Champs des vecteurs remarquables dans l'algebre de déformation: rétrospective et perspective

Liviu Nicolescu

Abstract

Dans §1 on présente quelques éléments géométriques dans l'algèbre de déformation (champs spéciaux, principaux, presque spéciaux et presque principaux). Ces champs permettent de donner une définition géométrique de la connexion de Weyl généralisee (§2). Les champs ξ-subcaractéristiques dans l'algèbre de déformation de deux connexions linéaires (§3) nous permettent d'obtenir des extensions des théorèmes clasiques (Beltrami, Vranceanu, Siniukov, Venzi) relativement aux espaces de Riemann en représentation géodésique. Dans la suite on introduit les champs presque F-principaux (§4). Ces champs permettent de donner une définition géométrique des connexions presque F-principales sur une variété pseudo- riemannienne (§5) en géneralisant des resultats de Golab, de Mishra et de Pandey relativement aux connexions sémi-symetriques et quart-symétriques. En utilisant les champs introduits dans §1 et §4 nous presentons dans §6 des:

i) caractérisations des hypérsurfaces sphériques dans l'espace euclidien E_{n+1}

ii) caractérisations des espaces de Riemann (M, g) $(dimM = 2)$ à courbure constante (non nulle).

En plus dans §6 on présente un théorèmes relativement aux connexions Cartan-Schouten sur un groupe de Lie.

Dans §7 on présente quelques problèmes ouverts.

Mathematics Subject Classification: 53B05
Key words: Riemannian metric, linear connection, deformation algebra

Introduction

Soit M une variété C^∞-différentiable reelle à n dimensions. On note par $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ l'anneau des fonctions reelles, différentiables, définies sur M et par $\mathcal{T}_{\int}^{\nabla}(\mathcal{M})$ le $\mathcal{F}(\mathcal{M})$-module des champs de tenseurs de type (r, s) sur M. Particuliérement, pour $\mathcal{T}_{\prime}^{\infty}(\mathcal{M})$ (resp. $\mathcal{T}_{\infty}^{\prime}(\mathcal{M})$) on emploie de même la notation $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ (resp.

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.1, No.1, 1996, pp. 47-60

$\bigwedge^1(M))$. Soient ∇ et $\bar{\nabla}$ deux connecions linéaires sur M et soit $A = \bar{\nabla} - \nabla$. Si on définit le produit de deux champs de vecteurs X et Y par la formule

$$X \circ Y = A(X, Y) \tag{0.1}$$

alors le $\mathcal{F}(\mathcal{M})$-module $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ devient une $\mathcal{F}(\mathcal{M})$-algèbre. L'algèbre définie par la formule (0,1) s'appelle *l'algèbre de déformation* du couple de connexions $(\nabla, \bar{\nabla})$ et sera note par $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ [26].

Soit $\rho \in \mathcal{T}_{\ni}^{\infty}(\mathcal{M})$ (resp. $k \in \mathcal{T}_{\ni}^{\infty}(\mathcal{M})$) le champ tensoriel de la courbure mixte (resp. de la courbure de déformation) définit par

$$2\rho(X, Y)Z = \nabla_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \nabla_X Z + \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z -$$

$$-\nabla_Y \bar{\nabla}_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{0.2}$$

$$4K(X, Y), Z = A(X, A(Y, Z)) - A(Y, A(X, Z)) \tag{0.3}$$

On a les idéntities de Vaisman [26]

$$2\rho + 4K = R + \bar{R}, \quad \rho + K = R^m, \quad 2\rho = 4R^m - R - \bar{R}, \tag{0.4}$$

ou $R, \bar{R}, R^m$ sont les champs tensoriels de courbure de $\nabla, \bar{\nabla}, \overset{m}{\nabla} = \frac{1}{2}(\nabla + \bar{\nabla})$.

