Lire l'Analyse Non Standard

Véronique GAUTHERON   Emmanuel ISAMBERT

L'Analyse Non Standard est aujourd'hui utilisée dans de nombreux domaines des Mathématiques : systèmes dynamiques, calcul asymptotique, probabilités, algèbre, espaces de Banach ...Elle s'est révélée un outil à la fois efficace et agréable à utiliser, ce dont témoignent de nombreux articles publiés, appliquant l' ANS à ces domaines.

Malheureusement trop souvent des mathématiciens spécialistes de ces mêmes domaines, qui n'ont pas eu l'envie ou le temps de se plonger dans les bases de la théorie non standard, sont rebutés par un vocabulaire différent du leur et un point de vue qui peut leur paraître étrange, voire absurde ou inutile. Cela conduit à de regrettables coupures ou incompréhensions entre mathématiciens travaillant pourtant sur des sujets voisins, et qui gagneraient certainement à des échanges mutuels.

Nous tentons ici d'exposer, avec le minimum d'investissement théorique, les notions d'ANS qui nous paraissent essentielles à un mathématicien "classique" pour comprendre les idées à l'oeuvre dans un exposé non standard proche de leur spécialité. Pour plus de détails, nous conseillons la lecture de [12]

Commençons par un exemple naïf :

En supposant que nous parlons des réels positifs, il est courant dans un style oral un peu informel d'employer des phrases du type "on peut prendre x plus petit que tout a donné ...(x vérifiant telle propriété)". Le mot *donné* n'a ici aucun sens mathématique formel, il n'est là que pour signifier qu'on veut dire en réalité "pour tout $a > 0$ il existe $x < a$ tel que ...". On préfère souvent la première formulation pour obtenir des phrases plus simples, et pour éviter de rompre la direction générale du raisonnement — mais le coût en est une certaine perte de rigueur formelle.

Il serait commode de disposer d'un formalisme dans lequel on pourrait écrire sans contradiction une phrase du style "soit $x > 0$ inférieur à tout $a > 0$ donné tel que...". Le choix d'un tel x n'est bien sûr possible que si on admet que certains réels n'ont pas la propriété de pouvoir être donnés explicitement (tous les réels possédant une définition précise, tels que π, 10^{-12} etc. faisant bien entendu partie des réels "donnables").

L'ANS permet de donner un sens à de telles phrases, en introduisant une distinction entre objets standard et non standard, le mot *standard* formalisant l'idée de "donnable explicitement"[1]. Elle propose un système cohérent et pratique, dans lequel en particulier

[1]Ne pas confondre cependant les objets standard et les objets *définissables par une formule*!

certains réels positifs sont plus petits que tout réel positif standard.

Ce nouveau langage présente l'avantage de fournir très souvent des énoncés plus directs sans perte de rigueur, d'éviter certains retours en arrière dans les démonstrations et aussi de diminuer le nombre de variables "mobiles" à manier simultanément : dans l'exemple ci-dessus, on n'est plus obligé de changer de x pour chaque valeur de a. D'un point de vue syntaxique, cela se traduit la plupart du temps par une diminution du nombre de quantificateurs dans les formules ; de nombreux exemples en seront fournis par la suite.

Pour arriver à un tel résultat il existe actuellement deux façons de procéder.

- Dans la première, on considère que les éléments du corps des réels $\mathbb{R}$ (ou d'une structure plus compliquée, contenant aussi les parties de $\mathbb{R}$, les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, etc.) sont tous standard, et par une méthode reposant sur les ultraproduits on construit un certain sur-corps $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$ (et les extensions correspondantes $\mathcal{P}(\mathbb{R})^*$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ etc.) et on appelle réels non standard les éléments de $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$. Cette façon de faire est la plus ancienne ; c'est celle du fondateur de l'ANS Abraham Robinson [27], et de ses successeurs directs, restés assez proches de la Théorie des Modèles (Luxemburg, Stroyan. . .[22]).
- Une autre façon de procéder, dont l'invention plus récente est due à Edward Nelson [24], et dont l'usage s'est répandu notamment sous l'impulsion de Geoges Reeb, nous semble d'un abord plus facile pour la majorité des mathématiciens : c'est celle que nous allons présenter ici. Elle consiste au contraire à considérer que dans $\mathbb{R}$ lui-même (et dans les ensembles infinis en général) certains éléments peuvent avoir une propriété, non définissable en termes classiques, celle d'être standard ; d'autres au contraire peuvent être non standard. L'usage de cette nouvelle propriété "être standard" est réglementé par de nouveaux axiomes rajoutés à ceux de la théorie des ensembles.

Il existe un théorème qui prouve (par une méthode d'ultraproduits) la cohérence de ces nouveaux axiomes avec les anciens ; on peut lire ou non cette démonstration, mais elle est faite une fois pour toutes, et on n'a pas besoin de la connaitre pour suivre correctement les régles d'emploi du prédicat "standard"[2]. C'est pourquoi la théorie de Nelson est sans doute plus facile à utiliser pour des non-logiciens.

1 Avant-goût

A partir du moment où on se donne le droit d'utiliser la nouvelle propriété "être standard" on peut définir de nouvelles notions d'analyse allant dans le sens du but intuitif qui nous guide, à savoir donner une définition rigoureuse à des notions troubles telles que réel infinitésimal, entier infiniment grand, etc.

Enonçons donc, dans le cadre de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, quelques notions et propriétés élémentaires qu'on s'attend à trouver pour des notions cohérentes d'infiniment grand et infiniment petit.

[2]Cette démarche n'est pas nouvelle : qui d'entre nous pense aux constructions formelles de $\mathbb{R}$ chaque fois qu'il manipule des réels ? Ce qui importe ce sont les règles de cette manipulation. Dans un registre plus avancé, beaucoup de mathématiciens *utilisent* l'axiome du choix ou ses dérivés, sans pour autant savoir démontrer qu'il est indépendant des autres axiomes de ZF.

De façon générale, la propriété "être standard" doit être stable pour les opérations et fonctions habituelles (somme, produit, sinus, exponentielle etc.).

Entiers naturels, standard ou non. Il existe des entiers naturels plus grands que tout entier standard ; ces entiers sont évidemment non-standard, et de plus tout entier non standard est plus grand que tout entier standard.

Réels standard ou non. Il existe plusieurs sortes de réels non standard :
- les uns sont plus grands en valeur absolue que tout réel standard, et leur partie entière est un entier non standard ; on les nomme réels **i-grands**[3] ;
- d'autres (les inverses des précédents) sont plus proches de 0 que tout réel standard non nul ; on les nomme **i-petits** ou infinitésimaux ;
- enfin, il résulte de la stabilité des standard pour l'addition que, si a est un standard non nul et ε un réel i-petit, $a+\varepsilon$ est non standard, mais n'est ni i-petit ni i-grand ; des axiomes à venir il résultera que tout réel non-standard qui n'est ni i-petit ni i-grand est de cette forme $a+\varepsilon$ (a standard, ε infinitésimal).

