ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Tomus 44 (2008), 271–284

CAPITULATION DANS CERTAINES EXTENSIONS NON RAMIFIÉES DE CORPS QUARTIQUES CYCLIQUES

Abdelmalek Azizi† and Mohammed Talbi

Abstract. Let $K = k\left(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}}\right)$ with $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ where l is a prime number such that $l = 2$ or $l \equiv 5 \bmod 8$, ε the fundamental unit of k, p a prime number such that $p \equiv 1 \bmod 4$ and $(\frac{p}{l})_4 = -1$, $K_2^{(1)}$ the Hilbert 2-class field of K, $K_2^{(2)}$ the Hilbert 2-class field of $K_2^{(1)}$ and $G = \mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ the Galois group of $K_2^{(2)}/K$. According to E. Brown and C. J. Parry [7] and [8], $C_{2,K}$, the Sylow 2-subgroup of the ideal class group of K, is isomorphic to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, consequently $K_2^{(1)}/K$ contains three extensions F_i/K $(i = 1, 2, 3)$ and the tower of the Hilbert 2-class field of K terminates at either $K_2^{(1)}$ or $K_2^{(2)}$. In this work, we are interested in the problem of capitulation of the classes of $C_{2,K}$ in F_i $(i = 1, 2, 3)$ and to determine the structure of G.

Résumé. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}})$ avec $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ où l est un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, ε l'unité fondamentale de k, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et $G = \mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$. D'après E. Brown et C. J. Parry [7] et [8], $C_{2,K}$, le 2-groupe de classes de K, est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, par conséquent $K_2^{(1)}/K$ contient trois extensions F_i/K $(i = 1, 2, 3)$ et la tour des 2-corps de classes de Hilbert de K s'arrête en $K_2^{(1)}$ ou en $K_2^{(2)}$. Dans ce travail, on s'intéresse au problème de capitulation des classes de $C_{2,K}$ dans F_i $(i = 1, 2, 3)$ et à déterminer la structure de G.

1. Introduction

Soient K un corps de nombres (de degré fini sur $\mathbb{Q}$), $C_{2,K}$ le 2-groupe de classes de K, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$.

Supposons que $C_{2,K}$ est de type $(2, 2)$, alors $K_2^{(1)}/K$ a trois sous-corps quadratiques qu'on note par F_1, F_2 et F_3. Dans [14], en utilisant un calcul sur le transfert, H. Kisilevsky a lié le problème de capitulation dans les extensions F_i/K, pour

2000 *Mathematics Subject Classification*: primary 11R27; secondary 11R37.
Key words and phrases: corps biquadratiques cycliques, groupe de classes, capitulation, corps de classes de Hilbert.
†Recherche soutenue par l'Académie Hassan II des Sciences et Techniques, Maroc.
Received June 29, 2007. Editor R. Kučera.

$i \in \{1,2,3\}$, à la structure du groupe G. Dans [1], A. Azizi a étudié le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux des corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés et $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$, en utilisant les unités, il a trouvé le nombre des classes de K qui capitulent dans les sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$, ensuite il a déterminé la structure du groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$.

De notre part on s'interesse, dans ce papier, au problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de certains corps K, imaginaires cycliques de degré 4 sur $\mathbb{Q}$ tel que $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$, dans les sous-corps quadratiques F_i $(i = 1,2,3)$ de $K_2^{(1)}/K$ et à déterminer la structure du groupe de Galois G de $K_2^{(2)}/K$.

Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}})$ où ε est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$. D'après E. Brown et C. J. Parry [7] et [8], la 2-partie $C_{2,K}$ du groupe de classes de K est de type $(2,2)$, par suite $K_2^{(1)}$ contient trois extensions F_i/K; $i = 1,2,3$. En particulier, on démontre le résultat principal suivant :

Théorème. *Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}})$ où ε est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tels que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$, F_1, F_2 et F_3 les sous-corps quadratiques de $K_2^{(1)}/K$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$, alors :*
(1) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$, alors les quatres classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1,2,3\}$ et le groupe G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(2) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$, alors dans chaque extension F_i, $i \in \{1,2,3\}$, il existe exactement deux classes de $C_{2,K}$ qui capitulent et le groupe G est quatérnionique d'ordre 8.

2. Résultats préliminaires

Dans cette section on va donner certains résultats qu'on utilise dans la suite.

Définition 1. *On appelle corps de genres d'un corps de nombres K, qu'on note $K^{(*)}$, la plus grande extension de K de la forme KL qui est non ramifiée pour tous les idéaux premiers de K, finis et infinis, et telle que L est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$.*

Proposition 1. *Soit K un corps de nombres abélien sur $\mathbb{Q}$, de degré n.*
Si $n = r^s$ où r est un nombre premier et $s > 0$, alors :

$$K^{(*)} = \Big(\prod_{p|D_K, p\neq r} M_p\Big)K = \Big(\prod_{p|D_K, p\neq r} M_p\Big)M_r\,,$$

où M_p est l'unique sous-corps, de degré e_p (l'indice de ramification de p dans K) sur $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{Q}(\xi_p)$ le p-ième corps cyclotomique, M_r est un sous-corps de degré e_r (l'indice de ramification de r dans K) sur $\mathbb{Q}$, d'un corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\xi_{r^\nu})$ pour un certain $\nu \in \mathbb{N}$ et D_K le discriminant de K.

Proof. Voir [12]. □

Lemme 1. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon\sqrt{l}})$ où ε est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$ et p un nombre premier différent de l, alors $K^{(*)} = K(\sqrt{p^*})$ où $p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$.

Proof. Comme l et p sont les seuls premiers de $\mathbb{Q}$ qui se ramifient dans K avec $e_l = 4$ et $e_p = 2$, alors, d'après la Proposition 1, on a $K^{(*)} = M_pK$ avec M_p est l'unique sous-corps, de degré 2 sur $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ à savoir $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$, ainsi $K^{(*)} = K(\sqrt{p^*})$. □

Proposition 2. *Soient L/M une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$, et L_1, L_2, L_3 ses sous extensions quadratiques. Alors*

$$h(L) = \frac{2^{d-\kappa-2-v}q(L)h(L_1)h(L_2)h(L_3)}{h(M)^2},$$

où $q(L) = [E_L : E_1E_2E_3]$ est l'indice des unités de L/M, d le nombre des premiers infinis de M qui se ramifient dans L/M, κ est le $\mathbb{Z}$-rang du groupe E_M des unités de M, est $v = 0$ sauf si $L \subseteq M(\sqrt{E_M})$ où $v = 1$.

