Formes quadratiques, algèbres à division et extensions multiquadratiques inséparables

Pasquale Mammone Remo Moresi*

Abstract

On établit quelques résultats concernant le comportement des formes quadratiques sur un corps de caractéristique 2 relativement à une extension purement inséparable de hauteur 1.

0 Introduction

Dans cette note on suppose que le lecteur est familiarisé avec les notions de base de la théorie des formes quadratiques sur un corps arbitraire. Pour une introduction on pourra consulter e. g. [B1], [Sch], [S], [M-H].

Soit donc k un corps, $Wq(k)$ le groupe de Witt des formes quadratiques non-singulières sur k et $W(k)$ l'anneau de Witt des formes bilinéaires non-singulières sur k. On sait que $Wq(k)$ est un module sur $W(k)$ (cf. [S]).

Si $\iota : k \to K$ est une extension, alors il existe fonctoriellement des morphismes $\iota_q^* : Wq(k) \to Wq(K)$ et $\iota^* : W(k) \to W(K)$. Un des problèmes bien connus de la théorie est la détermination du noyau de ces morphismes (cf. e. g. [K-S, problem 4, p. 3]).

*Soutenu par FNSRS 20-27960.89
Received by the editors June 1994
Communicated by J. Van Geel
AMS Mathematics Subject Classification : 12, 16, 20.
Keywords : Quadratic forms, Field extensions, Witt group(ring), Division algebras.

Pour des corps k de caractéristique $\neq 2$ et K une extension biquadratique de k (i.e. $K = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$, $a, b \in k$) on a l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\iota^*) = \langle 1, a\rangle W(k) + \langle 1, b\rangle W(k) \tag{1}$$

(cf. [E-L-W, Th. 2.10, p. 137]). Ce résultat ne se laisse pas généraliser aux extensions triquadratiques (cf. [E-L-T-W, §5, p. 1142]).

Si d'autre part $\mathrm{char}(k) = 2$ et $K = k(\wp^{-1}(a), \wp^{-1}(b))$ ($\wp(x) := x^2 - x \forall x \in K$) est une extension biquadratique séparable, alors on a

$$\mathrm{Ker}(\iota_q^*) = W(k)[1, a] + W(k)[1, b] \tag{2}$$

(cf. [B1, Cor. 4.16, p. 128]).

De façon analogue à [E-L-T-W] on montre d'abord que (2) ne s'étend pas aux extensions triquadratiques séparables. Ceci est rendu possible par une construction de Rowen [R, §3] qui établit l'existence d'une 2-algèbre à involution neutralisée par une extension triquadratique séparable, mais non isomorphe à un produit de trois algèbres de quaternions.

Ensuite on étudie le même problème pour des extensions purement inséparables d'un corps k de caractéristique 2: Si $K = k(\sqrt{a})$ il est bien connu (cf. [B2, Lemma 4.3, p. 182]) que

$$\mathrm{Ker}(\iota_q^*) = \langle 1, a\rangle Wq(k). \tag{3}$$

Ici nous montrons (cf. Th. 3) que ce résultat se généralise aux extensions biquadratiques $K = k(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2})$:

$$\mathrm{Ker}(\iota_q^*) = \langle 1, a_1\rangle Wq(k) + \langle 1, a_2\rangle Wq(k) \tag{4}$$

et aussi aux extensions multiquadratiques $K = k(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$, $n \geq 1$:

$$\mathrm{Ker}(\iota_q^*) = \langle 1, a_1\rangle Wq(k) + \ldots + \langle 1, a_n\rangle Wq(k) \tag{5}$$

si on suppose que $I^2 Wq(k) = 0$.
Des exemples importants de corps vérifiant cette hypothèse sont donnés par la classe des corps liés.

Une des propriétés importantes des extensions quadratiques purement inséparables est l'excellence: (i.e. le noyau anisotrope de chaque forme quadratique sur K provient, par extension des scalaires, d'une forme sur k). Ceci permet de démontrer deux résultats techniques par eux-mêmes intéressants, concernant soit les formes quadratiques sur k, soit les algèbres à involution sur k (voir Th. 1 et Th. 2). On donne ensuite une autre généralisation de (3), concernant les formes bilinéaires de Pfister arbitraires (voir Th. 4). On termine avec deux résultats qui sont reliés à un théorème d'Albert et donnent des informations sur la structure des algèbres à divisions contenant une grande extension purement inséparable.