Un peu de vocabulaire
- Deux réels x et y sont **i-voisins** si $x-y$ est i-petit (on écrit alors $x \simeq y$, et naturellement $x \simeq 0$ est une notation pour "x est i-petit").
- x est **limité** s'il n'est pas i-grand.
- x est **appréciable** s'il n'est ni i-petit ni i-grand.

En particulier tout réel standard est limité, et tout réel standard non nul est appréciable.

Deux exemples
L'Analyse Non Standard permet très souvent de reformuler les notions classiques de façon plus proche de l'intuition ; on verra cependant que ces nouvelles définitions ne sont équivalentes aux anciennes que si on les applique à des objets (espaces, fonctions, suites) standard. Par exemple :
- Une suite standard (u_n) converge vers un standard l si et seulement si $u_n \simeq l$ pour tout n i-grand.
- Une fonction standard f est continue en un point standard x_0 si et seulement si $f(x) \simeq f(x_0)$ pour tout $x \simeq x_0$.

2 Formalisation

Précisons maintenant les règles qui régissent l'utilisation de la propriété "être standard" ; ces règles se traduisent formellement par :
- l'introduction dans le langage de la théorie des ensembles d'un nouveau prédicat à une place st( ). La formule st(x) est une notation pour "x est standard", propriété que possèdent certains éléments de l'univers ;

[3] Abréviation, si on veut, de "infiniment grand" mais nous préférons plutôt le terme d'*idéalement grand.*

– l'énoncé de trois schémas d'axiomes qu'on rajoute à ceux de la théorie ZFC (Zermelo-Fraenkel+ Axiome du Choix).

L'introduction de *st* amène à distinguer plusieurs sortes de formules : celles qui peuvent s'écrire sans utiliser le prédicat *st* (autrement dit celles qui sont exprimables dans le langage de ZFC) sont appelées **formules internes** ; les autres (qui contiennent le prédicat st( ) ou ses dérivés) sont appelées **formules externes**.

De plus, on s'autorise à rajouter aux formules des paramètres, désignant certains objets de l'univers ensembliste où on se place. Les formules internes dont tous les paramètres désignent des objets standard sont appelées **formules standard**.

C'est le seul moment moment de cet article où il est un petit peu question de Logique formelle : *la seule capacité requise en cette matière est de savoir distinguer si une propriété ou un énoncé peut ou non s'exprimer par une formule standard ou par une formule interne* (et pour cela en général le bon sens suffit).

Collections externes. Les propriétés et énoncés internes obéissent aux mêmes règles que dans ZFC ; il n'en est pas de même des énoncés externes : ainsi le Schéma de Compréhension de ZFC, qui dit que pour tout ensemble X et toute formule $\Phi(x)$, il existe un ensemble défini comme $\{x \in X/\, \Phi(x)\}$, ne s'applique qu'aux formules internes (par exemple la collection des entiers standard n'est pas un ensemble) ; par commodité, on écrira aussi $\{x \in X/\, \Phi(x)\}$ pour des formules externes, mais les éléments de X ainsi délimités peuvent ne pas constituer un ensemble : en ce cas on dira qu'on a défini une *partie externe* de X, ou *collection externe*[4], et on s'autorisera à la noter par un symbole — $\mathcal{C}$ par exemple, et à écrire $x \in \mathcal{C}$ au lieu de "$x \in X$ et $\Phi(x)$", ainsi qu'à pratiquer sur ces collections les opérations booléennes élémentaires (intersection, réunion ...).

Les théorèmes classiques des mathématiques ne peuvent pas en général s'appliquer aux collections externes ; ainsi le fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément ne s'applique pas à la collection des entiers non standard (ce qui montre bien que cette collection est externe, ainsi que son complémentaire) ; de même la collection des réels infinitésimaux est majorée, mais n'a pas de borne supérieure.

Quantificateurs externes On écrit $\forall^{\mathrm{st}} x\, F(x)$ pour $\forall x(\mathrm{st}(x) \Rightarrow F(x))$, ce qui se lit "pour tout x standard $F(x)$", et de même $\exists^{\mathrm{st}} x G(x)$ signifie "il existe x standard tel que $G(x)$".

Les schémas d'axiomes sont les suivants :

Transfert Pour toute formule **standard** $F(x)$, où x est une variable libre, on a l'implication

$$\forall^{\mathrm{st}} x F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$$

(ou, de façon équivalente, $\exists x F(x) \Rightarrow \exists^{\mathrm{st}} x F(x)$).

Idéalisation Une relation $B(x, y)$ à deux variables libres est dite **S-concourante** si elle a la propriété que pour tout ensemble *standard fini* Z il existe y tel que

[4]par abus de langage, on parle parfois d'*ensembles externes*, mais nous éviterons cette terminologie trompeuse.

$(\forall x \in Z)\, B(x, y)$. Le schéma d'idéalisation dit qu'une relation **interne** $B(x, y)$ est S-concourante si et seulement si on a

$$(\exists y)(\forall^{\text{st}} x)\, B(x, y).$$

Standardisation Pour toute formule F (interne ou externe) et tout ensemble standard X, il existe une partie **standard** Y de X telle que

$$(\forall^{\text{st}} x \in X)\, (x \in Y \Leftrightarrow F(x))\,.$$

Autrement dit pour toute partie (interne ou externe) $\mathcal{A}$ de X il existe une partie standard $\mathcal{B}$ de X qui a exactement les mêmes éléments standard que $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{B}$ est alors appelé le **standardisé** de $\mathcal{A}$ et on note $\mathcal{B} = {}^{\text{s}}\mathcal{A}$.

La théorie obtenue en rajoutant à ZFC le prédicat *st* et les trois schémas précédents s'appelle IST (Internal Set Theory), et est dûe à Nelson. Par opposition au langage non standard (ou langage de IST), utilisant le prédicat *st*, on parlera de langage classique (ou d'énoncés classiques) pour désigner le langage de ZFC (ou les énoncés qui peuvent s'écrire sans faire appel à la propriété *st*).

Commentaires

Il découle du Transfert que tout objet qui peut se définir de manière unique par une formule standard (3, sin, $\mathcal{G}_5^{17}(\mathbb{C})$, etc.) est standard. Il résulte aussi de ce schéma que toute fonction standard prend des valeurs standard aux points standard ; ou encore par exemple que pour vérifier qu'une fonction standard est dérivable en tout point, il suffit de le faire aux points standard.

