Quelques remarques sur les d-webs des surfaces complexes et un problème proposé par D. Cerveau

Ivan Pan

Résumé

On introduit une notion d'intégrale première méromorphe pour les d-webs de surfaces complexes et on démontre une version du théorème de Jouanolou sur l'existence d'intégrale première pour ceux-ci. Comme application on démontre qu'un $d-$web sur le plan projectif dont toutes les feuilles sont algébriques est donné par une famille de courbes algébriques planes de degré d, ce qui a été conjecturé par D. Cerveau.

1 Introduction

Dans l'étude des équations différentielles complexes analytiques il semble être assez naturel de considérer *l'équation différentielle algébrique*

$$F(x, y, y') = 0,$$

où

$$F(x, y, z) := \sum_{i=0}^{d} c_i(x, y) z^{d-i} \in \mathbb{C}[x, y, z]$$

est un polynôme irréductible avec $d > 0$. L'étude des équations différentielles algébriques a été assez développée au début du vingtième siècle par des mathématiciens comme Fuchs, Poincaré, Malmquist, Painlevé et d'autres : voir par exemple [7], où on clarifie certains des travaux classiques et on fait un premier exposé assez complet sur le sujet.

Dès les premiers exemples on s'aperçoit qu'en général on ne pourra pas se restreindre à considérer des solutions *explicites* $y = y(x)$, à cause des ramifications ; en fait, pour l'équation différentielle

$$2y'y - 1 = 0, \tag{1}$$

qui n'a que degré 1 en y' (c'est-à-dire, le cas plus facil), on aimerais pouvoir dire que $y = \sqrt{x}$ est une solution de (1) au voisinage de 0, qui est un point de ramification de la fonction “multiforme” associée à l'équation algébrique $y^2 = x$. Il semble plus raisonable donc de travailler avec des solutions paramétrées

$$x = x(t), y = y(t)$$

à reparamétrisation près ; dans le cas de l'équation (1) on peut, par exemple, prendre

$$x(t) = t^2, y(t) = t$$

pour décrire la solution dont on y fait référence. Dans cet exemple la ramification apparaît à cause du fait qu'on a pente infinie en 0 ; dans le cas plus général, où on a degré en y' plus grand que 1, la dérivée y' est déjà ramifiée par rapport aux autres variables (pour plus de détails voir [7], [8]).

Dans ce sens il est alors naturel d'étudier l'équation différentielle

$$c_0(x, y)dy^d + c_1(x, y)dxdy^{d-1} + \cdots c_d(x, y)dx^d = 0. \tag{2}$$

Pour un point générique de $p \in \mathbb{C}^2$ il existe d solutions de l'équation (2) dont leurs images sont des courbes analytiques transverses deux à deux en p. De la même façon que, lorsque $d = 1$, cette équation nous amène à la notion de feuilletage, dans le cas général on est conduit à considérer un concept nouveau que, suivant [3], on appelera *web de degré* d ou d-*web*.

Dominique Cerveau introduit dans [3] la notion de d-web sur une surface complexe arbitraire et propose comme problème (entre autres) de démontrer que tout d-web sur $\mathbb{P}^2$ dont toutes les feuilles sont algébriques est donné par une famille de courbes

$$a_0(x, y)u^d + a_1(x, y)tu^{d-1} + \cdots a_d(x, y)t^d = 0, [t, u] \in \mathbb{P}^1.$$

Le but principal de ce travail est d'introduire une notion d'intégrale première méromorphe pour un d-web sur une surface complexe compacte arbitraire et de démontrer une version pour les webs du théorème de Jouanolou sur l'existence d'intégrale première (théorème 4.1) ; comme corollaire on résoud le problème ci-dessus (corollaire 4.1).

Notre approche repose sur les idées dévelloppées dans [8, chap. II] pour les équations différentielles polynomiales sur $\mathbb{C}^2$. Plus precisément, on se donne un d-web $\mathcal{W}$ sur une surface complexe connexe X. On lui associe de manière canonique une surface analytique (pas forcément lisse) $S_{\mathcal{W}}$, contenu dans l'espace total du fibré projectif $p : \mathbb{P} \to X$ associé au fibré tangent de X, en sorte que $\pi := p|_{S_{\mathcal{W}}} : S_{\mathcal{W}} \to X$ soit propre surjective de degré d ; on caractérise les surfaces qui proviennent de cette construction. Puis on associe sur toute désingularisation de $S_{\mathcal{W}}$ un feuilletage $\mathcal{F}$ dont les feuilles “génériques” correspondent aux feuilles “génériques” de $\mathcal{W}$. Finalement on introduit une notion d'intégrale première méromorphe pour $\mathcal{W}$ qui correspond avec la notion analogue pour $\mathcal{F}$.