Proof. Voir [18]. □

Théorème 1. *Soit L/M une extension cyclique non ramifiée de degré un nombre premier, alors le nombre des classes qui capitulent (deviennent principaux) dans L/M est égal à:*

$$[L : M]\big[E_M : N_{L/M}(E_L)\big]\,.$$

Proof. Voir [11]. □

Proposition 3. *Soient G un 2-groupe fini d'ordre 2^m et G' son sous-groupe dérivé. Alors G/G' est de type $(2,2)$ si et seulement si G est isomorphe à l'un des 2-groupes suivants :*

$$\begin{array}{llll}
Q_m = \langle x, y\rangle & \textit{où} \quad x^{2^{m-2}} = y^2 = a, & a^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1} & \textit{avec} \quad m \geq 3,\\
D_m = \langle x, y\rangle & \textit{où} \quad x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, & y^{-1}xy = x^{-1} & \textit{avec} \quad m \geq 3,\\
S_m = \langle x, y\rangle & \textit{où} \quad x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, & y^{-1}xy = x^{2^{m-2}-1} & \textit{avec} \quad m \geq 4,\\
(2,2) = \langle x, y\rangle & \textit{où} \quad x^2 = y^2 = 1, & xy = yx, &
\end{array}$$

où Q_m le groupe des quaternions, D_m le groupe diédral, S_m le groupe semi-diédral d'ordres 2^m et un groupe de type $(2,2)$ est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proof. Voir [14]. □

Supposons que G est un 2-groupe fini d'ordre 2^m tel que G/G' est de type $(2,2)$, alors G est isomorphe à Q_m, D_m, S_m ou à un groupe de type $(2,2)$. Soient $\{x,y\}$ une partie génératrice de G satisfaisant aux relations citées dans la Proposition 3. Par un simple calcul on peut voir que le sous-groupe dérivé $G' = [G,G] = \langle x^2\rangle$ et que G à trois sous-groupes d'indice 2 à savoir $H_1 = \langle x\rangle$, $H_2 = \langle x^2, y\rangle$ et $H_3 = \langle x^2, xy\rangle$. De plus si G est de type $(2,2)$, alors les sous-groupes H_i sont cycliques d'ordre 2, si $G \simeq Q_3$, alors les sous-groupes H_i sont cycliques d'ordre 4 et si $G \simeq Q_m$ avec $m > 3$ ou à D_m ou à S_m, alors H_1 est cyclique et H_i/H_i' est de type $(2,2)$ pour

$i \in \{2,3\}$ où H_i' est le sous-groupe dérivé de H_i.

Dans toute la suite de cette section on désigne par K un corps de nombres, C_K son groupe de classes, $C_{2,K}$ la 2-partie de C_K, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$, G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$ et G' son sous-groupe dérivé. Alors $G' \simeq \mathrm{Gal}\left(K_2^{(2)}/K_2^{(1)}\right)$ et $G/G' \simeq \mathrm{Gal}\left(K_2^{(1)}/K\right)$, et on sait par la théorie des corps de classes que $\mathrm{Gal}\left(K_2^{(1)}/K\right) \simeq C_{2,K}$, ainsi $G/G' \simeq C_{2,K}$.

Définition 2 (Conditions de Taussky)**.** *Soient F une extension cyclique non ramifiée de K et j : l'application de C_K dans C_F qui fait correspondre à la classe d'un idéal $\mathfrak{a}$ de K, la classe de l'idéal engendré par $\mathfrak{a}$ dans F. Alors:*
- *L'extension F/K est dite de type (A) si et seulement si $|\ker j \cap N_{F/K}(C_F)| > 1$,*
- *L'extension F/K est dite de type (B) si et seulement si $|\ker j \cap N_{F/K}(C_F)| = 1$.*

Supposons maintenant que $C_{2,K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ce qui donne que G' est cyclique. Donc la tour des 2-corps de classes de Hilbert de K s'arrête en $K_2^{(2)}$.

De plus, on sait que si G est d'ordre 2^m et $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors, G est isomorphe à Q_m, D_m, S_m ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans tous ces cas, on a $G' = \langle x^2 \rangle$ et les trois sous-groupes d'indice 2 dans G sont : $H_1 = \langle x \rangle$, $H_2 = \langle x^2, y \rangle$ et $H_3 = \langle x^2, xy \rangle$, et soit F_i $(i = 1,2,3)$ le sous-corps de $K_2^{(2)}$ laissé fixe par H_i et j_i l'application j définie pour $F = F_i$.

Si $G' \neq 1$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et $\langle x^4 \rangle$ est l'unique sous-groupe de G' d'indice 2 et notons L le sous-corps de $K_2^{(2)}$ laissé fixe par $\langle x^4 \rangle$, alors $\mathrm{Gal}\,(L/K)$ est isomorphe soit à Q_3 soit à D_3, et on a

Théorème 2. *On suppose que $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors on a :*

(1) *Si $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$, alors les corps F_i sont de type (A), $|\ker j_i| = 4$ pour $i = 1,2,3$ et $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

(2) *Si $\mathrm{Gal}\,(L/K) \simeq Q_3$, alors les corps F_i sont de type (A), $|\ker j_i| = 2$ pour $i = 1,2,3$ et $G \simeq Q_3$.*

(3) *Si $\mathrm{Gal}\,(L/K) \simeq D_3$, alors les corps F_2 et F_3 sont de type (B) et $|\ker j_2| = |\ker j_3| = 2$. De plus; si F_1 est de type (B) alors $|\ker j_1| = 2$ et $G \simeq S_m$. Si F_1 est de type (A) et $|\ker j_1| = 2$, alors $G \simeq Q_m$. Enfin si F_1 est de type (A) et $|\ker j_1| = 4$, alors $G \simeq D_m$.*

$\lvert\ker j_1\rvert$ (A/B)	$\lvert\ker j_2\rvert$ (A/B)	$\lvert\ker j_3\rvert$ (A/B)	G
4	4	4	$(2,2)$
$2A$	$2A$	$2A$	Q_3
4	$2B$	$2B$	$D_m, m \geq 3$
$2A$	$2B$	$2B$	$Q_m, m > 3$
$2B$	$2B$	$2B$	$S_m, m \geq 4$

Proof. Voir [14]. □

Remarque 1. Soient K tel que $C_{2,K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors les 2-groupes de classes des corps F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ sont cycliques si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1) $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$;
2) $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$ et $G \simeq Q_3$.