Le schéma d'Idéalisation a notamment les conséquences suivantes :

- Il existe un entier plus grand que tout entier standard, et tout entier non standard est plus grand que tous les entiers standard.
- Dans un espace topologique, la relation d'inclusion entre les voisinages d'un point x donné étant S-concourante, il existe un voisinage de x inclus dans tout voisinage standard de x (c'est ce qu'on appelle un *voisinage infinitésimal* de x).
- Tout ensemble infini possède des éléments non standard, et un ensemble n'a que des éléments standard si et seulement si il est **standard et fini**.

Une conséquence de la Standardisation (qui se démontre avec l'Axiome du Choix) est le *Principe de Saturation* : soient X, Y deux ensembles standard, B une relation (interne ou externe) telle que $(\forall^{\text{st}} x \in X)(\exists^{\text{st}} y \in Y)\, B(x, y)$; *alors il existe une* **application standard** f *de* X *dans* Y *telle que*

$$(\forall^{\text{st}} x \in X)\, B(x, f(x)).$$

Une autre conséquence est que pour tout réel x limité, il existe un réel standard ${}^\circ x$ (nécessairement unique) tel que ${}^\circ x \simeq x$ (pour démontrer cette existence, on prend $X = {}^{\text{s}}\{y \in \mathbb{R}; y \geq x\}$ et ${}^\circ x = \inf X$).

Notons que des trois schémas ci-dessus, le plus souvent utilisé explicitement est de loin le Transfert ; dans les applications courantes, l'Idéalisation est utilisée essentiellement pour assurer l'existence d'éléments non standard, et la Standardisation pour assurer l'existence des parties standard et des ombres ; ce dernier principe joue également un rôle dans la définition des S-notions — tout cela sera explicité plus loin.

Rapports entre IST et ZFC

Il est important de signaler deux résultats de Logique qui rassurent sur l'introduction des nouveaux axiomes, et légitiment l'utilisation de techniques non standard pour démontrer des résultats exprimables par un énoncé classique (ces résultats sont démontrés dans [24]) :

- Tout énoncé non standard possède une traduction classique, au sens suivant : si $\Phi(x_1, \cdots x_n)$ est un énoncé du langage de IST, on peut (par un algorithme syntaxique dû à Nelson) obtenir un énoncé standard $\Psi(x_1, \cdots x_n)$ qui est équivalent à Φ dès que $x_1, \cdots x_n$ sont standard.
- Tout théorème classique qui est conséquence de IST est en fait déjà conséquence de ZFC (on dit que IST est une *extension conservative* de ZFC). On en déduit que si ZFC ne possède pas de contradiction, IST n'en a pas non plus.

Il en résulte que tout théorème de IST, par traduction, donne un théorème de ZFC — ce qui ne veut pas dire qu'une notion naturelle ou un résultat "parlant" dans le cadre non standard se traduira en langage classique par une notion ou un énoncé ayant les mêmes qualités !

Disons quelques mots de l'autre approche de l'ANS, évoquée plus haut (que nous nommerons approche Robinsonienne) : on se donne toujours une structure M, formant un ensemble (typiquement, M contiendra $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, et sera close par l'opération $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$).

La structure étendue M^* (dite *élargissement* — en Anglais "enlargement"— de M) contient, pour chaque $X \in M$, une extension X^* de X ; les éléments de X^* qui sont dans X sont dits standard, ceux de $X^* - X$ sont dits non standard. On a toujours $\mathcal{P}(X)^* \subset \mathcal{P}(X^*)$ et les parties de X^* qui appartiennent à $\mathcal{P}(X)^*$ sont dites internes, les autres externes. Cela dit, les objets standard, internes et externes ainsi construits possèdent des propriétés tout à fait semblables à celles qui découlent, dans l'approche Nelsonienne, des axiomes de IST (voir par exemple [27, 22]).

Un point de vocabulaire : les Robinsoniens nomment *finis* (resp. *hyperfinis*) ce qui correspond dans IST aux ensembles de cardinal *limité* (resp. *fini*).

3 Dictionnaire

3.1 Complément de vocabulaire

Dans un espace métrique (E, d) on écrit $x \simeq y$ (et on prononce "x i-voisin de y") si $d(x, y) \simeq 0$.

Si $x \in E$ on appelle **halo métrique** de x (noté $\text{hal}(x)$) la collection (généralement externe) des y i-voisins de x.

Si $x \in E$ on dit que x est **presque standard** dans E s'il existe un point standard de E i-voisin de x ; un tel standard, s'il existe, est nécessairement unique. On l'appelle **partie standard** de x et on le note $°x$. Rappelons que dans $\mathbb{R}$ tout réel limité est presque standard.

Plus généralement, si $A \subset E$ (A externe ou interne) on appelle **halo de** A la collection $\text{hal}(A) = \{y \in E \mid (\exists x \in A)\, x \simeq y\}$.

Dans un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ on appelle **halo topologique** de x ($\text{hal}_{\mathcal{T}}(x)$) l'intersection de tous les voisinages standard de x ; cette collection est en général externe. Notons que, même si $\mathcal{T}$ est métrisable, l'égalité $\text{hal}(x) = \text{hal}_{\mathcal{T}}(x)$ n'est assurée que si x est standard.

Par défaut le mot "halo" désignera le halo métrique.

3.2 Traduction de notions classiques

On se donne deux espaces métriques standard E et F.

Suites. Soient u_n une suite standard dans E et l un élément standard de E.

- (u_n) converge vers l si et seulement si, pour tout n i-grand, $u_n \simeq l$.
- l est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si il existe n i-grand tel que $u_n \simeq l$.
- (u_n) est une suite de Cauchy si et seulement si $u_p \simeq u_q$ dès que p et q sont i-grands.

Fonctions continues. Soient f une fonction standard de E dans F et x_0 un point standard de E.

- f est continue en x_0 si et seulement si pour tout $x \simeq x_0$, $f(x) \simeq f(x_0)$.
- f est uniformément continue sur E si et seulement si pour tous x, y de E, $x \simeq y \Rightarrow f(x) \simeq f(y)$.

Suites de fonctions. Soient (f_n) une suite standard de fonctions de E dans F, et f une fonction standard de E dans F.

- (f_n) converge simplement vers f si et seulement si, pour tout n i-grand et tout standard $x_0 \in E$, $f_n(x_0) \simeq f(x_0)$.
- (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si, pour tout $x \in E$ (standard ou non) et tout n i-grand, $f_n(x) \simeq f(x)$.
- Si E est localement compact, (f_n) tend vers f uniformément sur tout compact si et seulement si $f_n(x) \simeq f(x)$ pour tout n i-grand et tout x *presque standard* dans E.

Topologie sur un espace métrique. Soient (E, d) un espace métrique standard et A un sous ensemble standard de E.