J'aimerais remercier Marcos Sebastiani par les nombreuses discussions et ses precieuses suggestions.

2 Généralités

Si Z est un espace analytique, on désigne par $\mathcal{O}_Z$ le faisceau des fonctions holomorphes sur Z. On appèle *surface analytique* un espace analytique de dimension pure 2. Une *variété complexe* (en particulier une surface) est un espace analytique lisse.

Soit X une surface complexe connexe avec fibré tangent T_X ; notons T^d la puissance symétrique $d-$ième du fibré cotangent $\mathrm{T}_{\mathrm{X}}^{\vee} := Hom(T_X, \mathbb{C})$ et $\mathcal{D}is \subset T^d$ l'hypersurface discriminante, c'est-à-dire, l'ensemble des points des fibres $\mathrm{Sym}^d(\mathrm{T}_{\mathrm{X},x}^{\vee})$ $(x \in X)$ constitué des polynômes (homogènes) avec solutions multiples.

Définition 2.1 *Un $d-$web $\mathcal{W}$ sur X est la donnée d'un recouvrement $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i\in I}$ par des ouverts munis de sections $\omega_i \in H^0(U_i, T^d)$ avec de zéros isolés, telle que :*

a) l'image de w_i n'est pas contenue dans $\mathcal{D}is$

b) $w_i|_{U_i\cap U_j} = g_{ij}\, w_j|_{U_i\cap U_j}$, où $g_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$. L'ensemble singulier $\mathrm{Sing}\,\mathcal{W}$ *et l'ensemble de zéros* $\mathrm{Zero}\,\mathcal{W}$ *de $\mathcal{W}$ sont les ensembles analytiques définis respectivement par*

$$U_i \cap \mathrm{Sing}\,\mathcal{W} = w_i^{-1}(\mathcal{D}is), U_i \cap \mathrm{Zero}\,\mathcal{W} = \{w_i = 0\}.$$

Si $\mathrm{Sing}\,\mathcal{W} = \emptyset$ *on dit que le web $\mathcal{W}$ est régulier.*

Observons que $\mathrm{Sing}\,\mathcal{W}$ est un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 1 tandis que $\mathrm{Zero}\,\mathcal{W}$ est un sous-ensemble discret de $\mathrm{Sing}\,\mathcal{W}$.

Remarque 2.1 *Comme dans [3, Def. 4] on peut définir un web sans la restriction de considérer des sections $\omega_i \in H^0(U_i, T^d)$ avec des zéros isolés. Puisque l'ensemble $Z_i := \{w_i = 0\}$ est analytique, quitte à retrécir les U_i on peut supposer qu'au voisinage d'un point où Z_i a codimension 1, il est défini par une équation analytique $f_i = 0$; alors il existe $l \geq 1$ tel que $(1/f_i^l)w_i$ est encore une section locale de T^d qui n'a que des zéros isolés dans le voisinage considéré.*

Une *feuille locale* d'un web $\mathcal{W}$ comme dans la définition 2.1 est l'image d'une application holomorphe

$$\epsilon : D \to X - \mathrm{Sing}\,\mathcal{W}$$

où $D \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert telle que

$$w_i(d\epsilon(t)) = 0,\ \forall\ t \in \epsilon^{-1}(U_i), \forall\ i \in I.$$

Une *feuille globale* d'un web est définie comme la réunion maximale de feuilles locales obtenue par continuation analytique.

Exemple 2.1 *Soit w une section méromorphe globale de T^d. Si $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement (par des ouverts) convenable de X, il existe des fonctions méromorphes $f_i : U_i - - \succ \mathbb{C}$ dans U_i telles que les sections locales*

$$w_i := f_i w$$

sont holomorphes, i.e. $w_i \in H^0(U_i, T^d)$, et possèdent des zéros isolés. Ceci définit donc un $d-$web sur X : c'est le d-web associé à *w.*

Exemple 2.2 *Les 1-webs sur une surface X sont les feuilletages à singularités isolées sur X.*