Dans le cours du travail on va employer les notations suivantes: Soit k un corps de caractéristique 2. $\wp(k) := \{x^2 + x | x \in k\}$. Pour $a, b, a_1, \ldots, a_n \in k$, $[a, b]$ sera la forme quadratique $aX^2 + XY + bY^2$, tandis que $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ sera la forme bilinéaire $a_1X_1^2 + \ldots + a_nX_n^2$ sur k. Si $a \neq 0$, $(a, b]$ sera l'algèbre de quaternions engendré par i, j avec les relations $i^2 + i = b$; $j^2 = a$ et $ji = ij + j$. Un 2-*symbole* est la classe d'une algèbre de quaternions dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$ de k.

Pour q une forme quadratique non-singulière sur k, $D_k(q)$ sera l'ensemble des éléments non nuls représentés par q sur k; q_{an} sera le *noyau anisotrope* de q et $\Delta(q)$ son *invariant de Arf*: Si $q = \perp_{i=1}^n \langle a_i\rangle[1, b_i]$, alors on a $\Delta(q) := \sum_{i=1}^n b_i$. Il est bien connu que Δ induit un morphisme Δ^* de $Wq(k)$ sur le groupe additif $k/\wp(k)$, dont le noyau est $IWq(k)$, où $I \subseteq W(k)$ est l'idéal des formes de dimension paire.
Si K/k est une extension de corps et q une forme quadratique sur K, on dit que "*q est définie sur k*" (ou bien "*q provient de k*") s'il existe une forme q_0 sur k telle que $q = q_0 \otimes K$. La forme $q_0 \otimes K$ est notée quelquefois $(q_0)_K$. Dans la suite k est toujours un corps de caractéristique 2 et toutes les formes quadratiques sur k sont supposées de dimension finie.

1 Extensions triquadratiques séparables

Soient donc $b_1, b_2, b_3 \in k$ et $\iota : k \to K := k(\wp^{-1}(b_1), \wp^{-1}(b_2), \wp^{-1}(b_3))$. Posons $D := I[1, b_1] + I[1, b_2] + I[1, b_3] \subseteq IWq(k)$ et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} IWq(k) & \xrightarrow{\iota_q^*} & IWq(K) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle c_k} & & \Big\downarrow{\scriptstyle c_K} \\ Br_2(k) & \xrightarrow{\iota_2^*} & Br_2(K) \end{array}$$

où c_k (resp. c_K) est le morphisme de Clifford et ι_2^* le morphisme associé fonctoriellement à ι.

Proposition 1. *Il existe un corps k et une extension triquadratique K séparable de k telle que $D \neq \ker \iota_q^*$.*

Preuve. Dans [R] Rowen a montré que tout élément de Ker ι_2^* peut s'écrire comme une somme de 4 2-symboles dont 3 appartiennent à $c_k(D)$; ceci implique que Ker ι_2^* est engendré par les 2-symboles (car $c_k(D)$ est un sous-groupe de Ker ι_2^*). On en déduit que

$$c_k(\mathrm{Ker}\, \iota_q^*) = \mathrm{Ker}\, \iota_2^*.$$

En effet, on a évidemment d'une part $c_k(\mathrm{Ker}\, \iota_q^*) \subseteq \mathrm{Ker}\, \iota_2^*$. Pour prouver d'autre part l'inclusion opposée il suffit de montrer que $c_k | \ker \iota_q^*$ est surjectif sur les 2-symboles. Soit donc $(a, b] \in \mathrm{Ker}\, \iota_2^*$ et $q := \langle 1, a\rangle[1, b]$. On sait que $c_k(q) = (a, b]$ et, par la commutativité de (5), on a

$$\iota_q^*(q) \in \mathrm{Ker}\, c_K, \quad \text{i.e. } q_K \in I^2Wq(K).$$

Si q_K était anisotrope, alors par [B2, Satz 4.2, p. 182] on aurait $\dim q \geq 8$, ce qui est impossible; donc q_K doit être isotrope et par conséquence hyperbolique (car q est une forme de Pfister): ceci veut dire que $q \in \operatorname{Ker} \iota_q^*$. Le morphisme de Clifford induit donc un épimorphisme

$$\gamma : \operatorname{Ker} \iota_q^*/D \to \operatorname{Ker} \iota_2^*/c_k(D).$$

Dans [R] Rowen a démontré l'existence d'un corps k et d'une extension triquadratique séparable de k telle que $\operatorname{Ker} \iota_2^*/c_k(D) \neq 0$. Comme γ est surjectif, on aura donc aussi $\operatorname{Ker} \iota_q^*/D \neq 0$.
Ceci termine la démonstration et montre en particulier que (2) ne s'étend pas aux extensions triquadratiques.

