MATEMÁTICAS RECREATIVAS

El Problema Bovinum de Arquímedes

Douglas Jiménez

Cuando un joven estudiante manifiesta inclinación por la matemática, la gente suele expresar "¡Ah! Le gustan los números". Desde el propio ejercicio de la matemática a uno le gustaría decir que esta es una apreciación equivocada, pero más bien habría que calificarla de incompleta, pues el ejercicio matemático implica formas de pensamiento que van más allá del cálculo simple. Si a uno le gustan los números podría dedicarse por igual a la estadística práctica o a la contabilidad, actividades que un matemático profesional no considera de su competencia.

Sin embargo, no se puede negar que el trabajo con números es central en la actividad matemática, aunque más que las cuentas el matemático prefiere las propiedades; introduce así conceptos como estructuras, simetrías y otros que se pueden aplicar tanto a los números como a entes variados que no se parecen a los números en absoluto, salvo por los parentescos que establecen esos mismos conceptos.

Los números conducen casi que de manera natural a una idea que está en la esencia misma del quehacer matemático: *el infinito*. Una forma, quizá la más superficial entre otras, de aproximarse al concepto de infinito es el estudio de los grandes números. Arquímedes, matemático del siglo III a.C. y uno de los más grandes de la historia toda, dedicó al tema un artículo que es todo un clásico: *El arenario*, ensayo en el que demuestra al rey Gelón que no es infinito el número de granos de arena del cosmos; en donde por cosmos suscribe Arquímedes la idea de Aristarco de Samos de un universo heliocéntrico, con estrellas fijas y la tierra girando alrededor del sol.

En este memorable artículo, Arquímedes hace uso de una habilidad notacional excelente para demostrar que sólo hace falta darle un nombre adecuado a las cosas para identificar el número buscado de granos de arena y señala que tal número debe ser menor a lo que, en nuestra notación actual, es 10^{63}. El artículo puede leerse completo en el tomo 4 de la *Enciclopedia Sigma, El mundo de las matemáticas*, de James R. Newman, Edit. Grijalbo, 1976 (páginas 4 a 17).

Pero a lo que aquí queremos hacer alusión es a otro problema de Arquímedes en el que también maneja números de gran tamaño y que se conoce con el nombre de *Problema de las reses*. El problema fue planteado en verso, supuestamente por el propio Arquímedes aunque algunos califican de apócrifa esta atribución. Lo que sí parece cierto es que Arquímedes se ocupó del problema.

Podemos revisar el poema parte por parte para ver cómo su lectura avanza desde matemática bastante elemental hasta terrenos de complejidad algo mayor. La versión que presentaremos también fue obtenida de la Enciclopedia Sigma, esta vez del tomo 1, páginas 124 y 125.

Mide la cantidad de reses del Sol, oh extranjero,
aplicando tu esfuerzo, si participas de la sabiduría;
de la reses que pastaban en las llanuras de la isla de Sicilia
Trinaquia divididos en cuatro rebaños
de colores distintos: el uno blanco como la leche,
otro brillando con un color azul,
otro amarillo, y otro variado....

Obsérvese que el poema comienza como un reto intelectual: el lector debe demostrar su sabiduría calculando el número de reses que el dios Sol tiene en la llanura de Trinaquia, y para ello, como en todo problema, el cálculo debe hacerse a partir de unos datos dados. En este caso, tenemos cuatro rebaños de reses de colores distintos: blanco, azul, amarillo y variopinto. (Reses azules y amarillas no parecen ser usuales, y menos en los números que conseguiremos aquí. Claro que tratándose del dios Sol, o de cualquier otro dios, no debe haber mayor problema con eso. Otras traducciones los describen negros y marrones, pero nosotros mantendremos fidelidad a nuestro texto.) Es importante ver que las reses están distribuidas en números diferentes de machos y hembras repartidos en cada color, esto es lo que le dará forma al planteamiento del problema:

... En cada
rebaño había toros potentes en número
componiendo esta simetría...

"Potentes en número" significa que la cantidad de toros es un número que sorprenderá al lector. Una forma de ir preparándose para un desenlace sorprendente.

... Imagina, ¡oh extranjero!,
a los de pelo blanco iguales a la mitad y un tercio
de los toros azules, y a todos los amarillos,

¡Atención! He aquí un enunciado clásico para ser expresado en forma matemática. Designemos por TB, TA, TY y TV, respectivamente, al número de toros blancos, azules, amarillos (¡perdón!: Y de yellow, para no repetir la A) y variopintos. Entonces los versos anteriores dicen que

$$TB = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) TA + TY,$$

y continúan de esta manera

pero los azules iguales a la cuarta y quinta parte
de los mezclados y, además, a todos los amarillos.
Y ve que los restantes de color variado igualan
una sexta y séptima parte de los blancos
junto con todos los amarillos.