1 Quelques éléments géometriques dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$

Considérons l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, oú $A = \bar{\nabla} - \nabla$.
Définition 1.1 [10]. Un element $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ s'appelle champ presque principal dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ et une 1-forme ω sur M tel que

$$A(Z, X) = fZ + \omega(Z)X, \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M}). \tag{1.1}$$

Remarque 1.2. i) Si $f = 0$, alors (1.1) nous montre que X est un champ principal [13]

ii) Si $\omega = 0$ alors (1.1) nous montre que X est un champ presque spécial [12]

iii) Si $f = 0$ et $\omega = 0$, alors (1.1) nous montre que X est un champ spécial [13]

iv) Si $A(X, X) = 0$, alors X s'appelle champ 2-nilpotent [13]

Remarque 1.3. i) L'ensemble $S(M)$ (resp. $S'(M)$) des chapms speciaux (resp. presque speciaux) dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est un $\mathcal{F}(\mathcal{M})$-sous module du module $\mathcal{X}(\mathcal{M})$

ii) Soit $P(M)$ l'ensemble des champs principaux dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et soit $\omega_0 \in \mathcal{T}'_{\infty}(\mathcal{M})$. Alors l'ensemble:

$$\{X \in P(M) : A(Z, X) = \omega_0(Z)X, \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})\}$$

est un $\mathcal{F}(\mathcal{M})$-sous module du module $\mathcal{X}(\mathcal{M})$.

iii) Soit $P'(M)$ l'ensemble des champs presque principaux dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ et soit $\omega_0 \in \mathcal{T}'_\infty(\mathcal{M})$. Alors l'ensemble:

$$\{X \in P'(M) : A(Z,X) = f_X Z + \omega_0(Z)X, \quad (\forall) Z \in (M)\}$$

est un $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ sous-module du module $\mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Remarque 1.4. i) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ 2-nilpotent si et seulement si l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est anticommutative.

ii) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ spécial si et seulement si $A = 0$.

iii) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ presque spécial si et seulement s'il existe une 1-forme η sur M tel que $A = \delta \otimes \eta$.

iv) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ principal si et seulement si'l existe 1-forme ω sur M tel que $A = \omega \otimes \delta$.

v) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ presque principal si et seulement s'il existe $\omega, \eta \in \mathcal{T}'_\infty(\mathcal{M})$ tel que $A = \omega \otimes \delta + \delta \otimes \eta$.

Proposition 1.5. Soit $X \in \mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$.

i) Les propriétés suivantes sont équivalentes: $(i_1)X$ est un champ spécial et ∇-concourant: $(i_2)X$ est un champ spécial et $\bar{\nabla}$-concourant: $(i_3)X$ est un schamp ∇-concourant et $\bar{\nabla}$-concourant;

ii) Les propriétés suivantes son équivalentes: $(ii_1)X$ est un champ principal et ∇-recurrent: $(ii_2)X$ est un champ principal et $\bar{\nabla}$- recurrent: $(ii_3)X$ est un champ ∇-recurrent et $\bar{\nabla}$- recurrent;

iii) Les propriétés suivantes sont équivalentes: $(iii_1)X$ est un champ presque principal et ∇-torse: $(iii_2)X$ est un champ presque principal et $\bar{\nabla}$-torse: $(iii_3)X$ est un champ ∇-torse et $\bar{\nabla}$ -torse.

2 L'algèbre de Weyl. La connexion de Weyl généralisée

Soit g une métrique pseudoriemannienne sur la variété M $(dimM = n)$ et soit $\hat{g}$ la structure conforme engendrée par g, c'est-à-dire $\hat{g} = \{e^u : u \in \mathcal{F}(\mathcal{M})\}$. Soit W une structure de Weyl sur la variete conforme $(M,\hat{g})$, c'est-à-dire une application $W : \hat{g} \to \mathcal{T}'_\infty(\mathcal{M})$ qui verifie [2]

$$W(e^u g) = W(g) - du, \quad (\forall) u \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

Soit $(M,\hat{g},W)$ une variété de Weyl. On dit [2] qu'une connexion linéaire ∇ sur M est compatible avec la structure de Weyl W si pour tout $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ on a $\nabla_X g + W(g)(X)g = 0$.

On sait qu'il existe une connexion linéaire unique ∇ sur M, symétrique, compatible avec la structure de Weyl W. La connexion ∇ est donnee par la formule [23]

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + \tag{2.1}$$

$$+W(g)(X)g(Y,Z)+W(g)(Y)g(X,Z)-W(g)(Z)g(X,Y)+$$
$$+g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)-g([Y,Z],X).$$

Soit ∇^0 la connexion de Levi-Civita associée à g et soit ∇ la connexion symetrique de Weyl donnée par la formule (2.1). Notons par $A=\nabla-\nabla^0$ le tenseur de déformation de la paire (∇^0,∇).

Définition 2.1. L'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ s'appelle l'algèbre de Weyl.