2 Propriétés d'excellence

Comme on a déjà remarqué dans l'introduction, une extension K/k est appelée *excellente* si pour toute forme quadratique non-singulière q sur k le noyau anisotrope $(q \otimes K)_{an}$ de $q \otimes K$ est défini sur k. Il y a naturellement d'autres façons de formuler cette propriété:

Proposition 2. *Pour une extension K/k les affirmations suivantes sont équivalentes:*
1.1. *K/k est excellente;*
1.2. *Si q_0 et $(q_0 \perp q_1)$ sont formes quadratiques non-singulières sur K qui sont définies sur k, alors q_1 aussi est définie sur k;*
1.3. *Si q est une forme quadratique non-singulière sur k et $q \otimes K$ est isotrope, alors il existe une forme quadratique non-singulière τ sur k, isotrope sur k, telle que $q \otimes K \cong \tau \otimes K$.*

On vérifie aisément que 1.1 $\Rightarrow$ 1.2 $\Rightarrow$ 1.3 $\Rightarrow$ 1.1.

Des exemples d'extensions excellentes sont donnés par les extensions purement transcendantes et par les extensions de degré impair. Les extensions quadratiques séparables sont également excellentes (cf. [B1, Remark 4.13.2, p. 126]. Ici on prouve

Lemme 1. *Une extension quadratique inséparable K/k est excellente.*

Preuve. Posons $K = k(\sqrt{d}), d \in k \backslash k^2$. Soit q une forme non-singulière sur k. On peut supposer que $\dim q \geq 4$ et q anisotrope. Alors on sait qu'il existe a, b, c dans k tels que $q = [a, b] \perp [ad, c] \perp q'$ pour une forme q' sur k (cf. [B2, p. 182]). Sur K on a $q \otimes K = [0, 0] \perp ([a, b + cd] \perp q') \otimes K$. $q'' := [a, b + cd] \perp q'$ est une forme sur k avec $\dim q'' < \dim q$ et telle que $(q'' \otimes K)_{an} = (q \otimes K)_{an}$. On peut donc argumenter par induction sur $\dim q$. $\Diamond$

Pour illustrer les conséquences de cette propriété on va maintenant montrer deux résultats sur le comportement des formes quadratiques et des algèbres à involution vis-à-vis de l'extension K/k.

Théorème 1. *Soit K/k une extension quadratique inséparable et Φ une forme bilinéaire de Pfister sur K qui est définie sur k; soit encore q une forme quadratique non-singulière sur K telle que $\Phi \otimes_K q$ soit définie sur k. Alors il existe une forme quadratique non-singulière q_0 sur k telle que $\Phi \otimes q_0 \cong \Phi \otimes q$.*

Preuve. Soit $q = \perp_{i=1}^n \langle a_i \rangle [1, b_i], a_i, b_i \in K \,\forall\, i = 1, \ldots, n$. Alors $\Phi \otimes q = \perp_{i=1}^n \langle a_i \rangle \otimes \Phi \otimes [1, b_i]$. Il existe $c \in k \cap D(\Phi \otimes q)$. Ecrivons $c = \sum_{i=1}^n a_i b_i'$, où $b_i' \in D(\Phi \otimes [1, b_i]) \,\forall\, i = 1, \ldots, n$. Considérons la forme $q' := \perp_{i=1}^n \langle a_i b_i' \rangle [1, b_i]$. Evidemment, elle représente c. On a

$$\begin{aligned} \Phi \otimes q' &\cong \perp_{i=1}^n \langle a_i b_i' \rangle \otimes \Phi \otimes [1, b_i] \\ &\cong \perp_{i=1}^n \langle a_i \rangle \otimes (\langle b_i' \rangle \otimes (\Phi \otimes [1, b_i])) \\ &\cong \perp_{i=1}^n \langle a_i \rangle \otimes \Phi \otimes [1, b_i] \quad (\text{car } (\Phi \otimes [1, b_i] \text{ est de Pfister}) \\ &\cong \Phi \otimes q. \end{aligned}$$