- A est ouvert si et seulement si il contient le halo de tous ses points standard.
- A est fermé si et seulement si, pour tout x presque standard dans E, $°x \in A$.
- un point standard y est adhérent à A si et seulement si $\text{hal}(y) \cap A \neq \emptyset$ ou encore si et seulement si $y \in \text{hal}(A)$.

– A est compact si et seulement si tout point x de A est *presque standard dans* A (c'est à dire que ${}^\circ x$ existe et est dans A).

Le langage non standard permet ainsi de reformuler, d'une façon souvent plus simple, les notions de base de l'analyse. On remarque que les nouvelles caractérisations ne sont valables que pour les objets standard. Pour les objets non standard, on dispose donc de notions a priori distinctes : la notion classique et une notion non standard (ou S-notion) correspondante obtenue en applicant les définitions ci-dessus à tous les objets (standard ou non).

Etudions par exemple la S-notion la plus naturelle qui correspond à la continuité.

3.3 S-continuité

Soient E et F deux espaces métriques standard. On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **S-continue en un point** x si pour tout $y \in E$, $x \simeq y \Rightarrow f(x) \simeq f(y)$.

Exemples

ω désignera un entier i-grand, ε un réel positif infinitésimal.

– la fonction $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = \varepsilon$ si $x > 0$, est S-continue en 0.

– $x \mapsto x^2$ n'est pas continue en ω.

– $x \mapsto \sin(\omega x)$ n'est S-continue en aucun point.

Soit $D \subset E$. Une fonction f est **S-continue sur** D si pour tout x *presque standard dans* D, $f(x)$ est presque standard et f est S-continue en x.

La fonction $x \mapsto x^2$ est donc S-continue sur $\mathbb{R}$, ainsi que toute fonction standard continue. La fonction $x \mapsto \varepsilon[x^2/\varepsilon]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x) est S-continue sur $\mathbb{R}$.

Remarquons qu'une fonction standard est bien continue si et seulement si elle est S-continue sur son domaine, et uniformément continue sur I si elle est S-continue en tout point de I. Il devient alors totalement évident qu'une fonction standard continue sur un compact standard est uniformément continue, et par Transfert cette propriété est vraie pour toute fonction et tout compact.

3.4 Ombres

Plaçons-nous dans un espace métrique standard (E, d). Si A est une partie standard de E, on a vu que les points standard adhérents à A sont ceux qui appartiennent à $\mathrm{hal}(A)$; comme $\bar{A}$ est un ensemble standard, il en résulte que $\bar{A}$ est le standardisé de $\mathrm{hal}(A)$.

Une S-notion correspondante est la notion d'*ombre* : si A est une partie (interne ou externe) de E, **l'ombre de** A est l'ensemble standard

$$^\circ A = {}^\mathrm{s}\mathrm{hal}(A).$$

Quelques propriétés des ombres :

– si A est standard, ${}^\circ A = \bar{A}$;

– si A est interne, ${}^\circ A$ est fermé ;

– si E est localement compact et A interne et limité, ${}^\circ\!A$ est compact, et c'est la *partie standard* de A au sens de la semi-distance de Hausdorff ; si de plus A est connexe, ${}^\circ\!A$ également.

Remarques et exemples

– si x est presque standard dans E, ${}^\circ\{x\} = \{{}^\circ x\}$.
– soit $\varepsilon \simeq 0$; l'ombre de $A =]\varepsilon, 1+\varepsilon[$ est $[0,1]$; on voit que l'on n'a ni $A \subset {}^\circ\!A$, ni ${}^\circ\!A \subset A$.
– si A n'a aucun point standard, ${}^\circ\!A = \emptyset$.
– ${}^\circ(A \cup B) = {}^\circ\!A \cup {}^\circ\!B$ et ${}^\circ(A \cap B) \subset {}^\circ\!A \cap {}^\circ\!B$.
– si $A = \{x \in \mathbb{R}/x \not\simeq 0\}$, ${}^\circ\!A = \mathbb{R}^*$: on voit que si A est externe, ${}^\circ\!A$ n'est pas toujours fermé.
– si A est le graphe de $y = \sin(x/\varepsilon)$ pour $x \in [-1,1]$, ${}^\circ\!A = [-1,1]^2$.
– si A est le graphe de $y = \mathrm{arctg}(x/\varepsilon)$ pour $x \in \mathbb{R}$, ${}^\circ\!A$ est composé de

$$\mathbb{R}^- \times \{-\pi/2\} \cup \{0\} \times [-\pi/2, \pi/2] \cup \mathbb{R}^+ \times \{\pi/2\}.$$

Remarquons que dans ces deux derniers cas, A est un graphe de fonction, mais pas ${}^\circ\!A$; cela est dû au fait que la fonction n'est pas S-continue.

Cette remarque nous amène à un résultat important, le **théorème de l'ombre continue** qui peut s'énoncer ainsi :

Théorème *Soient E et F deux espaces métriques standard, f une fonction de $D \subset E$ dans F, et G le graphe de f. Alors :*

– *si f est S-continue sur D, ${}^\circ G$ est le graphe d'une fonction standard continue.*
– *si pour tout x presque standard dans D, $f(x)$ est presque standard, et si ${}^\circ G$ est le graphe d'une fonction g, alors :*
  – *g est standard et continue ;*
  – *f est S-continue.*

  De plus pour tout x presque standard dans D , $f(x) \simeq g(x)$.

La fonction g est celle qu'on obtient par standardisation de la relation $y = {}^\circ f(x)$ sur les éléments standard de D ; on la note ${}^\circ f$ et on dit que g est **l'ombre de** f.

Notons qu'une telle fonction peut être définie même dans des cas où f n'est pas S-continue, mais qu'alors son graphe est toujours *strictement inclus* dans ${}^\circ G$. Signalons également que le théorème d'Ascoli se déduit très facilement de ce théorème : l'ombre continue est en quelque sorte une version non standard d'Ascoli.

4 Collections externes et principes de permanence

On se replace dans le cadre général de la théorie des ensembles IST.

4.1 Halos et galaxies

Dans le cas où E est un espace métrique, on aurait pu définir le halo d'un point x comme intersection externe de boules :

$$\mathrm{hal}(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N},\mathrm{st}(n)} B(x, 1/n)$$

ou encore

$$\mathrm{hal}(x) = \bigcap_{\varepsilon>0,\mathrm{st}(\varepsilon)} B(x, \varepsilon)$$

Plus généralement, dans un ensemble interne E (pas nécessairement métrique ni topologique), on dit qu'une sous-collection H de E est un **préhalo** si il existe un ensemble standard I et une famille interne $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E tels que l'on ait

$$H = \bigcap_{i\in I,\mathrm{st}(i)} A_i$$

D'une façon équivalente, H est un préhalo s'il est défini par

$$H = \{x \in E \,/\, (\forall^{\mathrm{st}}\eta)\, \Phi(x, \eta)\}$$

où Φ est une propriété interne.

