsilon > 0$ et (ξ, ξ', η, η') un quadruplet de points deux à deux distincts de Z.*

i) *Si $[\xi, \xi', \eta, \eta'] \leq \delta_1(\varepsilon)$, alors il existe deux continua C et C' de Z avec $\xi, \eta \in C$, $\xi', \eta' \in C'$ et $\Delta(C, C') \geq 1/\varepsilon$.*

ii) *S'il existe deux continua C, C' de Z avec $\xi, \eta \in C$, $\xi', \eta' \in C'$ et $\Delta(C, C') \geq 1/\delta_2(\varepsilon)$, alors $[\xi, \xi', \eta, \eta'] < \varepsilon$.*

Le lemme suivant reprend des arguments de Lelong-Ferrand ([16] th. 8.3). On le démontre car les espaces fonctionnels considérés ici sont différents de ceux de Lelong-Ferrand.

Lemme 2.2. *Soit pour $i = 1, 2$ un espace métrique compact Q_i-régulier (Z_i, d_i). Pour $p > \max\{Q_1, Q_2\}$, tout isomorphisme d'algèbres de $A_p(Z_2)$ sur $A_p(Z_1)$ est de la forme $h\colon u \mapsto u \circ f$, où f est un homéomorphisme de (Z_1, d_1) sur (Z_2, d_2).*

Preuve de 2.2. On veut montrer que h s'étend un isomorphisme de $C^0(Z_2)$ sur $C^0(Z_1)$, où C^0 désigne l'algèbre des fonctions continues munie de la norme uniforme. En appliquant la transformée de Gelfand (voir [22]), le lemme en découlera.

Munissons $A_p(Z_i)$ de la norme

$$\|u\|_{A_p} = \|u\|_\infty + \|u\|_{B_p}.$$

D'après l'inégalité (0.1) de l'introduction elle satisfait

$$\|uv\|_{A_p} \leq \|u\|_{A_p} \|v\|_{A_p}.$$

Avec cette norme $A_p(Z_i)$ est une algèbre de Banach commutative unitaire (la complétude provient par exemple du théorème 1.3). Elle est semi-simple, en effet l'intersection des noyaux des homomorphismes $u \mapsto u(z)$, $(z \in Z)$, est réduite à 0. Donc l'isomorphisme d'algèbre h est un homéomorphisme (voir [22] th. 11.10).

L'expression de la norme de Besov et une identité remarquable montrent que pour $k \in \mathbf{N}$ et $u \in A_p(Z_i)$

$$\|u^k\|_{B_p} \leq k\|u\|_\infty^{k-1}\|u\|_{B_p}.$$

Par suite

$$\|u^k\|_{A_p} \leq \|u\|_\infty^k + k\|u\|_\infty^{k-1}\|u\|_{B_p},$$

qui combinée à l'inégalité $\|\cdot\|_{A_p} \geq \|\cdot\|_\infty$ donne :

$$\lim_{k\to+\infty} \|u^k\|_{A_p}^{1/k} = \|u\|_\infty.$$

Ainsi h est également un homéomorphisme de $A_p(Z_2)$ sur $A_p(Z_1)$ munies de la norme uniforme. L'hypothèse $p > Q_i$ entraîne que les fonctions lipschitziennes appartiennent à $A_p(Z_i)$. Puisqu'elles sont denses dans $C^0(Z_i)$ (voir [12] th. 6.8), l'isomorphisme h se prolonge en un isomorphisme de $C^0(Z_2)$ sur $C^0(Z_1)$. □

Passons à la

Preuve du théorème 0.1. Soit h un isomorphisme de $A_p(Z_2)$ sur $A_p(Z_1)$. D'après le lemme 2.2, il existe un homéomorphisme f de (Z_1, d_1) sur (Z_2, d_2) tel que h s'écrire $h(u) = u \circ f$. Montrons que f est quasi-Möbius. Etant donné que $[\xi, \xi', \eta, \eta'] = [\xi', \xi, \eta, \eta']^{-1} = [\xi, \xi', \eta', \eta]^{-1}$, il suffit de montrer que le birapport $[\xi, \xi', \eta, \eta']$ de 4 points distincts de Z_1 est petit si seulement si $[f(\xi), f(\xi'), f(\eta), f(\eta')]$ est petit, quantitativement. Pour deux continua C, C' disjoints non réduits à un point, on a puisque h est borné pour la norme de Besov :