Or, on peut écrire $q' = \langle c \rangle [1, b] \perp q_1$ pour une forme q_1 sur K et on peut supposer que $b \in k$ (car $[1, b] \cong [1, b^2]$). On a alors

$$\Phi \otimes q \cong \Phi \otimes q' \cong \Phi \otimes \langle c \rangle [1, b] \perp \Phi \otimes q_1.$$

Comme K/k est excellente, $\Phi \otimes q_1$ est définie sur k. On peut donc argumenter par induction sur $\dim q$. $\Diamond$

Proposition 3. *Soit K/k une extension quadratique inséparable, $K = k(\sqrt{a})$. Soit A une algèbre à division de degré 4 et d'exposant 2 sur k. Si $A \otimes K$ n'est pas à division, alors il existe $x, y, z \in k$ tels que*

$$A \cong [x, a) \otimes_k [y, z).$$

Preuve. Par un théorème d'Albert (cf. [A, Th. 2, p. 174]) on sait que A est un produit de deux algèbres de quaternions. La forme d'Albert associée ϕ est anisotrope sur k mais isotrope sur K, donc il existe $u, v, t \in K$ tels que

$$\phi \sim \langle u \rangle [1, t] \perp \langle v \rangle [1, t] = \langle u \rangle ([1, t] \perp \langle uv \rangle [1, t]).$$

Comme K/k est excellente, on peut supposer que $u, v, t \in k$. Sur $k(\sqrt{a}, \sqrt{uv})$ ϕ est hyperbolique et A une algèbre de matrices. Par un autre résultat d'Albert (cf. [A, Th. 28, p. 108]) il existe $x, y \in k$ tels que

$$A \cong [x, a) \otimes [y, uv). \quad \Diamond$$

3 Le noyau de $\iota_q^* : Wq(k) \to Wq(K)$

Soit $\iota : k \to K$ une extension quadratique inséparable et q une forme quadratique non-singulière sur k. On a alors

$$\begin{aligned} q \otimes K \in IWq(K) \quad &\text{ssi} \quad \Delta(q \otimes K) \in \wp(K) \\ &\text{ssi} \quad \Delta(q) \in \wp(K) \cap k = \wp(k) \\ &\text{ssi} \quad q \in IWq(k). \end{aligned}$$

Si on suppose que q est anisotrope sur k et hyperbolique sur $K := k(\sqrt{d})$, alors on sait par (3) que $q \in \langle 1, d\rangle Wq(k)$, donc en particulier $q \in IWq(k)$. On voit ainsi que le noyau de ι_q^* est contenu dans $IWq(k)$.
Par induction sur $[F : k]$ et par passage à la limite inductive on s'aperçoit que la même affirmation reste valable pour n'importe quelle extension purement inséparable F/k.
Dans ce cas on est donc ramené à calculer le noyau de l'homomorphisme

$$\iota q^* : IWq(k) \to IWq(F).$$

Dans la suite nous utiliserons le lemme suivant qui est un cas particulier d'un théorème d'Albert [A, Th. 28 p. 108].

Lemme 2. *Soit A une algèbre centrale simple sur k (car $k = 2$). Si A est neutralisée par une extension purement inséparable $k(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ de degré 2^n sur k, alors*

$$A \sim (a_1, x_1] \otimes (a_2, x_2] \otimes \ldots \otimes (a_n, x_n]$$

pour certains $x_1, x_2, \dots, x_n \in k$.

Théorème 2. (i) *Si $\iota : k \to k(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2})$ est une extension biquadratique de k, alors*

$$\mathrm{Ker}(\iota_q^*) = \langle 1, a_1\rangle Wq(k) + \langle 1, a_2\rangle Wq(k)$$

(ii) *Si $\iota : k \to k(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ est une extension inséparable multiquadratique de k et $I^2Wq(k) = 0$, alors*

$$\mathrm{Ker}\, \iota_q^* = \langle 1, a_1\rangle Wq(k) + \ldots + \langle 1, a_n\rangle Wq(k).$$

