Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis
17 (2001), 97–100
www.emis.de/journals

ÜBER DIE q-MULTIPLIKATIVE FUNKTIONEN DIE DEN MITTELWERT GLEICH NULL HABEN

JÁNOS FEHÉR

Meinem Freund Professor Árpád Varecza aus Anlass der Vollendung seines 60. Lebensjahres gewidmet.

Zusammenfassung. In diesem Beitrag werden die q-multiplikative Funktionen F, die den Mittelwert $M(F) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} F(k) = 0$ haben, charakterisiert.

1. Einleitung

Sei $2 \le q \in \mathbb{N}$. Jedes $n \in \mathbb{N}_0$ kann eindeutig in der Form

$$n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_s q^s \quad (a_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\},\ a_s = 0 \Rightarrow n = 0) \tag{1.1}$$

angegeben werden. Die an der Menge $\mathbb{N}_0$ erklärte Funktion f bzw. F heisst q-additiv bzw. q-multiplikativ, falls – angenommen die Herstellung (1.1) von n –

$$f(n) = \sum_{j=0}^{s} f(a_j q^j) \quad \text{bzw.} \tag{1.2}$$

$$F(n) = \prod_{j=0}^{s} F(a_j q^j) \quad (F \neq 0) \tag{1.3}$$

gelten ([1], [2]).

Man sagt, dass eine Funktion $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ den Mittelwert $M(g)$ hat, wenn die Folge $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$ dem endlichen Grenzwert $M(g)$ zustrebt. Es sei (im Weiteren stets) $F\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ q-multiplikativ mit $|F(n)| \le 1$. H. Delange hat die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz $M(F) \neq 0$ angegeben (vgl. [1], Thèorème 2.). Jedoch befasste er sich mit dem Fall $M(F) = 0$ nicht. Das wird sofort verständlich, wenn man darauf hinweisst, dass dieser vorliegende Satz beim Beweis eines mit dem Satz von Erdős – Wintner analogen Satzes die Rolle eines Hilfssatzes gespielt hat. Der vorliegende Beitrag befasst sich deshalb mit dem Fall $M(F) = 0$. Z.B. kann dieses Ergebnis von Interesse bei der Verwendung des Weyl-Kriteriums für reelwertige q-additive Funktionen sein.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 11K65.
Key words and phrases. Multiplicative arithmetic functions.

Satz. *Sei $F\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ q-multiplikativ mit $|F(n)| \le 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$. $M(F)$ existiert und ist gleich Null genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

$$\text{mindestens einmal } 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \;=\; 0, \tag{1.4}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(q - 1 - \sum_{a=1}^{q-1} \Re F(aq^s) \right) \;=\; \infty. \tag{1.5}$$

2. Hilfssätze

Wir werden bei dem Beweis des Satzes die Methode von H. Delange verwenden. Es sei also

$$\varepsilon_s := \max_{1 \le a < q} (1 - \Re F(aq^s)).$$

Dann gilt stets $\varepsilon_s \ge 0$ und sind die Bedingungen (1.5) und $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s = \infty$ äquivalent.

Hilfssatz 2.1. *Ist $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s < \infty$, so ist das unendliche Produkt $\prod\limits_{s=0}^{\infty} \dfrac{1}{q} \left| 1 + \sum\limits_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right|$ konvergent.*

Beweis. Sei $B_s := \dfrac{1}{q} \sum\limits_{a=1}^{q-1} \Im F(aq^s)$. Aus der Bedingung $|F(n)| \le 1$ folgt

$$2(1 - \Re F(aq^s)) \ge 1 - (\Re F(aq^s))^2 \ge (\Im F(aq^s))^2.$$

Hiraus folgt $2\varepsilon_s \ge \max\limits_{1 \le a < q} |\Im F(aq^s)|^2$. Ferner gilt es

$$B_s^2 \le \frac{1}{q^2} \left(\sum_{a=1}^{q-1} |\Im F(aq^s)| \right)^2 \le \left(\frac{q-1}{q} \right)^2 \left(\max_{1 \le a < q} |\Im F(aq^s)| \right)^2.$$