La famille de fonctions $\{g_{ij}\}$ de la définition 2.1 définit un 1-cocycle du recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$; se donner un $d-$web revient donc à se donner un homomorphisme de fibrés

$$\varphi : L \longrightarrow T^d$$

dont l'image n'est pas contenue dans $\mathcal{D}is$, avec L le fibré en droites associé au 1-cocycle. Il est donc claire qu'un autre homomorphisme $\varphi' : L \to T^d$ définit le même $d-$web (c'est-à-dire la même structure de feuilles) s'il existe $g : X \to \mathbb{C}^*$ holomorphe telle que

$$\varphi|L_x = g(x)\varphi'|L_x, \forall x \in X;$$

en particulier, si X est compacte g est constante. On notera aussi $\mathcal{W} = (L, \varphi)$.

Notons $p : \mathbb{P}(\mathrm{T_X}) \to X$ le fibré en droites projectives sur X associé au fibré tangent de X. On va maintenant associer, à tout web $\mathcal{W}$, une surface analytique (en général ni lisse ni irréductible) $S_{\mathcal{W}} \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathrm{T_X})$ et on va construire un morphisme (en fait injectif) de fibrés sur $\mathbb{P}$

$$\mu : N \longrightarrow T_{\mathbb{P}}^{\vee}, \tag{3}$$

avec N de rang 1, en sorte que :

(i) au-dessus de $X - \operatorname{Sing}\mathcal{W}$, la restriction π de p à $S := S_{\mathcal{W}}$ est un revêtement (non-ramifié) d'ordre d ;

(ii) comme on verra dans le lemme 2.1, μ se restreint sur S pour définir un feuilletage $\mathcal{F}$ sur (la partie non-singulier de) S ;

(iii) π envoie les feuilles de $\mathcal{F}$ dans des feuilles de $\mathcal{W}$.

Pour définir la surface S prenons des sections locales $\lambda_i \in H^0(U_i, L)$. On observe qu'en-dehors de $\operatorname{Zero}\mathcal{W} \cap U_i$ le vecteur $\varphi(\lambda_i(x)) \in \operatorname{Sym}^d(\mathrm{T}^{\vee}_{\mathrm{X},x})$ est un polynôme homogène en deux variables qui sont des générateurs de $\mathrm{T}^{\vee}_{\mathrm{X}x}$; il définit donc un idéal homogène dans l'algèbre symétrique $\operatorname{Sym}(\mathrm{T}^{\vee}_{\mathrm{X},x})$ qui varie de manière holomorphe avec x ; l'ensemble des zéros d'un tel polynôme est constitué des droites par l'origine dans $\mathrm{T}_{\mathrm{X},x}$. Considerons les surfaces (locales) $S_i \subset p^{-1}(U_i) \subset \mathbb{P}$ définies comme l'adhérence de l'ensemble analytique défini par la restriction de $\varphi(\lambda_i)$ à $U_i - \mathrm{Zero}\,\mathcal{W}$, pour chaque $i \in I$. Puisque les sections qui définissent S_i et S_j diffèrent, lorsque $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, par le cocycle g_{ij}, ces (germes de) surfaces se recollent pour donner la surface analytique cherchée.

De manière plus explicite on peut réaliser $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathrm{T_X})$ en recollant, pour tout $i, j \in I$, les pièces locales $U_i \times \mathbb{P}^1_i$ et $U_j \times \mathbb{P}^1_j$ par les isomorphismes

$$\psi_{ij} \times A_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^1_i \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^1_j, \tag{4}$$

où ψ_{ij} est l'homéomorphisme holomorphe du changement de variables sur $U_i \cap U_j$ et A_{ij} est la matrice jacobienne de ψ_{ij}, qui opère sur $\mathbb{P}^1_i$ comme l'application

$$[t_i, u_i] \mapsto [A_{ij}(t_i, u_i)].$$

Plus précisément, notons x_i, y_i des coordonnées locales sur U_i pour $i \in I$; on a

$$dx_i = a_{ij} dx_j + b_{ij} dy_j,\ dy_i = c_{ij} dx_j + e_{ij} dy_j.$$

La matrice A_{ij} est l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & e_{ij} \end{pmatrix}.$$

Si on écrit

$$\varphi(\lambda_i(x_i, y_i)) = \sum_{i=0}^{d} a_i(x_i, y_i) dx^i dy^{d-i},$$

la surface S_i est définie dans $U_i \times \mathbb{P}^1_i$ par l'équation

$$\{\sum_{i=0}^{d} a_i(x_i, y_i) t^i u^{d-i} = 0\}.$$

Pour définir le morphisme μ on procède en deux étapes :