Preuve. (i) Soit $F := k(\sqrt{a})$ et $q \in IWq(k)$ telle que $q \otimes F(\sqrt{b}) \sim 0$. Par (3) on sait que $q \otimes F \sim \langle 1, b\rangle \otimes q'$ pour une forme q' sur F. Comme F est une extension excellente de k, $(q \otimes F)_{an} \cong (\langle 1, b\rangle \otimes q')_{an}$ est définie sur k, et donc $\langle 1, b\rangle \otimes q'$ est aussi définie sur k. Par Théorème 1, il existe une forme q_0 sur k telle que

$$\langle 1, b\rangle \otimes q' \cong (\langle 1, b\rangle \otimes q_0) \otimes F.$$

Par conséquence $(q \perp \langle 1, b\rangle \otimes q_0) \otimes F \sim 0$, ce qui implique, par (3), que

$$q \perp \langle 1, b\rangle \otimes q' \sim \langle 1, a\rangle \otimes q_1$$

pour une forme q_1 sur k. On peut ainsi conclure que

$$q \in \langle 1, a_1\rangle Wq(k) + \langle 1, a_2\rangle Wq(k).$$

(ii) Posons

$$D := \langle 1, a_1\rangle Wq(k) + \ldots + \langle 1, a_n\rangle Wq(k).$$

Remarquons que $c_k(D)$ n'est autre que le sous-groupe de $Br_2(k)$ engendré par les classes d'algèbres de quaternions du type $(a_i, x]$, $x \in k$, $i = 1, \dots, n$. Puisque $I^2Wq(k) = 0$, par [S, Th. 2 p. 152] c_k est un isomorphisme de $IWq(k)$ sur $Br_2(k)$. Il induit donc un homomorphisme injectif

$$\gamma : \mathrm{Ker}\, \iota_q^*/D \to \mathrm{Ker}\, \iota_2^*/c_k(D).$$

Par le Théorème d'Albert (Lemme 2), le groupe Ker $\iota_2^*/c_k(D)$ est trivial. Comme γ est injectif, Ker ι_q^*/D doit être également trivial. $\Diamond$

On termine cette section avec une autre généralisation de (3), basée sur l'interprétation de $k(\sqrt{a})$ comme le corps des fonctions de la forme bilinéaire de Pfister $\langle 1, a\rangle$. Rappelons d'abord qu'une forme bilinéaire sur k est dite de Pfister si elle est un produit du type $\otimes_{i=1}^n \langle 1, a_i\rangle$, $a_i \in k$. Si ϕ est une forme bilinéaire de Pfister anisotrope sur k, on note $k(\phi)$ le corps des fonctions de la forme quadratique $\phi(x) := \phi(x,x)$ associée à ϕ.

Théorème 3. *Soit ϕ une forme bilinéaire de Pfister anisotrope sur le corps k et $\iota : k \to k(\phi)$ l'injection canonique de k dans le corps des fonctions de ϕ. Alors*

$$\mathrm{Ker}(\iota_q^*) = \phi\, Wq(k).$$

Preuve. Comme $q \otimes k(\phi) \sim 0$, on sait par [B3, Th. 1.1] que $f(X)q \cong q$ sur $k(X)$, où $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $n := \dim \phi$. Posons $\phi := \langle 1, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$. Si $a \in D_k(q)$, alors $a\phi(X)$ est représenté par q sur $k(X)$, ce qui implique, par [B2, Satz 3.4, p. 178], que $q = \langle a\rangle[1, b]\perp\langle aa_1\rangle[1, b_1]\perp \ldots \perp\langle aa_1\rangle[1, b_{n-1}]\perp q'$, où $b, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont dans k et q' est une forme sur k. On déduit que

$$\begin{aligned} q\perp\phi\otimes\langle a\rangle[1,b] &\sim \langle a\rangle[1,b]\perp\langle aa_1\rangle[1,b_1]\perp\ldots\perp\langle aa_{n-1}\rangle[1,b_{n-1}]\perp \\ &\quad\perp\langle a\rangle[1,b]\perp\langle aa_1\rangle]1,b]\perp\ldots\perp\langle aa_{n-1}\rangle[1,b]\perp q' \\ &\sim \langle aa_1\rangle([1,b_1]\perp[1,b])\perp\ldots\perp\langle aa_{n-1}\rangle([1,b_{n-1}]\perp[1,b])\perp q' \\ &\sim \langle aa_1\rangle[1,b_1+b]\perp\ldots\perp\langle aa_{n-1}\rangle[1,b_{n-1}+b]\perp q' =: q_0. \end{aligned}$$

On a $q_0 \otimes k(\phi) \sim 0$ mais $\dim q_0 < \dim q$. On peut donc argumenter par induction sur $\dim q$. $\Diamond$

4 Algèbres à division

Soit $K \supseteq k$ une extension purement inséparable de hauteur 1. Le morphisme de Frobenius $K \to k$ induit un morphisme $\mathcal{F}_{K/k} : Br(K) \to Br(k)$ tel que $\mathcal{F}_{K/k}((a, b]_K) = (a^2, b^2]_k$.