¡Ajá!, más ecuaciones; por un lado

$$TA = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) TV + TY,$$

y por el otro

$$TV = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) TB + TY,$$

lo que puede resumirse en

$$\begin{aligned} TB &= \frac{5}{6}TA + TY \\ TA &= \frac{9}{20}TV + TY \\ TV &= \frac{13}{42}TB + TY \end{aligned}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones lineales indeterminado, es decir, que admite infinitas soluciones. Pero lo más importante es que es de naturaleza diofántica, en otras palabras: ha de resolverse en números enteros. Si se mantiene a TY como una constante del problema lo que queda es un sistema de tres ecuaciones lineales en las tres incógnitas TB, TA y TV que puede resolverse con las técnicas que se aprendieron en el noveno grado (o tercer año de bachillerato, para los de mayor edad). El resultado, como es natural, depende de TY y es

$$TB = \frac{742}{297}TY, \qquad TA = \frac{178}{99}TY, \qquad TV = \frac{1580}{891}TY.$$

Que hay infinitas soluciones se ve directamente del hecho de que el número de blancos, azules y variopintos depende del número de amarillos. Sin embargo, para que tenga sentido la solución y quede todo en números enteros como se espera, TY debe tener un valor múltiplo de todos los denominadores de las fracciones anteriores. Pero esto significa que el menor número de toros que satisfacen las condiciones anteriores se obtiene cuando TY es el mínimo común múltiplo de 287, 99 y 891, es decir que el número de toros amarillos sea 891, lo que da 2226 toros blancos, 1602 toros azules y 1580 toros variopintos: 6299 toros. ¡Un rebañito nada despreciable, ¿no?!

¡Ya va! ¡Ya va! Pero no todo queda aquí, porque no hemos metido a las vacas en la cuenta. Y es que el poema sigue:

Las proporciones de las vacas eran éstas: las blancas
eran iguales exactamente a una tercera parte
y un cuarto de todo el rebaño de las azules;
y las azules igualaban a su vez
a un cuarto junto con una quinta parte de las mezcladas
cuando iban a pastar todas con los toros.

¡Ah! O sea que los números de vacas en el rebaño están relacionadas entre sí y también con los números de toros del rebaño, pero por colores. Porque si VB, VA, VY y VV son los números respectivos de vacas, los versos anteriores se pueden traducir en

$$VB = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(VA + TA)$$

y

$$VA = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(VV + TV).$$

Faltan, por supuesto, condiciones sobre las vacas de los rebaños de colores faltantes:

Las variadas tenían igual número divididas en cuatro partes
a una quinta parte y un sexto del rebaño de las amarillas.
Las amarillas eran en número iguales a la mitad de una tercera parte
del rebaño blanco y una séptima parte.

Es decir,

$$VV = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(VY + TY)$$

y

$$VY = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(VB + TB).$$

Y ahora, la primera parte del reto:

Di tú exactamente, ¡oh extranjero!, el número de las reses del Sol,
por un lado el número de los robustos toros
y por otro las vacas según el color de cada una,
y no se te llamará ignorante o imperito en números,

De manera que para ganarse esta distinción, el lector sin olvidar las condiciones que ya había establecido para los números de los toros, estaba obligado a resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} VB &= \frac{7}{12}(VA+TA) \\ VA &= \frac{9}{20}(VV+TV) \\ VV &= \frac{11}{30}(VY+TY) \\ VY &= \frac{13}{42}(VB+TB) \end{aligned}$$

el que, después de un tedioso trabajo, debe conducirlo a

$$VB = \frac{2402120}{1383129}TY; \qquad VA = \frac{543694}{461043}TY;$$

$$VY = \frac{604357}{461043}TY; \qquad VV = \frac{106540}{125739}TY;$$

en donde se ve que la solución depende nuevamente del número de toros amarillos, el cual debe seleccionarse –para obtener la solución en los valores más pequeños– igual al mínimo común múltiplo de 891, 1383129, 461043 y 125739, es decir, 4149387. Sustituyendo este valor en las fórmulas obtenidas anteriormente, se llega a la siguiente tabla contable:

	Toros	Vacas	
Blancos	10366482	7206360	17572842
Azules	7460514	4893246	11953760
Amarillos	4149387	5439213	9588600
Variopintos	7358060	3515820	10873880
	28934443	20854639	49789082

¡Debe haber sido algo extensa la llanura de Trinaquia para poder meter en ella 49789082 reses! (Al margen: el diccionario Larousse afirma que el territorio actual de Sicilia es de 25708 Km^2, es decir, 25708000000 m^2.)