On appelle **halo** un préhalo qui est externe.

De façon analogue, on dit qu'une sous-collection G de E est une **prégalaxie** si il existe un ensemble standard I et une famille interne $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E tels que l'on ait

$$G = \bigcup_{i\in I,\mathrm{st}(i)} A_i$$

On peut dire aussi que G est une prégalaxie si elle est définie par

$$G = \{x \in E \,/\, (\exists^{\mathrm{st}}\eta)\, \Phi(x, \eta)\}$$

où Φ est une propriété interne.

On appelle **galaxie** une prégalaxie qui est externe.

Exemples

- Dans un ensemble standard infini, les standard forment une galaxie, et les non-standard forment un halo.
- Les réels i-grands (resp i-petits) forment un halo ; les réels limités (resp appréciables) forment une galaxie.
- Les réels définis par

  $$\{x \in \mathbb{R} \,/ (x > 0 \text{ ou } x \simeq 0) \ et\ x < 1 \ et\ x \not\simeq 1\}$$

  ne forment ni un halo ni une galaxie.

Décrivons maintenant quelques sous-collections de $\mathbb{R}$ que l'on rencontre souvent en asymptotique non standard.

On note

– ε-hal$(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x/\varepsilon \simeq 0\}$
– ε-gal$(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x/\varepsilon$ limité$\}$
– ε-microhal$(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall^{\mathrm{st}} k \in \mathbb{N})\,(x/\varepsilon^k \simeq 0)\}$
– ε-microgal$(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists^{\mathrm{st}} k \in \mathbb{N})\,(|x| < e^{-k/\varepsilon})\}$

E. Nelson a démontré que toute partie d'un ensemble standard A est soit interne, soit un halo, soit une galaxie, soit enfin de la forme

$$\{x \in A \,/ (\forall^{\mathrm{st}} u)(\exists^{\mathrm{st}} v)\ \Phi(x, u, v)\}$$

Ces derniers peuvent encore s'écrire :

$$\{x \in A \,/ (\exists^{\mathrm{st}} u)(\forall^{\mathrm{st}} v)\, \Phi(x, u, v)\}$$

Tant qu'on se place à l'intérieur d'un ensemble standard (ce qui est presque toujours le cas dans les applications) il y a donc trois sortes d'ensembles externes : les halos, les galaxies. . .et les autres ! La complexité des formules externes est ainsi limitée à une alternance de deux quantificateurs externes.

De plus on démontre le principe d'exclusion suivant :

Principe de Fehrele : *Aucun ensemble externe n'est à la fois un préhalo et une prégalaxie*

4.2 Principes de permanence

La distinction entre ensembles internes et collections externes, ainsi que la classification des collections externes en halos, galaxies et autres, permettent souvent de montrer que certaines propriétés démontrées pour tous les éléments d'un certain domaine s'étendent en fait à un domaine plus grand : c'est ce que l'on appelle les raisonnements par permanence.

Permanence de Cauchy. Elle repose sur la distinction entre ensembles internes et parties externes.

Si X est un ensemble interne et P une propriété interne, alors $\{x \in X \,/ P(x)\}$ est interne ; donc si Y est une partie externe de X et que l'on a démontré que P est vérifiée pour tous les éléments de Y, alors on peut affirmer que P *est encore vraie pour certains éléments hors de* Y.

Exemple Soit (a_n) une suite standard de réels strictement positifs et ε un i-petit positif ; alors on voit facilement que la suite $(a_n \varepsilon^n)$ est décroissante sur les n standard. Par permanence, on en déduit que cette suite est décroissante au moins jusqu'à un entier i-grand.

Permanence de Fehrele. Elle repose sur le principe du même nom énoncé plus haut.

Si X est un ensemble interne et $H(y)$ une propriété de la forme $\forall^{st} x P(x, y)$ où P est interne, alors $\{y \in X \,/\, H(y)\}$ est un préhalo ; donc si $Y \subseteq X$ est une galaxie et que l'on sait que H est vérifiée par tous les éléments de Y, alors H *est encore vraie pour certains éléments hors de* Y.

On démontre par exemple ainsi le

Lemme de Robinson *Si une suite* (u_n) *est telle que* u_n *est i-petit pour tout* n *standard, alors il existe* ω *i-grand tel que* u_n *soit i-petit pour tout* $n < \omega$.

De même, si deux fonctions f et g ont des valeurs i-voisines pour tout x appréciable, on peut affirmer qu'il existe ε i-petit et ω i-grand tels que $f(x) \simeq g(x)$ pour tout x de $[\varepsilon, \omega]$. Cette propriété est souvent utilisée dans l'étude des solutions d'équations différentielles non standard.

Le même principe s'applique bien-sûr, *mutatis mutandis*, en échangeant le rôle des halos et des galaxies. D'autre part, le principe s'applique encore si l'on sait par exemple que $\{y \in X \,/\, H(y)\}$ est une vraie galaxie, et que $Y \subseteq X$est un préhalo.

On trouvera plus de détails sur ces questions dans [4], et des développements plus récents dans [6].

5 Les canards, un objet d'étude actuel

Nous allons exposer maintenant, aussi simplement et rapidement que possible, le phénomène des canards, découvert par M. et F. Diener, E. Benoit et J.L.Callot au début des années 80 [3]. Ce sera l'occasion de présenter quelques outils d'analyse non-standard (loupes, développements en ε-ombres, ...), qui ont évidemment bien d'autres applications.

Nous nous placerons dans la situation la plus simple. Considérons, dans le plan, une équation différentielle

$$\varepsilon y' = F(x, y, \varepsilon) \quad (1)$$

où F est une fonction standard suffisamment régulière et ε un i-petit positif.

5.1 Courbe lente

Supposons que $F(x, y, 0) = 0$ définisse une courbe Γ, nécessairement standard.

En dehors du halo de Γ, y' est i-grand, positif ou négatif. Dans le cas générique, (et notamment si $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, 0) \neq 0$ sur Γ), $F(x, y, \varepsilon)$ change de signe en traversant le halo de Γ, et prend des valeurs limitées sur une partie de ce halo. On dit alors que Γ est la *courbe lente* de l'équation (1), et que (1) définit un champ *lent-rapide*.