$$\Omega_p(f(C), f(C')) \leq \alpha^{-p}\Omega_p(C, C'), \tag{2.1}$$

où α est la constante de l'énoncé. Alors en appliquant le lemme 2.1(i) à $[\xi, \xi', \eta, \eta']$, puis le théorème 0.2, puis l'inégalité (2.1) ci-dessus, puis de nouveau le théorème 0.2, et finalement le lemme 2.1(ii) à $[f(\xi), f(\xi'), f(\eta), f(\eta')]$, on montre l'existence d'une fonction $\alpha_1 \colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait :

$$[\xi, \xi', \eta, \eta'] < \alpha_1(\varepsilon) \Rightarrow [f(\xi), f(\xi'), f(\eta), f(\eta')] < \varepsilon.$$

En considérant f^{-1} à la place de f, on obtient une fonction $\alpha_2 \colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$[f(\xi), f(\xi'), f(\eta), f(\eta')] < \alpha_2(\varepsilon) \Rightarrow [\xi, \xi', \eta, \eta'] < \varepsilon.$$

D'où le théorème. □

Références

[1] Bestvina, M., and G. Mess: The boundary of negatively curved groups. - J. Amer. Math. Soc. 4, 1991, 469–481.

[2] Bonk, M., J. Heinonen, and P. Koskela: Uniformizing Gromov hyperbolic spaces. - Astérisque 270, 2001.

[3] Bonk, M., and B. Kleiner: Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres. - Invent. Math. 150, 2002, 1247–1287.

[4] Bonk, M., and B. Kleiner: Quasi-hyperbolic planes in hyperbolic groups. - Proc. Amer. Math. Soc. 133, 2005, 3491–2494.

[5] Bourdon, M.: Cohomologie ℓ_p et produits amalgamés. - Geom. Dedicata 107, 2004, 85–98.

[6] Bourdon, M., and H. Pajot: Cohomologie ℓ_p et espaces de Besov. - J. Reine Angew. Math. 558, 2003, 85–108.

[7] Bowditch, B.: Connectedness properties of limit sets. - Trans. Amer. Math. Soc. 351, 1999, 3673–3686.

[8] Coornaert, M.: Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov. - Pacific J. Math. 159, 1993, 241–270.

[9] Coornaert, M., T. Delzant, and A. Papadopoulos: Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de M. Gromov. - Lecture Notes in Math. 1441, Springer, 1991.

[10] Ghys, E., and P. de la Harpe (eds.): Sur les groupes hyperboliques d'après Gromov. - Progr. Math. 83, Birkhäuser, 1990.

[11] Gromov, M.: Asymptotic invariants for infinite groups. - London Math. Soc. Lect. Note Ser. 182, edited by G. A. Niblo and M. A. Roller, 1993.

[12] Heinonen, J.: Lectures on analysis on metric spaces. - Universitext, Springer, 2001.

[13] Heinonen, J., and P. Koskela: Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. - Acta Math. 181, 1998, 1–61.

[14] Hocking, J. G., and G. S. Young: Topology. - Academic Press, 1959.

[15] Kleiner, B.: Communication personnelle.

[16] Lelong-Ferrand, J.: Etude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions, et généralisant les quasi-conformes. - Duke Math. J. 40, 1973, 163–186.

[17] Lewis, L. G.: Quasiconformal mappings and Royden algebras in space. - Trans. Amer. Math. Soc. 168, 1971, 481–492.

[18] Mattila, P.: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. - Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44, Cambridge University Press, 1995.

[19] Nakai, M.: Algebraic criterion on quasiconformal equivalence of Riemann surfaces. - Nagoya Math. J. 16, 1960, 157–184.

[20] Pansu, P.: Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré un. - PDE and Geometry 1988, Rend. Sem. Mat. Torino, Fasc. Spez., 1989, 95–120.

[21] Pansu, P.: Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement. - Prépublication Université Paris-Sud, 1998.

[22] Rudin, W.: Functional analysis. - McGraw-Hill, 1973.

[23] Strichartz, R. S.: Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifolds. - J. Funct. Anal. 52, 1983, 48–79.

[24] Swarup, G.: On the cut point conjecture. - Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2, 1996, 98–100 (electronic).

[25] Väisälä, J.: Quasimöbius maps. - J. Analyse Math. 44, 1984/85, 218–234.

[26] Väisälä, J.: Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. - Lecture Notes in Math. 229, Springer-Verlag, 1971.

[27] Vuorinen, M.: Conformal geometry and quasiregular mappings. - Lecture Notes in Math. 1319, Springer-Verlag, 1988.

Received 25 January 2006