Théorème 2.2. *Considérons l'algèbre de Weyl* $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ $(dimM=n\geq 3)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:* (i) *Tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ *est un champ presque principal,* (ii) *Tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ *est un champ principal,* (iii) *Tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ *est un champ presque spécial,* (iv) *Tout élément de l'algèbre* $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ *est un champ spécial,* (v) *Tout élément de l'algebre* $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ *est un champ 2-nilpotent,* (vi)*L'algèbre de Weyl* $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ *est associative,* (vii) ∇ *et* ∇^0 *possèdent les mêmes géodésiques,* (viii) ∇^0 *et* ∇ *conduisent au même tenseur de courbure, lorsque Ric g est non dégénéré,* (ix) ∇^0 *et* ∇ *conduisent au meme tenseur de Ricci, lorsque Ric g est son d—"egénéré et la 1-forme* $W(g)$ *est fermee,* (x) *La connexion symetrique de Weyl coincide avec la connexion de Levi-Civita.*

Démonstration. Voir [13]

Définition 2.3. Soit $(M,\hat{g},W)$ une variété de Weyl et soit ∇ la connexion linéaire sumétrique compatible avec la structure de Weyl W. On dit qu'une connexion linéaire $\bar{\nabla}$ sur M est une connexion de Weyl généralisée, si tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\bar{\nabla}-\nabla)$ est un champ presque principal.

Remarque 2.4. i) En utilisant le remarque 1.3 v) et la formule (2.1) on obtient que $\bar{\nabla}$ est la connexion de Weyl généralisée si et seulement s'il existe deux 1-formes $\omega,\eta\in\mathcal{T}'_\infty(\mathcal{M})$ telles que pour tout $X,Y,Z\in\mathcal{X}(\mathcal{M})$ on a

$$2g(\bar{\nabla}_XY,Z)=X(g(Y,Z))+Y(g(X,Z))-Z(g(X,Y))+(W(g)(X)+ \tag{2.2}$$
$$+2\omega(X))g(Y,Z)+(W(g)(Y)+2\eta(Y))g(X,Z)-W(g)(Z)g(X,Y)+$$
$$+g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)-g([Y,Z],X).$$

Il est facile de vérifier que la connexion $\bar{\nabla}$ ne dépend pas essentiellement de g, mais seulement de $\hat{g}$.

ii) Soit $\nabla,\bar{\nabla}$ comme plus hant et soit ∇^0 la connexion de Levi-Civita associée a g. Les algèbras $\mathcal{U}(\mathcal{M},\nabla-\nabla')$ et $\mathcal{U}(\mathcal{M},\bar{\nabla}-\nabla')$ ont les mêmes champs presque principaux.

iii) Soit $\bar{T}\in\mathcal{T}^\infty_\in(\mathcal{M})$ le champ tensoriel de torsion de $\bar{\nabla}$. En utilisant (2.2) on a

$$\bar{T}(X,Y)=\theta(X)Y-\theta(Y)X,\quad (\forall)X,Y\in\mathcal{X}(\mathcal{M})$$

ou $\theta=\omega-\eta\in\mathcal{T}'_\infty(\mathcal{M})$, donc $\bar{\nabla}$ est une connexion semi-symétrique.

iv) Si $\omega=\eta=0$, alors $\bar{\nabla}$ coincide avec la connexion symétrique de Weyl.

v) Soient $g_{ij},|^i_{jk}|,\bar{\Gamma}^i_{jk},2\xi_i,\eta_i$, resp. ω_i les composantes locales de g,∇^0, $\bar{\nabla},W(g),\eta$, resp. ω, dans un système de coordonnées locales. Alors la relation (2.2) s'ecrit en coordonnées locales:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}=|^i_{jk}|+\delta^i_j\psi_k+\delta^i_k\sigma_j-g_{jk},\xi^i,$$

où an a note
$$\psi_i = \xi_i + \eta_i, \quad \sigma_j = \xi_j + \omega_j, \quad \xi^i = g^{ij}\xi_j.$$

vi) La connexion $\bar{\nabla}$ de (2.2) est une connexion symétrique si et seulement si $\omega = \eta$. Dans ce cas les composantes de $\bar{\nabla}$ s'écrivent:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = |^{\,i}_{jk}| + \delta^i_j \sigma_k + \delta^i_k \sigma_j - g_{jk}\xi^i$$