On trouve plus d'informations sur le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux d'un corps de nombres K où $C_{2,K}$ est de type $(2, 2)$ dans [14].

3. Unités de certains corps de nombres de degré 4 ou 8 sur $\mathbb{Q}$

Soient d_1 et d_2 deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux, $d_3 = d_1d_2$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ (resp. $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_3})$), $K_0 = k_1k_2$ et N_1 (resp. N_2, N_3) la norme de K_0/k_1 (resp. K_0/k_2, K_0/k_3).

On sait d'après [17] qu'un système fondamental d'unités (**SFU**) de K_0 est, à une permutation près des indices, l'un des systèmes suivants :

(i)	$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$;	
(ii)	$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$	$(N_2(\varepsilon_3) = 1)$;
(iii)	$\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$(N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = 1)$;
(iv)	$\{\varepsilon_1, \sqrt{\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_3}\}$	$(N_1(\varepsilon_2) = N_1(\varepsilon_3) = 1)$;
(v)	$\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}\}$	$(N_2(\varepsilon_3) = N_3(\varepsilon_j) = 1,\ j = 1, 2)$;
(vi)	$\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$	$(N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = N_2(\varepsilon_3) = \pm 1)$.

Proposition 4. *Soit K_0 un corps de nombres, abélien réel et β un entier algébrique de K_0, positif, sans facteurs carrés. On suppose que $K = K_0(\sqrt{-\beta})$ est une extension quadratique de K_0, abélienne sur $\mathbb{Q}$ et que $i = \sqrt{-1}$ n'appartient pas à K. Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ un **SFU** de K_0. On choisit, sans restreindre la généralité, les unités ε_j positives. Alors on a :*

(1) *S'il existe une unité de K_0 de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\dots\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ (à une permutation près), où les $j_k \in \{0, 1\}$, telle que $\beta\varepsilon$ est un carré dans K_0, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ est un **SFU** de K.*

(2) *Dans le cas contraire $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ est un **SFU** de K.*

Proof. Voir [2] ou [5]. □

Corollaire 1. *Soient $K = k\left(\sqrt{-n\varepsilon\sqrt{d}}\right)$ une extension cyclique de degré 4 sur $\mathbb{Q}$, où ε est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec d un entier naturel sans facteurs carrés et n un entier naturel premier à d et sans facteurs carrés, alors $\{\varepsilon\}$ est un **SFU** de K.*

Proof. On a $\{\varepsilon\}$ est un **SFU** de k et $n\sqrt{d}$ n'est pas un carré dans k, ainsi, d'après la Proposition 4, $\{\varepsilon\}$ est aussi un **SFU** de K. □

Théorème 3. *Soient p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \bmod 4$, $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2p})$) et $F_3 = K_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$. Alors on a :*

(i) *Si ε_3 est de norme 1, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un* **SFU** *de K_0 et de F_3.*

(ii) *Sinon, $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un* **SFU** *de K_0 et de F_3.*

Proof. Voir [6]. □

Théorème 4. *Soient $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{p})$ avec l et p deux nombres premiers différents tel que $l \equiv p \equiv 1 \bmod 4$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ (resp. $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{lp})$) et $F_3 = K_0(\sqrt{-n\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où n est un entier naturel sans facteurs carrés. Alors on a:*

(1) *Si ε_3 est de norme 1, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un* **SFU** *de K_0 et de F_3.*

(2) *Si ε_3 est de norme -1, alors $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un* **SFU** *de K_0 et de F_3.*

Proof. Tout d'abord, d'après [19] on a :

$$h_2(K_0) = \frac{1}{4} Q_{K_0} h_2(l) h_2(p) h_2(lp)\,,$$

où $h_2(K_0)$, $h_2(m)$ sont respectivement la 2-partie du nombre de classes de K_0 et de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ avec $m \in \{l, p, lp\}$ et Q_{K_0} est l'indice des unités de K_0. Comme $K_0/\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$ est une extension non ramifiée et le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$ est cyclique (voir [13]), alors $h_2(lp) = 2h_2(K_0)$ et comme $h_2(l) = h_2(p) = 1$, alors $Q_{K_0} = 2$, et comme ε_1, ε_2 sont de norme -1, alors on a :
(1) si ε_3 est de norme 1, alors, en utilisant les résultats de [17], on trouve que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de K_0. Soient N_i la norme de K_0 sur k_i ($i = 1, 2, 3$), alors, d'après la Proposition 4, pour montrer que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de F_3, on montre que $\mu n\varepsilon_1\sqrt{l}$ n'est pas un carré dans K_0, pour $\mu = {\varepsilon'_1}^{j_1}{\varepsilon'_2}^{j_2}\varepsilon'_3$ où $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$, sinon, en utilisant N_2 ou N_3 on trouve que $\pm l$ est un carré dans k_2 ou k_3, ce qui est impossible.
(2) si ε_3 est de norme -1, alors, en utilisant les résultats de [17], on trouve que $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0. D'après la Proposition 4, pour montrer que $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de F_3 il suffit de montrer que $\mu n\varepsilon_1\sqrt{l}$ n'est pas un carré dans K_0, pour $\mu = {\varepsilon'_1}^{j_1}{\varepsilon'_2}^{j_2}\varepsilon'_3$ où $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\} = \{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$, sinon, en calculant la norme dans K_0/k_2, on trouve que $\pm l$ ou $\pm l\varepsilon_2$ est un carré dans k_2, ce qui n'est pas possible. □