(a) Considérons les 1-formes locales sur $U_i \times \mathbb{C}^2_i$

$$\eta_i := t_i dy_i - u_i dx_i, i \in I.$$

Lors de l'identification par les isomorphismes de l'équation (4), on obtient

$$\eta_i = \det(A_{ij}^{-1}) \eta_j,$$

ce qui définit un homomorphisme

$$r^* \mathrm{T_X} \longrightarrow \mathrm{T}^{\vee}_{\mathrm{T_X}},$$

où $r : \mathrm{T_X} \to X$ est l'application du fibré.

(b) Considérons les 1-formes

$$\nu_i := \frac{1}{t_i}\eta_i, \ \nu_i' := \frac{1}{u_i}\eta_i$$

sur les ouverts de $U_i \times \mathbb{P}^1_i$ définis respectivement par $t_i \neq 0$ et $u_i \neq 0$. On a

$$\nu_i = \frac{u_i}{t_i}\nu_i';$$

cela définit un homomorphisme

$$q_i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \longrightarrow \mathrm{T}^\vee_{U_i\times\mathbb{P}^1_i}$$

où $q : U_i \times \mathbb{P}^1_i \longrightarrow \mathbb{P}^1_i$ désigne la projection canonique.

Si on rappèle que $q_i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) = \mathcal{O}_{U_i\times\mathbb{P}^1_i}(-1)$, en mettant ensemble les renseignements de a) et b) on en déduit l'homomorphisme voulu ; puisque toutes les 1-formes ν_i, ν_i' sont jamais nulles, μ est injectif.

Remarque 2.2 *Si $\mathcal{W}$ est régulier $S_{\mathcal{W}}$ est lisse et $\pi : S_{\mathcal{W}} \to X$ est un revêtement d'ordre d.*

Soit V une surface projective avec ensemble singulier Σ. Une *désingularisation* de V est un morphisme birationnel (propre) $\pi : W \to V$, où W est lisse, qui induit un isomorphisme par restriction

$$W\backslash\pi^{-1}(\Sigma) \xrightarrow{\pi|} V\backslash\Sigma \ .$$

Un théorème celèbre dû à H. Hironaka montre qu'il existe toujours une désingularisation, même pour le cas de dimension plus grande que 2. Pour une démonstration plus ou moins élémentaire, mais valable uniquement dans le cas de surfaces, on peut regarder [1, chap. III, §6], où on trouvera aussi une bonne bibliographie sur ce sujet.

Proposition 2.1 *Soit $\mathcal{W}$ un $d-$web sur X avec surface associée S. Désignons par $\sigma : Y \to S$ une désingularisation de S. Alors, il existe un morphisme propre $\pi_Y : Y \to X$ génériquement fini de degré d, un feuilletage $\mathcal{F}$ sur X et un ouvert $U \subset X$ tels que*

a) $\mathrm{Sing}\,\mathcal{W} \cap U = \mathrm{Sing}\,\mathcal{F} \cap \pi_Y^{-1}(U) = \emptyset$ *;*

b) $\pi_Y : \pi_Y^{-1}(U) \to U$ est un revêtement (non-ramifié) de degré d ;

c) π_Y envoie les feuilles de $\mathcal{F}|_{\pi_Y(U)}$ dans des feuilles de $\mathcal{W}|_U$.

Démonstration: L'homomorphisme de (3) est défini par spécification d'un récouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, une famille de sections $\xi_i \in H^0(U_i, T^\vee_{\mathbb{P}})$ pour chaque $i \in I$ et un cocycle $\{h_{ij}\}_{i,j\in I}$ définisant le fibré en droites N, tels que

$$\xi_i = h_{ij}\xi_j.$$

Donc

$$\sigma_Y^*(\xi_i) = (h_{ij} \circ \pi_Y)\sigma_Y^*(\xi_j);$$

ceci définit un homomorphisme $N_Y \to \mathrm{T}_Y^\vee$ qui correspond à un feuilletage sur Y.