3 Champs ξ-subcaractéristiques dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Applications

Considerons l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et soit $\xi \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.
Définition 3.1. Un élément $X \in \mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ s'appelle champ ξ- subcaractéristique s'il existe deux fonction $\lambda, \mu \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ telles que [17]

$$A(X, X) = \lambda X + \mu \xi \tag{3.1}$$

Remarque 3.2. Si $\mu = 0$, alors (3.1) nous montre que X est un champ caractéristique [14], [16].
Proposition 3.3. Soient $\nabla, \bar{\nabla}$ deux connexions linéaires symétriques sur $M, A = \bar{\nabla} - \nabla$ et soit $\xi \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est un champ ξ-subcaractéristique.

(ii) Les connexions ∇ et $\bar{\nabla}$ possedent les mêmes courbes ξ-subantoparallèles.

(iii) Il existe $\omega \in \mathcal{T}'_\infty(\mathcal{M})$ et $\varphi \in \mathcal{T}'_\in(\mathcal{M})$,

$$\varphi(X, Y) = \varphi(Y, X), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

tels que:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X)Y + \omega(Y)X + \varphi(X, Y)\xi, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}) \tag{3.2}$$

Remarque 3.2. Soient $\bar{\Gamma}^i_{jk}, \Gamma^i_{jk}, \omega_k, \varphi_{ij}$ resp. ξ^i les composantes de $\bar{\nabla}, \nabla, \omega, \varphi$, resp. ξ dans un système de coordonnées locales. Alors la relation (3.2) s'écrit en coordonnees locales:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \omega_k + \delta^i_k \omega_j + \varphi_{jk}\xi^i \tag{3.2$'$}$$

La transformation (3.2)$'$ des composantes de la connexion linéaires, conserve donc les courbes ξ-subautoparallèles. On applle (3.2)$'$ avec K.Yano [17], [30], la transformation subprojective de la connexion.
Remarque 3.3. Considérons deux espaces de Riemann $V_n, \bar{V}_n$ ayant, respectivement pour métrique $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}dx^i dx^j$ et soit ξ^i un champ de vecteurs. Soient $|^{\,i}_{jk}|$, resp. $\overline{|^{\,i}_{jk}|}$ les symboles de Christoffel de la seconde espace de V_n, resp. $\bar{V}_n$. Il en resulte que V_n et $\bar{V}_n$ ont les mêmes courbes ξ-subgéodésiques si et seulement si nous avons les formules de Yano:

$$\overline{|^{\,i}_{jk}|} = |^{\,i}_{jk}| + \delta^i_j \omega_k + \delta^i_k \omega_j + \varphi_{jk}\xi^i \tag{3.3}$$

Dans la suite nous suppons que $\varphi_{jk} = g_{jk}$, donc nous avons

$$(3.4) \qquad \overline{|^{i}_{jk}|} = |^{i}_{jk}| + \delta^{i}_{j}\omega_k + \delta^{i}_{k}\omega_j + g_{jk}\xi^{i}$$

De (3.4) il resulte qu'il existe une fonction $u(x^1, ..., x^n)$, telle que [19]

$$\xi_i = g_{ik}\xi^k = \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

Nous avons resultat suivantes [19]:
Théorème 3.1. *Si les espaces de Riemann $V_n(g_{ij}), \bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ sont liées par les formules (3.4) et si l'équation $det(\bar{g}_{ij} - r^2 g_{ij}) = 0$ a des racines distinctes, alors les métriques des espaces V_n et $\bar{V}_n$ peuvent être réduites à les formes canoniques*

$$(3.5) \qquad ds^2 = e^{2u}\{a_1(x^1)f'(x^1)(dx^1)^2 + ... + +a_n(x^n)f'(x^n)(dx^n)^2\},$$

$$d\bar{s}^2 = (x^1...x^n)^{-1}\{a_1(x^1)f'(x^1)(x^1)^{-1}(dx^1)^2 + ...+$$
$$+a_n(x^n)f'(x^n)(x^n)^{-1}(dx^n)^2\},$$

où $f(x) = (x - x^1)...(x - x^n), f'(x)$ signifie la dérivée de f par rapport a x et où u est une fonction de variables $x^1...x^n$.
Remarque 3.4 i) Les formes canoniques (3.5), avec $u = 0$, ont été données par T.Levi-Civita (Voir G.Vranceanu [27]). Donc (3.5) généralisent les formules de Levi-Civita.