Théorème 5. *Soient l et p deux nombres premiers différents tels que $l = 2$ ou $l \equiv 1 \bmod 4$, $p \equiv 1 \bmod 4$, h (resp. h_1) le nombre des classes de $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{p})$ (resp. $k_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{lp})$) et e la norme de l'unité fondamentale de k_0.*

(1) *Si $(\frac{l}{p}) = -1$, alors h est impair, $h_1 \equiv 2 \bmod 4$ et $e = -1$.*

(2) *Si $(\frac{l}{p}) = 1$, alors on a :*

a) *Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 \neq \left(\frac{p}{l}\right)_4$, alors h est impair, $h_1 \equiv 2 \bmod 4$ et $e = 1$.*

b) *Si* $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = \left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1$*, alors* h *est pair,* $h_1 \equiv 4 \bmod 8$ *et* $e = -1$.

c) *Si* $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = \left(\frac{p}{l}\right)_4 = 1$*, alors* h *est pair et* $h_1 \equiv 0 \bmod 4$*. De plus, si* $e = -1$*, alors* $h_1 \equiv 0 \bmod 8$.

Proof. Voir [16]. □

4. Capitulation des 2-classes d'idéaux de K et structure de G

Dans toute la suite, soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1$ avec $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)_4$ désigne le symbole biquadratique rationnel, ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, ε_3 celle de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$, h_0 est le nombre de classes de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ (h_0 est impair), $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$. Alors, d'après [7] et [8], $C_{2,K}$, la 2-partie du groupe de classes de K, est de type $(2,2)$, donc $K_2^{(1)}$ a trois sous-corps quadratiques F_1, F_2 et F_3 sur K.

Comme $\left(\frac{p}{l}\right) = 1$, alors ils existent deux idéaux premiers $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de k tel que $(p) = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ dans k, or $\mathcal{B}_1^{h_0}$ et $\mathcal{B}_2^{h_0}$ sont des idéaux principaux de k, donc on peut choisir a et b strictement positifs tels que $\mathcal{B}_1^{h_0} = (a+b\sqrt{l})$ et $\mathcal{B}_2^{h_0} = (a-b\sqrt{l})$ dans k avec $a+b\sqrt{l}$ et $a-b\sqrt{l}$ sont strictement positifs et on a $p^{h_0} = a^2 - lb^2$.

(a) Si $l = 2$, alors, comme $p \equiv 1 \bmod 8$, donc $p = n^2 - 32m^2$ avec n et m dans $\mathbb{N}$, et on a $p = \pi_1\pi_2$ dans $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avec $\pi_1 = n + 4m\sqrt{2}$ et $\pi_2 = n - 4m\sqrt{2}$ et d'après [13] (Théorème 2, page 324) on a $\left(\frac{p}{2}\right)_4 = \left(\frac{2}{n}\right)$ et $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = \left(\frac{-2}{n}\right)$, de plus, comme $\left(\frac{p}{2}\right)_4 = -1$ (ce qui veut dire que $p \equiv 9 \bmod 16$), alors $n \equiv \pm 5 \bmod 8$, ainsi :

(1) Si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = 1$, alors $n \equiv -5 \bmod 8$;

(2) Si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = -1$, alors $n \equiv 5 \bmod 8$.

On a $K(\sqrt{\pi_1}) \neq K(\sqrt{\pi_2})$ (resp. $K(\sqrt{-\pi_1}) \neq K(\sqrt{-\pi_2})$) car si non $\pi_1\pi_2$ sera un carré dans K ce qui donne que $\sqrt{p} \in K$ ce qui n'est pas possible. De plus, comme π_1 (resp. π_2) est ramifié dans K/k, alors il existe $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) un idéal premier de K tel que $(\pi_1) = {\mathcal{P}_1}^2$ (resp. $(\pi_2) = {\mathcal{P}_2}^2$), et on a si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = 1$, alors $-\pi_1 \equiv 1 \bmod 4$ (resp. $-\pi_2 \equiv 1 \bmod 4$), ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_1})/K$ (resp. $K(\sqrt{-\pi_2})/K$) est non ramifiée, et si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = -1$, alors $\pi_1 \equiv 1 \bmod 4$ (resp. $\pi_2 \equiv 1 \bmod 4$), ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_1})/K$ (resp. $K(\sqrt{\pi_2})/K$) est non ramifiée.

(b) Si $l \equiv 5 \bmod 8$, alors $p^{h_0} = a^2 - lb^2 = \pi_1\pi_2$ avec $\pi_1 = a + b\sqrt{l} = \frac{x+y\sqrt{l}}{2}$ et $\pi_2 = a - b\sqrt{l} = \frac{x-y\sqrt{l}}{2}$ où $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ et on a $4p^{h_0} = pz^2 = x^2 - ly^2$ avec $z = 2p^{\frac{h_0-1}{2}}$.

Tout d'abord $x \not\equiv 0 \bmod 4$, car sinon on trouve que $p \equiv -1 \bmod 4$, ce qui n'est pas le cas, ainsi $x \equiv \pm 1 \bmod 4$ ou $x \equiv 2 \bmod 4$.

Des deux équations $x^2 \equiv ly^2 \bmod p$ et $x^2 \equiv pz^2 \bmod l$ on tire que $\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{l}{p}\right)_4 \left(\frac{y}{p}\right)$ et $\left(\frac{x}{l}\right) = \left(\frac{p}{l}\right)_4 \left(\frac{z}{l}\right)$, et en multipliant les deux dernières équations on trouve que

$$\left(\frac{l}{p}\right)_4 \left(\frac{p}{l}\right)_4 = \left(\frac{x}{lp}\right)\left(\frac{y}{p}\right)\left(\frac{z}{l}\right).$$

Si $x \equiv \pm 1 \bmod 4$, alors y est impair et on a $pz^2 = x^2 - ly^2$, donc $\left(\frac{-l}{x}\right) = \left(\frac{p}{x}\right)$ ce qui veut dire que $\left(\frac{x}{lp}\right) = \left(\frac{lp}{x}\right) = \left(\frac{-1}{x}\right)$.
Et comme $l \equiv 5 \bmod 8$, alors $\left(\frac{2}{l}\right) = -1$ et on a $\left(\frac{p}{l}\right) = 1$, ainsi $\left(\frac{z}{l}\right) = -1$, ce qui donne que $\left(\frac{x}{l}\right) = 1$ et $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = \left(\frac{-1}{x}\right)\left(\frac{y}{p}\right)$, or $\left(\frac{y}{p}\right) = \left(\frac{p}{y}\right) = 1$, par suite