L'assertion en suit aussitôt : on choisit $U := X - \pi_Y^{-1}(\operatorname{Sing}\mathcal{W})$ et on utilise la remarque 2.2. $\square$

Remarque 2.3 *Dans* $\operatorname{Sing}\mathcal{W}$ *on trouve trois types de points : les points de* $\operatorname{Zero}\mathcal{W}$ *au-dessus desquels S contient une fibre de $\mathbb{P}$, les points au-dessus desquels S est singulière et les points au-dessus desquels S n'est pas singulier mais π ramifie, le premier ensemble pouvant intersecter le deuxième ; en particulier, si $d > 1$ l'ensemble* $\operatorname{Sing}\mathcal{W}$ *est ou bien vide ou bien il est un sous-ensemble analytique réduit de dimension pure 1. Observons que ces trois ensembles sont analytiques et stratifient donc* $\operatorname{Sing}\mathcal{W}$*.*

Soit $\mathcal{W} = (L, \varphi)$ un web sur X. Si X est projective, L possède une section méromorphe globale qui, via φ, définit une section méromorphe w de T^d sur $X - \operatorname{Zero}\mathcal{W}$. Puisque $\operatorname{Zero}\mathcal{W}$ est discret w se prolonge à X tout entier (voir [5, K,thm. 7]) ; comme dans l'exemple 2.1, cette section définit aussi $\mathcal{W}$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Soit $\mathcal{W}$ un $d-$web sur une surface complexe projective X. Il existe une section globale méromorphe de T^d qui définit $\mathcal{W}$. En particulier si $X = \mathbb{P}^2$ le web est polynomial, autrement dit, il est défini (sur $\mathbb{C}^2$) par une équation différentielle polynomiale $F(x, y, y') = 0$ avec $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$.*

Démonstration: Pour le cas où $X = \mathbb{P}^2$ il suffit de rappeler que toute fonction méromorphe est rationnelle. $\square$

Exemple 2.3 *Tout web sur $\mathbb{P}^2$ est polynomiale mais pas à feuilles algébriques : le 2-web défini par*

$$x^4 dy^2 + (y^2 - 1)dx^2 = 0,$$

possède la feuille obtenue comme l'image de $t \mapsto (t, \sin(1/t))$.

3 Les d-webs produit

Considérons une famille de webs $\{(L_i, \varphi_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ sur X. Si (L_i, φ_i) est un d_i-web, l'application naturelle

$$L_1 \otimes \cdots \otimes L_r \longrightarrow T^{d_1 + \cdots + d_r},$$

donnée par

$$\varphi : \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r \mapsto \varphi_1(\lambda_1) \cdots \varphi_r(\lambda_r),$$

définit un $(d_1 + \cdots + d_r)$-web sur X si et seulement si $im\,\varphi \not\subset \mathcal{D}is$: c'est le *web produit* de cette famille ; on note aussi $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_r$.

Définition 3.1 *Soit $\mathcal{W} = (L, \varphi)$ un d-web sur X. On dit que $\mathcal{W}$ est un web produit s'il existe une famille de webs $\{(L_i, \varphi_i)\}_{1\leq i\leq r}$ telle que $\mathcal{W}$ est le web produit de cette famille ; autrement dit, s'il existe un isomorphisme $\psi : \bigotimes_{i=1}^r L_i \to L$ tel que $\varphi \circ \psi = \varphi_1 \cdots \varphi_r$. On dit aussi que $\mathcal{W}_i := (L_i, \varphi_i)$ est un facteur de $\mathcal{W}$ de degré d_i et on écrit $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cdots \mathcal{W}_r$.*

Si $g : Z --\!\!\!\to Y$ est une application méromorphe dominante entre espaces analytiques de même dimension avec Y irréductible, on note deg g le cardinal d'une fibre générique.

Si V est un espace analytique irréductible, $\mathbb{C}[V]$ et $\mathbb{C}(V)$ dénotent respectivement, l'anneau des fonctions holomorphes et le corps des fonctions méromorphes sur V.

Lemme 3.1 *Soit $S \subset \mathbb{P}(\mathrm{T_X})$ une surface irréductible. Alors S est la surface associée à un d-web sur X si et seulement si $p|_S : S \to X$ est propre surjective de degré d. En particulier les feuilletages réguliers sur X correspondent aux sections de $\mathbb{P}(\mathrm{T_X})$.*

Démonstration: L'assertion directe suit de la construction de $S_{\mathcal{W}}$ faite au paragraphe précédent. Pour démontrer l'assertion réciproque supposons d'abord $\mathbb{P}(\mathrm{T_X}) = X \times \mathbb{P}^1$.