ii) Si l'on change les variables en pasant $x^i = \varphi_i(y^i)$ ou $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sont respectivement, fonctions des variables $y^1, ..., y^n$, on pent ecrive les metriques (3.5) sons la forme

$$ds^2 = e^{2u}\{\varepsilon_1 f'(\varphi_1)(dy^1)^2 + ... + \varepsilon_n f'(\varphi_n)(dy^n)^2\},$$

$(3.5)'$

$$d\bar{s}^2 = (\varphi_1...\varphi_n)^{-1}\{\varepsilon_1(\varphi_1)^{-1}f'(\varphi_1)(dy^1)^2 + ...+$$
$$+\varepsilon_n(\varphi_n)^{-1}f'(\varphi_n)(dy^n)^2\}$$

où $\varepsilon_1, ...\varepsilon_n$ sont egaux à ± 1. Dans le cas $n = 2$, les formules $(3.5)'$ s'écrivent

$$ds^2 = e^{2u}(V - \mathcal{U})(\lceil\dagger^{\infty})^{\in} + (\lceil\dagger^{\in})^{\in}$$

$(3.5)''$

$$d\bar{s}^2 = (\mathcal{U}^{-\infty} - \mathcal{V}^{-\infty})\{\mathcal{U}^{-\infty}(\lceil\dagger^{\infty})^{\in} + \mathcal{V}^{-\infty}(\lceil\dagger^{\in})^{\in}\}$$

où $\mathcal{U}$ est une fonction seulement de la variable y^1 et V de y^2. Si $u = 0$, alors les formules $(3.5)''$ coincident avec les formules de Dini [27], des surfaces S et $\bar{S}$ applicables géodésiquement.

Nous avons aussi le théorème suivant [19].
Théorème 3.2 *Si les espaces de Riemann $V_n(g_{ij}), \bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ sont liees par les formules (3.4) et si l'équation $det(\bar{g}_{ij} - r^2 g_{ij}) = 0$ a $m < n$ racines égales, alors les métriques des espaces V_n et $\bar{V}_n$ peuvent être réduites à les formes canoniques:*

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} ds^2 = e^{2u}\{&a_i(x^i)F'(x^i)(dx^i)^2 + F(c^2)c_\lambda(x^{m+1},...,x^p)dx^\lambda dx+\\ &+F(K^2)c_{\alpha'\beta'}(x^{p+1},...,x^n)dx^{\alpha'}dx^{\beta'}\}\\ d\bar{s}^2 = (x^1...x^m)^{-1}\{&a_i(x^i)(x^i)^{-1}F'(x^i)(dx^i)^2+\\ &+c^{-2}F(c^2)c_{\lambda\mu}(x^{m+1},...,x^p)dx^\lambda dx^\mu+\\ &K^{-2}F(K^2)c_{\alpha'\beta'}(x^{p+1},...,x^n)dx^{\alpha'}dx^{\beta'}\} \end{aligned}$$

où c^2, K^2 = des constantes non nulles;

$$F(x) = (x-x^1)...(x-x^m); 1 \le i \le m; m+1 \le \lambda, \mu \le p; p+1 \le \alpha', \beta' \le n$$

et où u est une fonction de variables $x^1, ..., x^n$.

Remarque 3.5. i) Les formes canoniques (3.6), avec $u = 0$, ont été données par G.Vrănceanu [27]. Donc (3.6) généralisent les formules de Vrănceanu.

ii) Il est facile de voir comment on doit modifier les formules (3.6) dans le cas où il y a plus de deux invariants $r_{m+1}, ..., r_n$ distincts. De même si tous les invariants $r_{m+1}, ..., r_n$ sont égaux, nous avons les formules

$$(3.6)'\qquad \begin{aligned} ds^2 = e^{2u(x^1,...,x^n)}\{&a_i(x^i)F'(x^i)(dx^i)^2+\\ &+F(c^2)c_{\alpha\beta}(x^{m+1},...,x^n)dx^\alpha dx^\beta\}\\ d\bar{s}^2 = (x^1...x^m)^{-1}\{&a_i(x^i)(x^i)^{-1}F'(x^i)(dx^i)^2+\\ &+c^{-2}F(c^2)c_{\alpha\beta}(x^{m+1},...,x^n)dx^\alpha dx^\beta\} \end{aligned}$$

Les formules (3.6) sont de la forme $(3.6)'$ si $c = k$.