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{l}\right) = 1 \\ \left(\frac{l}{p}\right)_4 = \left(\frac{-1}{x}\right). \end{cases}$$

Si $x \equiv 2 \bmod 4$, alors $x = 2x'$ avec $x' \equiv \pm 1 \bmod 4$. En utilisant le fait que $l \equiv p \equiv 1 \bmod 4$ on trouve que $y \equiv 0 \bmod 4$. Par le même raisonnement que précédemment, on trouve que

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{l}\right) = -\left(\frac{x'}{l}\right) = 1 \\ \left(\frac{l}{p}\right)_4 = -\left(\frac{-1}{x'}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{y}{p}\right). \end{cases}$$

Comme $y \equiv 0 \bmod 4$, alors $y = 2^j u$ avec u est un entier impair et $j \geq 2$, ainsi

$$\left(\frac{y}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)^j \left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)^j \left(\frac{p}{u}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)^j,$$

et on a $j = 2$ implique que $p \equiv 5 \bmod 8$ et $j \geq 3$ implique que $p \equiv 1 \bmod 8$, ce qui donne que $\left(\frac{y}{p}\right) = 1$, par suite on a

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{l}\right) = 1 \\ \left(\frac{l}{p}\right)_4 = -\left(\frac{-1}{x'}\right)\left(\frac{2}{p}\right). \end{cases}$$

Ainsi les formes possibles de x et y sont :

(1) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$ et $l \equiv 5 \bmod 16$, alors $x \equiv 1 \bmod 8$, $y \equiv \pm 3 \bmod 8$ ou $x \equiv 5 \bmod 8$, $y \equiv \pm 1 \bmod 8$ ou $x \equiv 2 \bmod 8$, $y \equiv 4 \bmod 8$ ou $x \equiv 6 \bmod 8$, $y \equiv 0 \bmod 8$;

(2) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$ et $l \equiv 13 \bmod 16$, alors $x \equiv 1 \bmod 8$, $y \equiv \pm 1 \bmod 8$ ou $x \equiv 5 \bmod 8$, $y \equiv \pm 3 \bmod 8$ ou $x \equiv 2 \bmod 8$, $y \equiv 4 \bmod 8$ ou $x \equiv 6 \bmod 8$, $y \equiv 0 \bmod 8$;

(3) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$ et $l \equiv 5 \bmod 16$, alors $x \equiv 3 \bmod 8$, $y \equiv \pm 1 \bmod 8$ ou $x \equiv 7 \bmod 8$, $y \equiv \pm 3 \bmod 8$ ou $x \equiv 2 \bmod 8$, $y \equiv 0 \bmod 8$ ou $x \equiv 6 \bmod 8$, $y \equiv 4 \bmod 8$;

(4) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$ et $l \equiv 13 \bmod 16$, alors $x \equiv 3 \bmod 8$, $y \equiv \pm 3 \bmod 8$ ou $x \equiv 7 \bmod 8$, $y \equiv \pm 1 \bmod 8$ ou $x \equiv 2 \bmod 8$, $y \equiv 0 \bmod 8$ ou $x \equiv 6 \bmod 8$, $y \equiv 4 \bmod 8$.

On a $K(\sqrt{-\pi_1}) \neq K(\sqrt{-\pi_2})$ (resp. $K(\sqrt{\pi_1}) \neq K(\sqrt{\pi_2})$) car si non π_1/π_2 sera un carré dans K ce qui donne que $\sqrt{p} \in K$ ce qui n'est pas possible. De plus, comme $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$) est ramifié dans K/k, alors $(\pm\pi_1)$ (resp. $(\pm\pi_2)$) est le carré d'un idéal de K.

Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$, alors l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ pour $i \in \{1,2\}$ est non ramifiée. En effet, soit $l \equiv 5 \bmod 16$, donc si $x \equiv 1 \bmod 8$ et $y \equiv \pm 3 \bmod 8$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{1 \pm 3\sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{\frac{l+3}{8} \pm \sqrt{l}}{2} - \frac{1 \pm 3\sqrt{l}}{2} = \Big(\frac{1 \pm \sqrt{l}}{2}\Big)^2 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 5 \bmod 8$ et $y \equiv \pm 1 \bmod 8$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{5 \pm \sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{\frac{l+19}{8} \pm \sqrt{l}}{2} - \frac{5 \pm \sqrt{l}}{2} = \Big(\frac{3 \pm \sqrt{l}}{2}\Big)^2 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 2 \bmod 8$ et $y \equiv 4 \bmod 8$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{2 + 4\sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{1 + \sqrt{l}}{2} - \frac{2 + 4\sqrt{l}}{2} = 1 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 6 \bmod 8$ et $y \equiv 0 \bmod 8$, alors

$$-\pi_i \equiv -3 \equiv 1 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée.
Soit $l \equiv 13 \bmod 16$, donc si $x \equiv 1 \bmod 8$ et $y \equiv \pm 1 \bmod 8$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{1 \pm \sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{\frac{l+11}{8} \pm \sqrt{l}}{2} - \frac{1 \pm \sqrt{l}}{2} = \Big(\frac{3 \pm \sqrt{l}}{2}\Big)^2 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 5 \bmod 8$ et $y \equiv \pm 3 \bmod 8$, alors

$$-\pi_i \equiv -\frac{5 \pm 3\sqrt{l}}{2} \equiv 4\frac{\frac{l+11}{8} \pm \sqrt{l}}{2} - \frac{5 \pm 3\sqrt{l}}{2} = \Big(\frac{1 \pm \sqrt{l}}{2}\Big)^2 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 2 \bmod 8$ et $y \equiv 4 \bmod 8$ ou si $x \equiv 6 \bmod 8$ et $y \equiv 0 \bmod 8$, alors, de même que dans le cas où $l \equiv 5 \bmod 16$, on trouve que l'extension $K(\sqrt{-\pi_i})/K$ est non ramifiée.

Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$, alors l'extensions $K(\sqrt{\pi_i})/K$ pour $i \in \{1,2\}$ est non ramifiée. En effet, soit $l \equiv 5 \bmod 16$, donc si $x \equiv 3 \bmod 8$ et $y \equiv \pm 1 \bmod 8$, alors

$$\pi_i \equiv \frac{3 \pm \sqrt{l}}{2} \equiv \frac{3 \pm \sqrt{l}}{2} + 4\frac{\frac{l+19}{8} \pm \sqrt{l}}{2} = \Big(\frac{5 \pm \sqrt{l}}{2}\Big)^2 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 7 \bmod 8$ et $y \equiv \pm 3 \bmod 8$, alors

$$\pi_i \equiv \frac{7 \pm 3\sqrt{l}}{2} \equiv \frac{7 \pm 3\sqrt{l}}{2} + 4\frac{\frac{l-13}{8} \mp \sqrt{l}}{2} = \Big(\frac{1 \mp \sqrt{l}}{2}\Big)^2 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 2 \bmod 8$ et $y \equiv 0 \bmod 8$, alors

$$\pi_i \equiv 1 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 6 \bmod 8$ et $y \equiv 4 \bmod 8$, alors

$$\pi_i \equiv \frac{6+4\sqrt{l}}{2} \equiv \frac{6+4\sqrt{l}}{2} - 4\frac{1+\sqrt{l}}{2} = 1 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée. Soit $l \equiv 13 \bmod 16$, donc si $x \equiv 3 \bmod 8$ et $y \equiv \pm 3 \bmod 8$, alors

$$\pi_i \equiv \frac{3 \pm 3\sqrt{l}}{2} \equiv \frac{3 \pm 3\sqrt{l}}{2} + 4\frac{\frac{l-5}{8} \mp \sqrt{l}}{2} = \Big(\frac{1 \mp \sqrt{l}}{2}\Big)^2 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 7 \bmod 8$ et $y \equiv \pm 1 \bmod 8$, alors

$$\pi_i \equiv \frac{7 \pm \sqrt{l}}{2} \equiv \frac{7 \pm \sqrt{l}}{2} + 4\frac{\frac{l+11}{8} \pm \sqrt{l}}{2} = \Big(\frac{5 \pm \sqrt{l}}{2}\Big)^2 \bmod 4\,,$$

ce qui donne que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée, si $x \equiv 2 \bmod 8$ et $y \equiv 0 \bmod 8$ ou si $x \equiv 6 \bmod 8$ et $y \equiv 4 \bmod 8$, alors, de même que dans le cas où $l \equiv 5 \bmod 16$, on trouve que l'extension $K(\sqrt{\pi_i})/K$ est non ramifiée.

En résumé on a :

Lemme 2. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où l est un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, ε_1 l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1$, π_1 et π_2 définis comme au dessus, alors $K_2^{(1)}$ a trois sous-corps quadratiques F_1, F_2 et F_3 sur K tels que:
(1) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$, alors $F_1 = K(\sqrt{-\pi_1})$, $F_2 = K(\sqrt{-\pi_2})$ et $F_3 = K^{(*)} = K(\sqrt{p})$;
(2) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$, alors $F_1 = K(\sqrt{\pi_1})$, $F_2 = K(\sqrt{\pi_2})$ et $F_3 = K^{(*)} = K(\sqrt{p})$.

$$\begin{tikzcd}
& K_2^{(2)} \arrow[d, dash] & \\
& K_2^{(1)} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
F_2 \arrow[dr, dash] & F_1 \arrow[d, dash] & F_3 \arrow[dl, dash] \\
& K \arrow[d, dash] & \\
& k &
\end{tikzcd}$$

On va faire une étude du problème de la capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les différentes sous-extensions quadratiques F_i/K de $K_2^{(1)}/K$, et par suite nous déterminons la structure de G.

Proposition 5. *Soient $K = k\big(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}}\big)$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1$, $\mathcal{P}_1$ l'idéal premier de K au dessus de $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{P}_2$ celui au dessus de $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$. Alors les classes de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et de $\mathcal{P}$ sont d'ordre 2 dans K et $C_{2,K}$ le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. De plus $\mathcal{P}$ capitule dans F_3, $\mathcal{P}_1$ capitule dans F_1 et $\mathcal{P}_2$ capitule dans F_2.*

Proof. La classe de $\mathcal{P}$ est d'ordre 2, en effet, soient $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k et $\mathcal{O}_K$ celui de K, alors on a $p\mathcal{O}_k = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_i\mathcal{O}_K = {\mathcal{P}_i}^2$ pour $i \in \{1,2\}$, ainsi $p\mathcal{O}_K = \mathcal{P}^2$ dans K. On suppose que $\mathcal{P} = (\alpha)$ pour un certain α dans K, ce qui est équivalent à $(\alpha^2) = (p)$ dans K. Il existe donc ε une unité de K telle que $p\varepsilon = \alpha^2$, or il existe c et d dans k tel que $\alpha = c + d\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}}$, ainsi $p\varepsilon = c^2 - p\varepsilon_1\sqrt{l}d^2 + 2cd\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}}$ et comme $\{\varepsilon_1\}$ est un **SFU** de K et $i = \sqrt{-1} \notin K$, alors $p\varepsilon \in k$ par suite c ou $d = 0$. Si $d = 0$, alors $p\varepsilon = c^2$, ainsi $p = c'^2$ ou $p\varepsilon_1 = c''^2$ dans k, ce qui donne que $\sqrt{p} \in k$ dans le premier cas et $\sqrt{-1} \in k$ dans le deuxième cas, ce qui est impossible, et de même, si $c = 0$ on trouve que $\pm l$ est un carré dans $\mathbb{Q}$. Donc la classe de $\mathcal{P}$ est d'ordre 2. La classe de $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) est aussi d'ordre 2, sinon on utilise le même raisonnement, on trouve que p ou lp est un carré dans $\mathbb{Q}$, ce qui n'est pas possible, par suite $C_{2,K}$ est engendré par les classes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Pour montrer que $\mathcal{P}$ capitule dans $F_3 = K(\sqrt{p})$, il suffit de voir que $\sqrt{p}$ est dans F_3 et $(\sqrt{p}^2) = (p)$ dans F_3, donc $\mathcal{P}$ capitule dans F_3. Et de même on montre que $\mathcal{P}_1$ capitule dans F_1 et $\mathcal{P}_2$ capitule dans F_2. □