Considérons une partie Γ_1 de Γ sur laquelle $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, 0)$ ne change pas de signe, et telle que Γ_1 soit le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$ pour $x \in [a, b]$; il y a alors deux cas de figure :

- Si $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x), 0)$ est négatif, alors, dans un voisinage standard V de Γ_1, y' est i-grand négatif au dessus du halo de Γ_1, et i-grand positif au dessous. En restreignant au besoin V, on voit qu'une trajectoire issue d'un point (x_0, y_0) de V entre dans le halo de Γ_1 "immédiatement" (c'est-à -dire avec une ombre verticale), et reste ensuite dans le halo de Γ_1 tant que x est appréciablement inférieur à b. Par permanence, ceci reste vrai pour certains x i-voisins de b.

  Danc ce cas, on dit que Γ_1 est une courbe lente *attractive* (cf. fig.1).

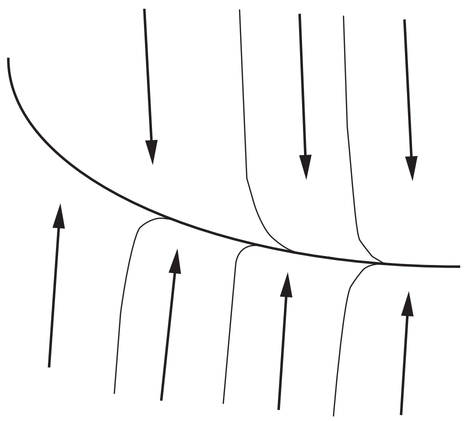

FIG. 1 – Courbe lente attractive

– Si, au contraire, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x),0)$ est positif, Γ_1 est une courbe lente *répulsive*. C'est alors pour les x appréciablement compris entre a et x_0 que la trajectoire passant par (x_0, y_0) est dans le halo de Γ_1 (cf. fig.2).

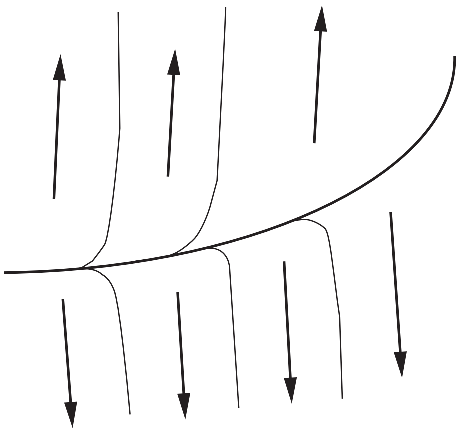

FIG. 2 – Courbe lente répulsive

Remarque
Nous avons dit plus haut que tout énoncé non-standard avait un équivalent standard. Donnons, à titre d'exemple, la traduction classique de l'énoncé : "Γ_1 est une courbe lente attractive".

Considérons la famille d'équations différentielles

$$\varepsilon y' = F(x,y,\varepsilon) \quad (1_\varepsilon)$$

et supposons que, sur $]a,b[$, Γ_1 soit le graphe d'une fonction $y=\varphi(x)$; l'énoncé ci-dessus se traduit par :

"Il existe un voisinage V de Γ_1 tel que, pour tout $(x_0,y_0) \in V$, si φ_ε est la solution de (1_ε) issue de (x_0,y_0), alors φ_ε tend vers φ sur $]x_0,b[$, uniformément sur tout compact, lorsque ε tend vers 0 par valeurs positives."

5.2 Canards

Au passage d'une singularité, il peut arriver que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,0)$ change de signe sur une branche de Γ. Si Γ est le graphe d'une fonction φ sur $]a,c[$, supposons par exemple que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x),0)$ soit positive sur $]a,b[$ et négative sur $]b,c[$. Lorsque x croit, Γ est alors attractive, puis répulsive. En général, les trajectoires attirées par Γ sur $]a,b[$ sont violemment éjectées du halo de Γ dans le halo de b. Dans certains cas, il se produit des phénomènes de surstabilité : certaines solutions attirées par Γ et donc restant dans son halo sur un intervalle $]x_0,b[$ continuent à longer Γ sur une partie appréciable de sa partie répulsive : une telle solution est appelée un **canard**.

5.3 Valeurs à canards

Un i-petit positif ε étant maintenant fixé, considérons une famille d'équations

$$\varepsilon y' = F(x, y, a, \varepsilon) \quad (1_a)$$

Supposons que pour $a = a_0$ standard, $F(x, y, a_0, 0)$ présente un point-selle, par exemple à l'origine, où on aurait $F(0, 0) = 0$.

Γ présente alors un point double à l'origine, et en général, dans un voisinage standard de 0, une des branches de Γ est attractive pour $x < 0$ et répulsive pour $x > 0$ (cf. fig.3).

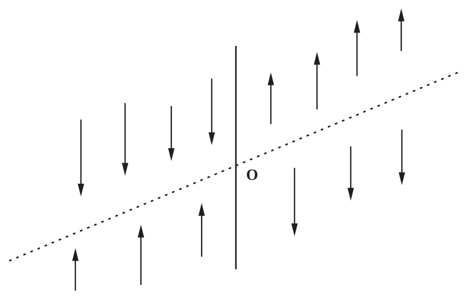

FIG. 3 – Point de Morse à canards

Quand $a \simeq a_0$, la courbe lente de (1_a) est la même que pour a_0. On appelle valeur à canard une valeur de a pour laquelle (1_a) possède des solutions canard.

Une étude de la bifurcation du champ quand a traverse le halo de a_0 montre par un raisonnement du type valeurs intermédiaires que, sous certaines conditions de régularité, il existe nécessairement des valeurs à canard dans le halo de a_0 (cf. fig. 4 à 6).

Les valeurs à canards sont extrêmement rares au sens suivant : si F est de classe $\mathcal{C}^2$ et si le point selle est régulier, les valeurs à canard sont toutes dans la même ε-micro-galaxie — la distance entre deux valeurs à canard est majorée par $e^{-k/\varepsilon}$, où k est un appréciable positif. Dans la pratique, cela se traduit numériquement par le fait que, même pour des valeurs de ε pas très petites (de l'ordre de $1/20$ par exemple) il faut ajuster le paramètre a avec beaucoup de précision (typiquement avec une dizaine de décimales) pour obtenir des trajectoires qui se comportent comme des canards : la chasse au canard est un sport qui requiert beaucoup d'adresse !

On peut parfois obtenir des résultats permettant de prévoir l'endroit où les solutions canard vont sortir du halo de la courbe lente (c'est-à-dire le point standard dans le halo duquel elles sortent) en fonction de leur point d'entrée dans ce halo : c'est ce qu'on appelle le calcul d'une *fonction entrée-sortie* [2].