Soit $q \in S$ tel que $p^{-1}(p(q)) \not\subset S$. Par le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un voisinage ouvert V_q de q dans $X \times \mathbb{P}^1$ et un polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[V_q]$ de la forme

$$G_q(x,y,t,u) = \sum_i a_i(x,y)t^i u^{d-i},$$

tels que

$$S \cap V_q = \{G(x,y,t,u) = 0\},$$

où x, y sont des coordonnées sur l'ouvert $U_q := p(V_q)$. On définit des sections locales $w_q \in H^0(U_q, T^d)$ par

$$w_q = \sum_i a_i(x,y)dx^i dy^{d-i}.$$

Cette section définit bien un d-web sur U_q car $\{w_q = 0\}$ est discret : en effet, autrement S contiendrait une composante qui serait collapsée par p.

Supposons qu'on ait

$$S \cap V_{q'} = \{G'(x', y', t, u) = 0\}$$

pour un autre ouvert $V_{q'}$ avec $V_q \cap V_{q'} \neq \emptyset$ où x', y' sont des coordonnées sur $U_{q'} := p(V_{q'})$. Puisque G_q est irréductible, de la Nullstellensatz suit que

$$G_{q'}(x'(x,y), y'(x,y), t, u) = \alpha_{qq'}(x,y,t,u)G_q(x,y,t,u),$$

avec $\alpha_{qq'}$ ne s'annulant pas sur $V_q \cap V_{q'} \neq \emptyset$; on observe que $\alpha_{qq'}$ est défini dans $p^{-1}(U_q \cap U_{q'})$ car G_q et $G'_{q'}$ le sont. Puisque les fibres de p sont compactes,

$$\alpha_{qq'}(x, y, t, u) = \overline{\alpha}_{qq'}(x, y),$$

avec $\overline{\alpha}_{qq'} \in \mathcal{O}_X(p^{-1}(U_q \cap U_{q'}))^*$. On en déduit un $d-$web (L, φ) défini sur le complementaire $U \subset X$ de l'ensemble

$$\{x \in X : p^{-1}(x) \subset S\}.$$

Comme cet ensemble est discret, par le théorème d'extension de Levi ([1, chap. I, thm. (8.6)] ou [4, thm. II, pag. 396]) ce web se prolonge à X tout entier et le résultat est démontré dans ce cas.

Dans le cas général, on regarde $\mathbb{P}(\mathrm{T_X})$ comme recollement des $U_i \times \mathbb{P}^1_i$. Sur chaque $U_i \times \mathbb{P}^1_i$ on sait construire un $d-$web. Avec des téchniques pareilles on montre que ces $d-$webs "locaux" se recollent pour donner le d-web cherché. □

Proposition 3.1 *Soit $\mathcal{W} = (L, \varphi)$ un $d-$web sur X ; notons $S_{\mathcal{W}}$ la surface analytique associée. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $S_{\mathcal{W}}$ possède une décomposition en composantes irréductibles

$$S_{\mathcal{W}} = S^1 \cup \cdots \cup S^r$$

avec $d_i := \deg\, \pi|_{S^i}$;

b) $\mathcal{W}$ est un d-web produit de r d_i-webs $\mathcal{W}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ tels que $d = \sum_i d_i$ et $S^i := S_{\mathcal{W}_i}$ irréductible pour $i = 1, \ldots, r$.

Démonstration: Par le lemme 3.1 il suffit de démontrer que $b)$ implique $a)$.

Chaque $\mathcal{W}_i$ définit une surface $S_{\mathcal{W}_i} \subset \mathbb{P}(\mathrm{T_X})$ et par construction $S_{\mathcal{W}} = \cup S_{\mathcal{W}_i}$. Puisque $im(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \not\subset \mathcal{D}is$, la réunion des $S_{\mathcal{W}_i}$ est irrédondante, d'où l'assertion. □

Les idées développées dans ce paragraphe motivent la définition suivante.

Définition 3.2 *Un d-web est irréductible s'il ne possède pas un facteur de degré plus petit que d.*

4 Intégrales premières méromorphes

Par la suite X est une surface complexe connexe et compacte ; en particulier la surface analytique associée S est aussi compacte, car $\pi = p|S$ est propre.

Soit $\pi : Z \to X$ un morphisme holomorphe propre et surjectif entre surfaces analytiques connexes et compactes. Si $\theta \in \mathbb{C}(Z)$ on note $\deg\, \theta$ le degré de θ sur $\mathbb{C}(X)$.