Théorème 6. *Soient $K = k\big(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}}\big)$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, ε_1 l'unité fondamentale de k, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1$ et $F_3 = K(\sqrt{p})$. Alors C_{2,F_3}, la 2-partie du groupe de classes de F_3, est cyclique d'ordre $h_2(F_3) = h_2(lp)$ où $h_2(lp)$ est le 2-nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$.*

Proof. L'extension F_3/K est de type (A), en effet, soient π_1, π_2, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ définis comme au début de cette section et soit $K' = k(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{l}})$, alors on a $KK' = F_3$, $N_{K/k}(\mathcal{P}_1) = \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1$ est non ramifié dans K'/k, ainsi, pour montrer que $\mathcal{P}_1$ est inerte dans F_3/K il suffit de montrer que $\mathcal{B}_1$ est inerte dans K'/k (théorème de translation), et pour ceci on calcul le symbole du reste normique suivant $\left(\frac{\pi_1, -\varepsilon_1\sqrt{l}}{\mathcal{B}_1}\right)$, or, d'après [7] et [8], on a

$$\left(\frac{\pi_1, -\varepsilon_1\sqrt{l}}{\mathcal{B}_1}\right) = \left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1\,,$$

ainsi $\mathcal{B}_1$ est inerte dans K'/k, ce qui donne que $\mathcal{P}_1$ reste inerte dans F_3/K et de même on montre que $\mathcal{P}_2$ reste inerte dans F_3/K et comme $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ capitule dans

F_3, alors par application de la loi de réciprocité d'Artin, on trouve que F_3/K est de type (A), par conséquent, d'après [14], on trouve que C_{2,F_3} est cyclique. Comme F_3/k est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$, de sous-extensions quadratiques K, $K' = k(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{l}})$ et $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{l}, \sqrt{p})$, alors d'après la Proposition 2, on trouve que

$$h_2(F_3) = \frac{1}{2}q(F_3)h_2(K)h_2(K')h_2(K_0),$$

ceci car $d = 2$, $\kappa = 1$, $v = 0$. Or on a $h_2(K) = 4$, $h_2(K') = 1$ (voir [9]), et comme l'extension $K_0/\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$ est non ramifiée et le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$ est cyclique (voir [13]), alors $h_2(K_0) = \frac{1}{2}h_2(lp)$, ce qui donne que $h_2(F_3) = q(F_3)h_2(lp)$ et on a $\{\varepsilon_1\}$ est un **SFU** de K et de K' et d'après les théorèmes 3 et 4, K_0 et F_3 ont même **SFU** qui est l'un des systèmes $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ ou $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, ainsi $q(F_3) = 1$, ce qui donne que $h_2(F_3) = h_2(lp)$. □

Remarque 2. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, ε_1 est l'unité fondamentale de k, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $(\frac{p}{l})_4 = -1$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$. Alors $|G| = 2h_2(lp)$ où $h_2(lp)$ est le 2-nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{lp})$.
En effet, comme $K_2^{(1)}/F_3$ est une extension non ramifiée et le 2-groupe de classes de F_3 est cyclique, alors F_3 et $K_2^{(1)}$ ont un même 2-corps de classes de Hilbert à savoir $K_2^{(2)}$, ainsi $|G| = 2h_2(F_3) = 2h_2(lp)$.

Théorème 7. *Soient $K = k\big(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}}\big)$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, ε_1 l'unité fondamentale de k, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $\big(\frac{p}{l}\big)_4 = -1$, F_1, F_2 et F_3 les sous-corps quadratiques de $K_2^{(1)}/K$. Alors on a :*

(1) *Si $\big(\frac{l}{p}\big)_4 = 1$, alors les quatres classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1,2,3\}$ et le groupe G est abélien,*

(2) *Si $(\frac{l}{p})_4 = -1$, alors dans chaque extension F_i, $i \in \{1,2,3\}$, il existe exactement deux classes de $C_{2,K}$ qui capitulent et le groupe G est quatérnionique d'ordre 8.*

Proof. Comme $\big(\frac{p}{l}\big) = 1$, alors ils existent deux idéaux premiers $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de k tel que $(p) = \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ dans k et comme $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ se ramifient dans K, donc soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les idéaux premiers de K au dessus de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$, par suite, d'après la Proposition 5, on a que $C_{2,K}$, le 2-groupe de classes de K, est engendré par les classes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
(1) Si $\big(\frac{l}{p}\big)_4 = 1$, alors $F_1 = K(\sqrt{-\pi_1})$, $F_2 = K(\sqrt{-\pi_2})$ et $F_3 = K^{(*)} = K(\sqrt{p})$ et comme $\big(\frac{p}{l}\big)_4 \neq \big(\frac{l}{p}\big)_4$, alors $h_2(lp) = 2$ (Théorème 5), d'où $h_2(F_3) = 2$ (Théorème 6), par suite $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$, G est abéélien et les quatres classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1,2,3\}$.
(2) Si $\big(\frac{l}{p}\big)_4 = -1$, alors $F_1 = K(\sqrt{\pi_1})$, $F_2 = K(\sqrt{\pi_2})$ et $F_3 = K^{(*)} = K(\sqrt{p})$ et

comme $\left(\frac{p}{l}\right)_4 = \left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$, donc $h_2(lp) = 4$ et ε_3 est de norme -1 (Théorème 5), par suite G est d'ordre 8 (Remarque 2) et $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de F_3 (Théorèmes 3 et 4), et comme $N_{F_3/K}(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = \pm\varepsilon_1$ et $N_{F_3/K}(\varepsilon_2) = N_{F_3/K}(\varepsilon_3) = -1$, donc $N_{F_3/K}(E_{F_3}) = E_K$, et en utilisant le Théorème 1, on trouve que deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent dans F_3 à savoir la classe de $\mathcal{P}$ et son carré et comme les corps $F_1 = K(\sqrt{\pi_1})$ et $F_2 = K(\sqrt{\pi_2})$ sont conjugués, alors, seulement la classe de $\mathcal{P}_1$ et son carré capitulent dans F_1 et seulement la classe de $\mathcal{P}_2$ et son carré capitulent dans F_2 et comme l'extension F_3/K est de type (A), alors, d'après le théorème 2, G est quaternionique, ce qui achève la démonstration du théorème. □