Daraus gewinnt man $B_s^2 \le 2\varepsilon_s$. Ist also $\sum \varepsilon_s <= \infty$, so ist auch $\sum B_s^2 < \infty$. Schreibt man $\dfrac{1}{q} \left| 1 + \sum\limits_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right| = 1 - u_s$, so ist $0 \le u_s \le 1$. Es genügt also zu beweisen, dass $\sum u_s$ konvergiert. Mit $A_s := \dfrac{1}{q} \sum\limits_{a=1}^{q-1} (1 - \Re F(aq^s))$ gilt

$$0 \le u_s \le 2u_s - u_s^2 = 2A_s - A_s^2 - B_s^2.$$

So ist es offenbar, dass mit $\sum \varepsilon_s$ auch $\sum u_s$ konvergiert. □

Hilfssatz 2.2. *Ist $|z_j| \le 1$ $(j = 1, \dots, q-1)$, so gilt*

$$\frac{1}{q} |1 + z_1 + \cdots + z_{q-1}| \le 1 - \frac{1}{2q} \max_{1 \le a < q} (1 - \Re z_j).$$

Hilfssatz 2.3. *Für $N \to \infty$ gilt mit $t(N) := [\log N / \log = q]$*

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(M) = \prod_{s=0}^{t(N)} \frac{1}{q} \left(1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right) + \circ(1).$$

Die beide letzte Hilssätze stammen von H. Delange (vgl. [1], Lemme 3. bzw. Thèorème 1.).

3. Beweis des Satzes

Laut des Hilfssatzes 2.3. gilt $M(F) = 0$ genau dann, wenn das Produkt

$$\prod_{s=0}^{N} \frac{1}{q} \left| 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right|$$

für $N \to \infty$ gegen Null strebt. Wir bemerken noch, dass ein konvergentes unendliches Produkt den Wert Null nur dann haben kann, wenn es mindestens einen Nullfaktor besitzt.

(a) Setzen wir $M(F) = 0$ und $1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \neq 0$ $(s = 0, 1, \dots)$ voraus. Laut des Hilfssatzes 2.1. gilt dann $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s = \infty$.

(b) Ist $1+\sum_{a=1}^{q-1} F(aq^b) = 0$, so strebt das Produkt $\prod_{s=0}^{N} \frac{1}{q} \left(1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right)$ für $N \to \infty$ gegen Null, weil es für jedes $N \geq b$ verschwindet.

(c) Setzen wir zuletzt $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s = \infty$. Laut des Hilfssatzes 2.2. gilt

$$\frac{1}{q} \left| 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right| \leq 1 - \frac{\varepsilon_s}{2q} \leq \exp\left(-\frac{1}{2q} \varepsilon_s \right),$$

folglich gilt stets

$$\prod_{s=0}^{N} \frac{1}{q} \left| 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{2q} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon_s \right).$$

Weil da die rechte Seite für $N \to \infty$ gegen Null strebt, strebt auch das links stehende Produkt gegen Null.

4. Anwendungen

Die Anwendung des Satzes wird an zwei Beispielen demonstriert.

Beispiel 4.1. *Die reelwertige q-additive Funktion f verteilt sich gleichmässig* (mod 1) *genau dann, wenn für jede positive ganze Zahl k eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

$$\text{(4.2)} \qquad \textit{es existiert } s(k) \in \mathbb{N}_0 \textit{ für das } 1 + \sum_{a=1}^{q-1} \exp(i2\pi k f(aq^{s(k)})) = 0,$$

$$\text{(4.3)} \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{a=1}^{q-1} \sin^2(k f(aq^s) \cdot \pi) = \infty.$$

Beweis. Weil die Funktionen $F_k(n) := \exp(i2\pi k f(n))$ q-multiplikativ mit $|F_k(n)| = 1$ sind, ist das eine unmittelbare Folgerung des Weyl-Kriteriums und des Satzes. □

Beispiel 4.4. *Die reele Zahl α ist genau dann irrational, falls*

$$\text{(4.5)} \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \sin^2(\pi \cdot 2^s \alpha) = \infty.$$

Beweis. Als es wohl bekannt ist, ist α genau dann irrational, wenn sich die Funktion $f(n) = \alpha n \pmod 1$ gleichmässig verteilt. Da f für jedes $q \geq 2$ q-additiv ist, genügt es – laut des Beispiels 4.1. ($q = 2$) – zu bemerken, dass die Bedingung (4.2) mit diesem f nie gelten kann.

□

Literatur

[1] Delange, H. Sür les fonctions q-additives ou q-multiplicatives. *Acta Arithmetica*, XXI:285–298, 1972.

[2] Gelfond, A. O. Sur les nombres qui ont des propertès additives donnés. *Acta Arithmetica*, 13:259–265, 1968.

Received December 4, 2000

E-mail address: `feher@math.ttk.pte.hu`

Lehrstuhl für Mathematik,
PTE, Pécs,
Ifjúság út 6,
H-7624 Pécs,
UNGARN