5.4 Développements en ε-ombres

Il est naturel de chercher à localiser précisément ces valeurs à canard, (à priori, on sait seulement qu'un tel $\bar{a}$ est dans le halo de a_0), c'est-à-dire de trouver des renseignements de nature asymptotique sur les valeurs à canard, et les solutions

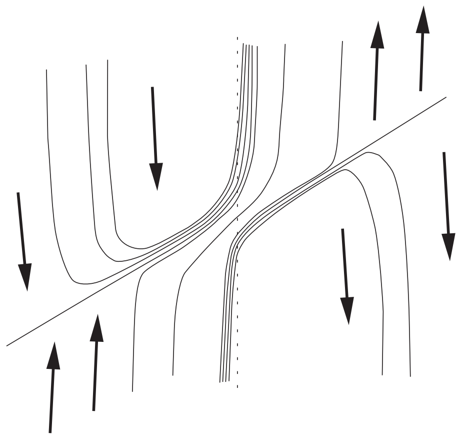

FIG. 4 – $a < \bar{a}$

canard associées. On a besoin pour cela de la notion de **développements en ε-ombres**, équivalents non standard des développements asymptotiques, ou des développements limités.

Définitions

Soit ε un i-petit fixé, a un réel limité, et n un entier standard. On dit que a possède un développement en ε-ombres à l'ordre n s'il peut s'écrire sous la forme

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \cdots + \varepsilon^n (a_n + ø)$$

où $a_1, \cdots, a_n$ sont des réels standard, et où $ø$ désigne un i-petit.

On dit que a possède un développement illimité en ε-ombres s'il existe une suite standard (a_n) telle que, pour tout n standard, on ait

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \cdots + \varepsilon^n (a_n + ø)$$

De même, on dit qu'une fonction $x \mapsto \varphi(x)$ est développable en ε-ombres à l'ordre n sur un intervalle I s'il existe des fonctions standard $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ telles que

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x) + \cdots + \varepsilon^n (\varphi_n(x) + ø)$$

pour tout x standard de I.

Notons qu'un réel limité n'est pas toujours développable en ε-ombre à tout ordre : ainsi $\sqrt{\varepsilon}$ et $1/\log(\varepsilon)$ ne sont même pas développables à l'ordre 1.

On montre que si, en plus des conditions assurant l'existence de valeurs à canards, la fonction F est $\mathcal{C}^\infty$, alors les valeurs à canards possèdent toutes le même développement en ε-ombre, ainsi que les solutions-canard, et que, si F est seulement $\mathcal{C}^{2r}$, ils sont développables à l'ordre r.

Notons qu'en général, les développements illimités obtenus ne convergent pour aucun $\varepsilon > 0$. Cependant, si F est analytique, on peut démontrer qu'ils sont de type Gevrey-1, et donc resommables au sens de Borel-Laplace.

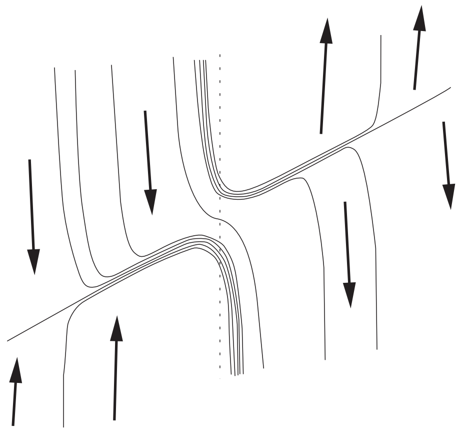

Fig. 5 – $a > \bar{a}$

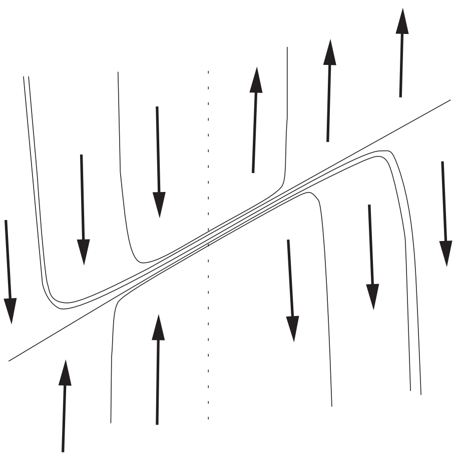

Fig. 6 – $a = \bar{a}$ (valeur à canard)

5.5 Les loupes

Pour calculer explicitement ces développements, on utilise une technique très courante en analyse non standard : **les loupes**.

Définition 1 *On appelle loupe un changement de variable qui opère, dans une direction au moins, un grossissement de facteur i-grand.*

- Par exemple, une homothétie de rapport i-grand centrée en un point permet de rendre "visible" ce qui se passe dans une partie du halo de ce point.
- De même, pour examiner plus finement ce qui se passe dans le halo d'une portion Γ_1 de courbe lente d'équation $y = \varphi_0(x)$, on peut utiliser le changement de variable

$$Y = \omega\,(y - \varphi_0(x)) \qquad (\omega \text{ i-grand})$$

qui est une loupe autour de Γ_1.

Dans le cas d'un champ lent-rapide, si la courbe lente Γ_1 ne contient pas de singularité, en posant $\omega = 1/\varepsilon$, on obtient en général un nouveau champ lent-rapide, avec une nouvelle courbe lente $Y = \varphi_1(x)$. Dans un cas assez général, on peut montrer que les solutions lentes du champ initial suivent également le halo de la courbe lente à cette nouvelle échelle, et l'on en déduit que le développement des solutions lentes à cette nouvelle échelle est

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon(\varphi_1 + \o)$$

Si l'équation initiale est $\mathcal{C}^\infty$, on peut recommencer indéfiniment, ce qui procure, sous quelques hypothèses supplémentaires, un développement illimité en ε-ombres des solutions lentes.

Dans le cas où la courbe lente de l'équation initiale $\varepsilon y' = F(x, y, \varepsilon, a)$ possède un point de Morse avec des solutions canard pour certaines valeurs du paramètre a , on utilise la même technique des loupes successives. On doit de plus ajuster à chaque échelle la valeur du paramètre pour que la nouvelle courbe lente ait encore un point de Morse, ce qui est nécessaire pour que les solutions canard puissent passer de la partie attractive à la partie répulsive de la courbe lente. Cela fournit simultanément le développement en ε-ombres commun à toutes les valeurs à canard, et le développement commun à toutes les solutions canard [10, 29].

Il existe d'autres situations où l'on est amené à trouver une loupe qui transforme le champ initial non plus en un champ lent-rapide, mais en un champ $Y' = F(X, Y)$, où F est presque standard [13, 20]. Dans ce cas, pour étudier le comportement des solutions à cette échelle, on se sert du théorème dit *de l'ombre courte*, qui assure que les solutions de l'équation $Y = F(X, Y)$ passant par des points presque standard ont pour ombre des solutions de l'équation standard $Y' = {}^\circ F(X, Y)$.