Bueno... de acuerdo al testimonio del propio poema ya no se nos puede llamar "imperitos en números", pero por aquí nos viene algo pues el poema todavía no termina:

pero tampoco se te contará entre los sabios. Pero ven y comprende
todas estas proporciones de las reses del Sol:

¡Una sorpresita! El problema continúa: faltan datos. Pues bien, sigamos:

Cuando los toros blancos mezclaron su número
con los azules, se mantuvieron firmes con igual número
en profundidad y anchura, y todas las largas
llanuras de Trinaquia se llenaron en cuadro.

Entonces es un cuadrado el número total de toros blancos y azules:

$$TB + TA = C^2,$$

condición que no cumple la solución que hemos obtenido hasta ahora. Mas hay que observar que nuestra solución parcial es la mínima para los datos que hasta ese momento teníamos, pero cualquier múltiplo entero fijo de ellas también satisface al problema; así que podemos volver al momento en que sólo nos ocupábamos de los toros, de manera que si H es un número entero, cada uno de los números que obtuvimos en ese momento se puede multiplicar por H y la solución es válida. Con relación a nuestra última ecuación esto significa que

$$2226H + 1602H = C^2,$$

de donde

$$3828H = C^2.$$

Aunque todavía queda por leer en el poema:

Además, cuando los amarillos se reunieron junto con los variados
se dispusieron de manera que empezando desde uno creció su número
hasta formar una figura triangular, y no había
toros de otros colores, ni faltaba ninguno.

El poeta introduce ahora el concepto de número triangular: estos son números que se obtienen sumando los enteros positivos en secuencia

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$$

hasta un número entero determinado. Quizás el lector conozca la fórmula siguiente:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \Delta = \frac{\Delta(\Delta + 1)}{2},$$

por lo cual los versos anteriores matemáticamente se pueden traducir como

$$TY + TV = \frac{\Delta(\Delta + 1)}{2},$$

o, aplicando los comentarios anteriores,

$$4942H = \Delta^2 + \Delta$$

Ahora, para no olvidar que las vacas nos cambiaron el número original de toros que habíamos encontrado, obsérvese que el número de toros de cada color que aparecen en la tabla contable anterior es igual a cada uno de los números originales multiplicados por 4657, el cual es un número primo. Lo que significa que podemos hacer

$$H = 4657h,$$

en donde h es cierto número entero. Además

$$3828 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 = 4 \cdot 957,$$

razón por la cual la ecuación $3828H = C^2$, se transforma en

$$C^2 = 4 \cdot 957 \cdot 4657h.$$

Esto obliga a que h tenga como factores a 957, 4657 y algún otro término cuadrático, es decir

$$h = 957 \cdot 4657y^2.$$

Si todo esto se incorpora a la ecuación $4942H = \Delta^2 + \Delta$, entonces esta se modifica como

$$4942 \cdot 957 \cdot 4657^2y^2 = \Delta^2 + \Delta,$$

o, lo que es lo mismo

$$\Delta^2 + \Delta = 102571605819606y^2.$$

Si esta igualdad la multiplicamos por 4 y completamos el cuadrado, entonces queda como

$$(2\Delta + 1)^2 = 410286423278424y^2 + 1,$$

lo que con la asignación

$$x = 2\Delta + 1$$

se transforma en

$$x^2 - 410286423278424y^2 = 1.$$

Las ecuaciones diofánticas del tipo $x^2 - dy^2 = 1$, donde d debe carecer de cuadrados, se conocen como ecuaciones de Fermat, pues fue este abogado con inclinaciones matemáticas (y de las buenas), quien por primera vez las propuso en 1657. Su solución hace uso de matemática de muy altos quilates y quizá quede para un posterior artículo. De todas formas, dado que en nuestro caso particular, d es un número muy grande, las soluciones mínimas implican números de 206541 cifras.

Queda por lo tanto la duda de si Arquímedes terminó de resolver este problema: tal número de reses no caben en la tierra toda... ni siquiera en toda la extensión del Sol. De manera que entonces, no tenemos más remedio que admitir humildemente nuestra imposibilidad de recibir la distinción que el poema reserva para su final:

Si encuentras todo esto, extranjero, y lo reúnes en tu mente
y das todas las medidas de las cantidades
marcharás con la gloria de la victoria y sabrás
que se te considera perfecto en esta ciencia.

Douglas Jiménez
Departamento de Matemáticas
UNEXPO
Venezuela