Lemme 4.1 *Soient $\pi : Y \to X$ un morphisme propre surjectif entre surfaces analytiques irréductibles avec X lisse et $\theta \in \mathbb{C}(Y)$ une fonction méromorphe non-constante sur Y ; notons l le degré de θ sur $\mathbb{C}(X)$. Alors, il existe un l-web $\mathcal{W}_\theta$ sur X et une application méromorphe $f : Y \dashrightarrow X \times \mathbb{P}^1$ tels que*

a) le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "pr_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

est commutatif, où pr_1 est la projection sur le premier facteur ; en particulier $\deg \pi = l \deg(\ f : Y \dashrightarrow f(Y)\ )$.

c) si $pr_2 : X \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est la projection canonique, alors il existe un sous-ensemble analytique strict $\Delta \subset X$ tel que la famille des feuilles de $\mathcal{W}_\theta$ dans $X - \Delta$ est precisément celle des composantes connexes des éléments de la famille

$$\{pr_1\left(pr_2^{-1}(z) \cap f(Y)\right) \cap (X - \Delta) : z \in \mathbb{P}^1\}.$$

Démonstration: Le morphisme π induit l'extension finie de corps

$$\mathbb{C}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}(Y),$$

où l'inclusion est définie par $\nu \mapsto \nu \circ \pi$.

On a une équation de dependence entière minimale de la forme

$$\theta^l + \nu_1 \theta^{l-1} + \cdots + \nu_l = 0, \tag{5}$$

avec $\nu_i \in \mathbb{C}(X)$ pour tout i.

On définit l'application méromorphe $f : Y \dashrightarrow X \times \mathbb{P}^1$ par

$$y \mapsto (\pi(y), \theta(y)).$$

Notons $U \subset X$ le complementaire de la rúnion des ensembles des pôles des ν_i. La surface analytique $S = f(Y) \subset X \times \mathbb{P}^1$ est l'adhérence de l'ensemble

$$\{(x, u) \in U \times \mathbb{C} : u^l + \nu_1(x) u^{l-1} + \cdots + \nu_l(x) = 0\} \subset X \times \mathbb{P}^1;$$

notons $\Delta \subset X$ le sosu-ensemble analytique sur lequel la restriction à S de la projection canonique $X \times \mathbb{P}^1 \to X$ n'est pas un revetêment non-ramifié.

Pour définir $\mathcal{W}_\theta$ on observe que pour tout point $x_0 \in X - \Delta$ l'équation

$$u^l + \nu_1(x) u^{l-1} + \cdots + \nu_l(x) = 0$$

définit l-courbes analytiques transverses deux à deux en x_0 et correspondent donc aux feuilles d'un l-web. □

Remarque 4.1 *Si $l = 1$ alors $\theta = \nu \circ \pi$ pour $\nu \in \mathbb{C}(X)$ et S est le graphe de θ : dans ce cas $\mathcal{W}_\theta$ est le feuilletage défini par $\nu = cte$.*

Définition 4.1 *Soit $\mathcal{W}$ un web sur X. On dit que $\mathcal{W}$ possède une intégrale première méromorphe si pour chaque facteur irréductible $\mathcal{W}'$ de $\mathcal{W}$ il existe un polynôme $P = P_{\mathcal{W}'} \in \mathbb{C}(X)[u]$ tel qu'en-déhors d'un sous-ensemble analytique $\Delta = \Delta_P \subset X$ toute composante connexe de la courbe analytique $\{P = u_0\}$ est une feuille de $\mathcal{W}'$ pour u_0 générique dans $\mathbb{C}$. Le produit des polynômes $P_{\mathcal{W}'}$ avec $\mathcal{W}'$ un facteur de $\mathcal{W}$, est appelé une intégrale première méromorphe pour $\mathcal{W}$.*

On observe que dans la situation du lemme 4.1 le polynôme

$$P = u^l + \nu_1 u^{l-1} + \cdots + \nu_l$$

est une intégrale première méromorphe pour $\mathcal{W}_\theta$.

Soit $\mathcal{W}$ un web sur X et $\sigma : Y \to S_{\mathcal{W}}$ une désingularisation de $S_{\mathcal{W}}$. Comme dans la proposition 2.1 on peut associer à $\mathcal{W}$ un feuilletage $\mathcal{F}$. On a

Lemme 4.2 *Supposons que la restriction de $\mathcal{F}$ à chaque composante connexe de Y possède une intégrale première méromorphe. Alors $\mathcal{W}$ possède une intégrale première méromorphe.*

Démonstration: Sans perte de généralité on peut supposer $\mathcal{W}$ irréductible ; donc Y l'est aussi. Soit $\theta \in \mathbb{C}(Y)$ une intégrale première méromorphe pour $\mathcal{F}$.