Lemme 2. 1) *Soit $a \in k$ et $x \in K$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $(x, a]_K \in \mathrm{Ker}(\mathcal{F}_{K/k})$
(ii) $(y, a]_k \otimes K \cong (a, x]_K$ *pour un* $y \in k$.
2) *Si D est une algèbre à division sur k d'exposant 2, $\mathcal{F}_{K/k}([D \otimes K]) = 0$.*

Preuve. 1) (ii) $\Rightarrow$ (i): évidente.
(i) $\Rightarrow$ (ii): (cf. [T1, Lemme 2.6]). Soient i, j les générateurs de $(x, a]_K$ vérifiant les relations usuelles (i.e. $i^2 + i = a$; $j^2 = x$; $ji = ij + j$) et σ le k-automorphisme non-trivial de $k(i)$. Par hypothèse on a $(x^2, a] \sim 0$, donc il existe $u \in k(i)$ tel que $x^2 = u\,\sigma(u)$. On peut supposer $x \neq u$ car sinon $x \in k$. Pour $j_1 := j(1 + x^{-1}u)$ on a alors

$$\begin{aligned} j_1^2 &= xj(1+x^{-1}u)jx^{-1}(1+x^{-1}u) = x(1+x^{-1}\sigma(u))(1+x^{-1}u) \\ &= x+u+\sigma(u)+x^{-1}\sigma(u)u = x+u+\sigma(u)+x^{-1}x^2 = u+\sigma(u). \end{aligned}$$

On peut donc poser $y := u + \sigma(u)$.
2) Puisque $D \sim \otimes_{i=1}^n (a_i, b_i]$, $a_i, b_i \in k$, $\mathcal{F}_{K/k}([D \otimes K]) = \otimes_{i=1}^n (a_i^2, b_i^2] = 0$. $\Diamond$

Le théorème d'Albert (Lemme 2) nous dit que la structure d'une k-algèbre à division D est complètement déterminée dès que D contient une extension purement inséparable de degré maximal. Au Théorème 4 nous montrons que la structure d'une algèbre à division D de degré 2^n est en fait complètement déterminée dès que D contient une extension purement inséparable de degré 2^{n-1}. Le Théorème 5 donne des informations sur la structure de D lorsque D contient une extension purement inséparable de degré 2^{n-2}.

Théorème 4. *Soit D une k-algèbre à division de degré 2^n et d'exposant 2. Soit $K = k(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{n-1}})$ une extension purement inséparable de degré 2^{n-1} sur k telle que* $\mathrm{ind}(D \otimes K) = 2$. *Alors*

$$D \cong (a_1, x_1]_k \otimes \dots \otimes (a_{n-1}, x_{n-1}]_k \otimes (y, x_n]_k \quad \textit{pour certains} \quad x_1, \dots, x_n, y \in k.$$

Preuve. Comme $\mathrm{ind}(D \otimes K) = 2$, $D \otimes K \sim (b, a]$ pour $a, b \in K$. Puisque $(b, a^2] = (b, a]$, on peut supposer $a \in k$. Par le Lemme 2.2 $(b, a] \in \mathrm{Ker}(\mathcal{F}_{K/k})$. Par le Lemme 2.1 il existe $y \in k$ tel que $(y, a]_k \otimes K \cong (b, a]$. On a donc $(D \otimes (y, a]) \otimes K \sim 0$. Par le Théorème d'Albert, il existe $x_1, \dots, x_{n-1} \in k$ tels que

$$D \otimes (y, a] \sim (a_1, x_1] \otimes \dots \otimes (a_{n-1}, x_{n-1}],$$

d'où

$$D \cong (a_1, x_1] \otimes \dots \otimes (a_{n-1}, x_{n-1}] \otimes (y, a]. \quad \Diamond$$