Signalons par ailleurs que la technique de loupe est aussi utilisée pour faire apparaître, dans certaines équations standard, des solutions particulières qui ont un type de croissance moins rapide que les autres à l'infini, et que l'on appelle **fleuves** [14, 1, 5, 11, 7].

5.6 Autres objets d'étude

Tout ce que nous venons d'écrire repose sur la notion de perturbation infinitésimale (singulière ou régulière). Ce genre d'idée est également à l'oeuvre dans d'autres domaines, tels que l'étude des moirés (Harthong, Reeb), et différents problèmes relatifs à l'infographie (Holin).

Il existe en analyse non standard bien d'autres types de méthodes ; signalons toute une classe de techniques qui reposent sur l'idée de **discrétisation**. Par ce moyen E.Nelson ramène l'étude des probabilités aux seules probabilités discrètes [23]. D'autres techniques utilisant la discrétisation sont plus proches de l'analyse numérique : citons l'approximation des réels par des rationnels non standard (réels de Hartong-Reeb), ou la représentation des opérateurs linéaires dans les espaces fonctionnels par des matrices de dimension i-grande (Delfini, Ben El Mamoun). Enfin les techniques de stroboscopie (version infinitésimale de la méthode d'Euler dans la résolution approchée des équations diférentielles) sont utilisées dans les problèmes d'oscillation rapide et de moyennisation (Callot, Sari [28, 8]).

M. Goze et A. Makhlouf se servent des techniques non-standard en géométrie algébrique [21], ainsi que pour la classification des algèbres de Lie .

Cette liste est loin d'être exhaustive. Insistons sur le fait que nous n'avons mentionné ici que les travaux fondés sur l'approche Nelsonienne de l'ANS. L'importante école engendrée par l'approche Robinsonienne a abordé encore d'autres sujets (par exemple les espaces de Banach [19], la théorie des nombres [26]...).

En tout état de cause, l'Analyse Non Standard n'est pas une spécialité en soi. Elle fournit avant tout des techniques et un état d'esprit, applicables dans des domaines très divers, et nous ne saurions parler avec compétence de domaines qui nous sont éloignés.

Références

[1] Michèle Artigue, Véronique Gautheron, et Emmanuel Isambert. Une notion non standard d'attracteurs : les fleuves. In M. Diener and G. Wallet, éditeurs, *Mathématiques Finitaires et Analyse Non Standard*, pages 191–208. Publications Mathématiques de Paris VII, 31 :2, 1989.

[2] Eric Benoit. Relation entrée-sortie. *C.R.Acad.Sci. Paris*, 293(Série 1) :293–296, 1981.

[3] Eric Benoit, Jean Louis Callot, Francine Diener, and Marc Diener. Chasse au canard. *Collectanea Mathematica, Barcelone*, 31(1-3) :37–119, 1981.

[4] Imme P. Van den Berg. *Nonstandard Asymptotic Analysis*, volume 1249 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1987.

[5] Imme P. Van den Berg. On solutions of polynomial growth of ordinary differential equations. *J. Diff. Equ.*, 81 :368–402, 1989.

[6] Imme P. Van den Berg. Extended use of IST. *Annals of Pure and Applied Logic*, 58 :73–92, 1992.

[7] François Blais. Fleuves critiques. *C.R.Acad.Sci. Paris*, 307(Série 1) :439–442, 1988.

[8] Jean-Louis Callot et Tewfik Sari. Stroboscopie infinitésimale et moyennisation dans les systèmes d'équations différentielles à solutions rapidement oscillantes. In I. D. Landau, éditeur, *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal, tome 3*, pages 345–353. Editions du CNRS, 1983.

[9] André Deledicq et Marc Diener. *Leçons de calcul infinitésimal.* Collection "U". Armand Colin (Paris), 1989.

[10] Francine Diener. Développements en ε-ombres. In I. D. Landau, éditeur, *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal, tome 3*, pages 315–328. Editions du CNRS, 1983.

[11] Francine Diener et Marc Diener. Fleuves 1-2-3 : mode d'emploi. In Marc Diener and Guy Wallet, éditeurs, *Mathématiques Finitaires et Analyse Non Standard*, pages 209–216. Publications Mathématiques de l'Université de Paris VII, 31 :2, 1989.

[12] Francine Diener et Georges Reeb. *Analyse Non Standard.* Hermann, 1989.

[13] Marc Diener. Loupes désingularisantes et fleuves. *SIAM Journ. Math. Anal.*, 25 :148–173, 1993.

[14] Marc Diener et Georges Reeb. Champs polynômiaux : nouvelles trajectoires remarquables. *Bull. Soc. Math. Belgique*, 38 :131–150, 1987.

[15] Marc Diener et Guy Wallet, éditeurs. *Mathématiques finitaires et analyse non standard.* Publications mathématiques de l'université Paris 7, 1989. Vol. 31-1, 31-2.

[16] Augustin Fruchard. Canards discrets. *C.R.Acad.Sci. Paris*, 307 (Série 1) :41–46, 1988.

[17] Véronique Gautheron et Emmanuel Isambert Nonstandard dynamical systems. Shadows of trajectories and abstract rivers. *Collectanea Mathematica*, 45,3 :205–243, Barcelone 1994

[18] Karel Hrbacek. Nonstandard set theory. *Math. Monthly*, pages 659–677, 1979.

[19] Albert Hurd, editor. *Nonstandard analysis. Recent developments.* Springer Lecture Notes in Mathematics 983, 1983.

[20] Emmanuel Isambert. Non-smooth Ducks and regular perturbations of Rivers. A paraître dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996.

[21] Robert Lutz et Michel Goze. *Non standard analysis : a practical guide with applications.*, volume 881 of *Lectures Notes in Math.* Springer, 1982.

[22] W.A.J. Luxemburg et K.D. Stroyan. *Introduction to the theory of infinitesimals.* London Academic Press, 1976.

[23] Edward Nelson. *Radically elementary probabilities*

[24] Edward Nelson. Internal set theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83 :1165–1198, 1977.

[25] Alain Robert. *Analyse Non Standard.* Presses polytechniques romandes, 1985.

[26] A. Robinson et P. Roquette. On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning diophantine equations. *Journal of Number Theory*, 7 :121–176, 1975.

[27] Abraham Robinson. *Non standard analysis.* North Holland, Amsterdam, 1966.

[28] Tewfik Sari. Sur la théorie asymptotique des oscillations non stationnaires. In *IIIe rencontre de géométrie du Schnepfenried*, pages 141–158. Astérisque 109-110, Société Mathématique de France, 1983.

[29] A.K. Zvonkin and M.A. Shubin. Non standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Russian Math. Surveys*, 39(2) :69–131, 1984.

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII
F-93430 Villetaneuse
France.