Choisissons un ouvert $U \subset X$ tel que sur $\pi^{-1}(U)$ le morphisme π est un revêtement et l'application $f = \pi \times \theta$ (lemme 4.1b) est bien définie. Prenons une feuille C de $\mathcal{W}_\theta|_U$; il existe $z \in \mathbb{P}^1$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \cap f^{-1}(C \times \{z\}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & C \times \{z\} \arrow[dl, "pr_1"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

commute.

On en déduit que C est une feuille de $\mathcal{W}$ si et seulement si θ est constante sur chaque composante connexe de $\pi^{-1}(C)$ contenue dans $f^{-1}(C \times \{z\})$; l'assertion suit de la proposition 2.1 et le lemme 4.1c. $\square$

Théorème 4.1 *Soit $\mathcal{W}$ un $d-$web irréductible sur X qui possède un nombre infini de feuilles analytiques. Alors il possède une intégrale première méromorphe.*

Démonstration: Soient $\pi = \pi_Y : Y \to X$, $U \subset X$ et $\mathcal{F}$ comme dans la proposition 2.1. Par le lemme ci-dessus, il suffit de montrer que la restriction de $\mathcal{F}$ à Y possède une intégrale prémière méromorphe.

Observons qu'une feuille de $\mathcal{W}|_U$ définit, par continuation analytique par rapport au revetêment $\pi|_U : \pi^{-1}(U) \to U$, une feuille analytique de $\mathcal{F}$: en effet, si $C \subset X$ est une feuille de $\mathcal{W}$ qui touche U, l'une des composantes de $\pi^{-1}(C)$ définit une feuille de $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ possède un numbre infini de feuilles analytiques. Par un théorème de Jouanolou ([6], [2, chap. 6, thm. 1]) $\mathcal{F}$ possède alors une intégrale première méromorphe, ce qui complète la preuve. □

Corollaire 4.1 *Soit $\mathcal{W}$ un $d-$web sur $\mathbb{P}^2$ dont toutes les feuilles sont algébriques. Alors $\mathcal{W}$ est (polynomial et) donné par une famille de courbes paramétrée par $[t,u] \in \mathbb{P}^1$:*

$$a_0(x,y)u^d + a_1(x,y)tu^{d-1} + \cdots a_d(x,y)t^d = 0.$$

Démonstration: Sans perte de généralité on peut supposer que $\mathcal{W}$ est irréductible.

En tenant compte du lemme 4.1 il suit (de la proposition 2.2 et) du théorème 4.1 que $\mathcal{W}$ possède une intégrale première méromorphe de la forme

$$P(x,y,u) = \sum_{k=0}^{l} a_k(x,y)u^{l-k},$$

avec $a_k \in \mathbb{C}[x,y]$ pour $k = 0,\ldots,l$ où l divise d; puisque la famille de courbes algébriques

$$P(x,y,u_0) = 0,\ u_0 \in \mathbb{C}$$

définit un l-web, on en déduit $l = d$: en effet, le l-web défini par l'intégrale première ci-dessus factorise $\mathcal{W}$ et l'assertion suit de l'irréductibilité de celui-ci. □

Références

[1] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces,* Springer Verlag, 1984.

[2] M. Brunella, *Birational Geometry of Foliation*, First latin Americam Congress of Mathematicians, Impa, 2000.

[3] D. Cerveau, *Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés*, Astérisque N. 222, p. 49-92, 1994.

[4] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, 1978.

[5] R.C Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, vol II* Wadsworth and Brooks/Cole, 1990.

[6] J.P. Jouanolou, *Hypersurfaces solution d'une équation de Pfaff analytique*, Math. Annal. 232 (1978) 239-245.

[7] E.L. Ince, *Ordinary differential equations,* Dover, 1926.

[8] I. Pan, M. Sebastiani, *Les équations difféfentielles algébriques et les singularités mobiles*, Publicações Matemáticas, IMPA, 2001.

IVAN PAN
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UFRGS
AV. BENTO GONÇALVES 9500
91540-000 PORTO ALEGRE, RS, BRASIL
pan@mat.ufrgs.br