Théorème 5. *Soit D une k-algèbre à division de degré 2^n et d'exposant 2. Soit $K = k(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{n-2}})$ une extension purement inséparable de degré 2^{n-2} sur k telle que* $\mathrm{ind}(D \otimes K) = 4$. *Alors*

$$M_2(D) \cong \otimes_{i=1}^{n+1} (a_i, x_i] \quad \textit{pour certains} \quad x_1, \dots, x_{n+1}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \in k.$$

Preuve. Comme $\mathrm{ind}(D \otimes K) = 4$, $D \otimes K \sim (v_1, u_1]_K \otimes (v_2, u_2]_K$, pour certains $u_1, u_2, v_1, v_2 \in K$. On peut supposer que $u_1, u_2 \in k$. Puisque $(v_1, u_1] \otimes (v_2, u_2] \in \mathrm{Ker}(\mathcal{F}_{K/k})$, on a $(v_1^2, u_1]_k \cong (v_2^2, u_2]_k$. Par [R, Lemme 3] il existe $t \in k$ tel que

$$(v_1^2, u_1]_k \cong (v_1^2, t]_k \cong (v_2^2, t]_k \cong (v_2^2, u_2]_k,$$

d'où

$$(v_1^2, u_1 + t] \sim 0; \quad (v_2^2, u_2 + t] \sim 0; \quad (v_1^2 v_2^2, t] \sim 0.$$

Par le Lemme 2, il existe $y_1, y_2, y_3 \in k$ tels que

$$\begin{aligned} &(y_1, u_1 + t]_k \otimes K \cong (v_1, u_1 + t]_K; \\ &(y_2, u_2 + t]_k \otimes K \cong (v_2, u_2 + t]_K; \\ &(y_3, t]_k \otimes K \cong (v_1 v_2, t]_K. \end{aligned}$$

Un simple calcul montre que

$$(v_1, u_1]_K \otimes (v_2, u_2]_K \sim (y_1, u_1 + t]_k \otimes (y_2, u_2 + t]_k \otimes (y_3, t]_k \otimes K,$$

d'où

$$(D \otimes (y_1, u_1 + t]_k \otimes (y_2, u_2 + t]_k \otimes (y_3, t]_k) \otimes K \sim 0.$$

On conclut alors en appliquant le théorème d'Albert. $\Diamond$

References

[A] A. A. Albert, Structure of Algebras, AMS Coll. Publ. XXIV, NY 1939.

[B1] R. Baeza, Quadratic forms over semilocal rings, Springer LNM 655, 1978.

[B2] R. Baeza, Ein Teilformensatz für quadratische Formen in Charakteristik 2, Math. 2. 135, 175-184 (1974).

[B3] R. Baeza, A norm theorem for quadratic forms over a field of characteristic 2, Comm. in Alg. 1865, 1337-1348 (1990).

[E-L-T-W] R. Elman, T. Y. Lam, J.-P. Tignol, A. Wadsworth, Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions I, Am. J. Math. 105, 1119-1170 (1983).

[E-L-W] R. Elman, T. Y. Lam, A. Wadsworth, Quadratic forms under multiquadratic extensions, Indag. Math. 42, 131-145 (1980).

[K-S] M. Knebusch, W. Scharlau, Generic methods and Pfister forms, Birkhäuser, Boston, 1980.

[M-H] J. Milnor, D. Husemoller, Symmetric bilinear forms, Springer EdM, Band 73, 1973.

[R] L. H. Rowen, Division Algebras of Exponent 2 and Characteristic 2, J. of Alg. 90, 71-83 (1984).

[S] C. H. Sah, Symmetric bilinear forms and quadratic forms, J. Alg. 20, 144-160 (1972).

[Sch] W. Scharlau, Quadratic and hermitean forms, Springer 1985.

[T1] J.-P. Tignol, Corps à involution neutralisés par une extension abelienne élémentaire, dans Groupes de Brauer, Springer LNM 844, pp. 1-34.

[T2] J.-P. Tignol, Sur les classes de similitude de corps à involution de degré 8, C. R. Acad. Sci. Paris, T. 286, Série A, 875-876 (1978).

Pasquale Mammone
Université d'Artois
Jeune équipe d'ATDN de Lille
Pole scientifique de Lens
Rue Jean Souvraz
62300 LENS, France

Remo Moresi
CERFIM, Via F. Rusca 1
6601 Locarno, Suisse