Remarque 3. Soient $K = k(\sqrt{-p\varepsilon_1\sqrt{l}})$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{l})$ avec l un nombre premier tel que $l = 2$ ou $l \equiv 5 \bmod 8$, ε_1 l'unité fondamentale de k, p un nombre premier tels que $p \equiv 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{p}{l}\right)_4 = -1$, F_1, F_2, F_3 les sous-corps quadratiques de $K_2^{(1)}/K$ et C_{2,F_i} le 2-groupe de classes de F_i pour $i \in \{1,2,3\}$. Alors on a:
(1) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = 1$, alors $C_{2,F_1} \simeq C_{2,F_2} \simeq C_{2,F_3} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
(2) Si $\left(\frac{l}{p}\right)_4 = -1$, alors $C_{2,F_1} \simeq C_{2,F_2} \simeq C_{2,F_3} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exemples numériques:

(1) Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-89(2+\sqrt{2})})$. Comme $89 \equiv 9 \bmod 16$ et $\left(\frac{2}{89}\right)_4 = 1$, alors $F_1 = K\big(\sqrt{-(11+4\sqrt{2})}\big)$, $F_2 = K\big(\sqrt{-(11-4\sqrt{2})}\big)$ et $F_3 = K(\sqrt{89})$, et on a, d'après le théorème 7, G est abélien et les quatres 2-classes de K capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1,2,3\}$.

(2) Soient $K = k\big(\sqrt{-109\varepsilon\sqrt{5}}\big)$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ et $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unité fondamentale de k. Comme $5 \equiv 5 \bmod 8$, $109 \equiv 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{109}{5}\right)_4 = -\left(\frac{5}{109}\right)_4 = -1$, alors, $F_1 = K\big(\sqrt{-(17+6\sqrt{5})}\big)$, $F_2 = K\big(\sqrt{-(17-6\sqrt{5})}\big)$ et $F_3 = K(\sqrt{109})$ et d'après le Théorème 7, G est abélien et les quatres 2-classes de K capitulent dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1,2,3\}$.

(3) Soient $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt{-41(2+\sqrt{2})}\big)$. Comme $41 \equiv 9 \bmod 16$ et $\left(\frac{2}{41}\right)_4 = -1$, alors $F_1 = K\big(\sqrt{29+20\sqrt{2}}\big)$, $F_2 = K\big(\sqrt{29-20\sqrt{2}}\big)$ et $F_3 = K(\sqrt{41})$, et on a, d'après le théorème 7, $G \simeq Q_3$ et dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1,2,3\}$ il existe exactement deux 2-classes de K qui capitulent.

(4) Pour $K = k\big(\sqrt{-233\varepsilon\sqrt{13}}\big)$ où $\varepsilon = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$. Comme $13 \equiv 5 \bmod 8$, $233 \equiv 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{233}{13}\right)_4 = \left(\frac{13}{233}\right)_4 = -1$, alors $F_1 = K\big(\sqrt{21+4\sqrt{13}}\big)$, $F_2 = K\big(\sqrt{21-4\sqrt{13}}\big)$ et $F_3 = K(\sqrt{233})$ et d'après le Théorème 7, $G \simeq Q_3$ et dans chacune des extensions F_i pour $i \in \{1,2,3\}$ il existe exactement deux 2-classes de K qui capitulent.

Remerciements. Nous remercions le référé de cet article pour ses remarques et ses suggestions précieuses.

References

[1] Azizi, A., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (2) (1997), 127–130.

[2] Azizi, A., *Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur* $\mathbb{Q}$, Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), 87–93.

[3] Azizi, A., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$, Acta Arith. **94** (2000), 383–399.

[4] Azizi, A., *Sur une question de capitulation*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2197–2002.

[5] Azizi, A., *Sur les unités de certains corps de nombres de degré* 8 *sur* $\mathbb{Q}$, Ann. Sci. Math. Québec **29** (2005), 111–129.

[6] Azizi, A., Talbi, M., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de certains corps biquadratiques cycliques*, Acta Arith. **127** (2007), 231–248.

[7] Brown, E., Parry, C. J., *The 2-class group of certain biquadratic number fields I*, J. Reine Angew. Math. **295** (1977), 61–71.

[8] Brown, E., Parry, C. J., *The 2-class group of certain biquadratic number fields II*, Pacific J. Math. **78** (1) (1978), 11–26.

[9] Conner, P. E., Hurrelbrink, J., *Class number parity*, Ser. Pure Math., 8, World Sci, 1988.

[10] Hasse, H., *Neue Begründung der Theorie des Normenrestsymbols*, J. Reine Angew. Math. **162** (1930), 134–143.

[11] Heider, F. P., Schmithals, B., *Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen*, J. Reine Angew. Math. **366** (1982), 1–25.

[12] Ishida, M., *The genus fields of algebraic number fields*, Lecture Notes in Math. **555** (1976).

[13] Kaplan, P., *Sur le 2-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques*, J. Reine Angew. Math. **283/284** (1976), 313–363.

[14] Kisilevsky, H., *Number fields with class number congruent to* 4 *modulo* 8 *and Hilbert's theorem* 94, J. Number Theory **8** (1976), 271–279.

[15] Kubota, T., *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 65–85.

[16] Kučera, R., *On the parity of the class number of biquadratic field*, J. Number Theory **52** (1995), 43–52.

[17] Kuroda, S., *Über den Dirichletschen Zahlkörper*, Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sec. I **4** (1943), 383–406.

[18] Lemmermeyer, F., *Kuroda's class number formula*, Acta Arith. **66** (3) (1994), 245–260.

[19] Wada, H., *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 201–209.

Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences, Université Mohamed 1
Oujda, Maroc
E-mail: abdelmalekazizi@yahoo.fr talbimm@yahoo.fr