Nous avons le théorème suivant [19].

Théorème 3.3. Soient $V_n(g_{ij})$ et $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})(n \ge 3)$ deux espaces de Riemann. Supposons que V_n et $\bar{V}_n$ sont liees par les formules (3.4) et que $\omega_i + \xi_i \ne 0$. Alors:

i) Il existe une fonction u des variables $x^1, ..., x^n$ telle que

$$\xi_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

ii) Si l'espace $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ est à courbure constante, alors l'espace $\tilde{V}_n(e^{-2u}g_{ij})$ est à courbure constante

iii) Si $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ est un espace symètrique dans le sens de Cartan, alors les espaces $\tilde{V}_n(e^{-2u}g_{ij})$ et $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ sont à courbure constante

iv) Si $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ est un espace récurrent, alors les espaces $\tilde{V}_n(e^{-2u}g_{ij})$ et $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ sont à courbure constante

v) Si $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ est un espace B-birécurrent et à tenseur de courbure irreductible, alors les espaces $\tilde{V}_n(e^{-2u}g_{ij})$ et $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ sont à courbure constante

vi) Si $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ est S-variété à tenseur de courbure irreductible alors les espaces $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij})$ et $\tilde{V}_n(e^{-2u}g_{ij})$ sont à courbure constante.

Remarque 1) Pour $\xi^i = 0$ les formules (3.4) nous montrent que les espaces de Riemann V_n et $\bar{V}_n$ sont en répresentation géodésique

2) Si dans (3.4) nous avons $\xi^i = 0$, alors les afirmations ii), iii), iv) et v) se reduisent respectivement aux théorèmes de Beltrami [28], de Siniukov [28], de Venzi [22] et de Hirică [4]. Donc le théorème 3.3 généralisent les résultats de Beltrami, de Siniukov, de Vensi et de Hirică.

4 Champs presque F-principaux

$A \in \mathcal{T}_{\in}^{\infty}(\mathcal{M})$ et $F \in \mathcal{T}_{\infty}^{\infty}(\mathcal{M})$.
Définition 4.1. Un champ $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ s'appelle champ presque F-principal dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ s'il existe deux 1-formes $\omega, \eta \in \Lambda^1(M)$ telles que:

$$A(Z, X) = \omega(Z)X + \eta(Z)F(X), \quad (\forall)Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M}). \tag{4.1}$$

Remarque 4.2.
4.2.1. Si $\eta = 0$ et $\omega = 0$, alors (4.1) nous montre que X est un champ spécial dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.
4.2.2. Si $\eta = 0$, alors (4.1) nous montre que X est un champ principal dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.
4.2.3. Si $\omega = 0$, alors X est un champ F-principal dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.
4.2.4. Soient $\omega_0, \eta_0 \in \Lambda^1(M)$ et soit $P'(M, F)$ l'ensemble des champs presque F-principaux dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Alors l'ensemble

$$\{X \in P\prime(M, F) : A(Z, X) = \omega_0(Z)X + \eta_0(Z)F(X), \quad (\forall)Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})\}$$

est une $\mathcal{F}(\mathcal{M})$-sous module du module $\mathcal{X}(\mathcal{M})$.
Définition 4.3. Soit $X \in P'(M, F)$. Si les vecteurs X_p et $F_p(X_p)$ sont indépendants pour tout $p \in M$, alors X s'appelle champ presque F-principal de directions. Les trajectoires des champs presque F-principaux de directions sont appellees courbes presque F-principales.
Proposition 4.4. Soient l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et le champ tensoriel $F \in \mathcal{T}_{\infty}^{\infty}(\mathcal{M})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est un champ presque F-principal.
(ii) Il existe deux 1-formes $\omega, \eta \in \Lambda^1(M)$ t.q.

$$A = \omega \otimes \delta + \eta \otimes F. \tag{4.2}$$

Démonstration. Evidemment.
Définition 4.5. Si tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est un champ presque F-principal, alors $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ s'appelle algèbre presque F-principale.
Proposition 4.6. Si $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est une algèbre presque F-principale et $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est commutative, alors il existe deux 1-formes $\sigma, \theta \in \Lambda^1(M)$ t.q.

$$A = \sigma \otimes \delta + \delta \otimes \sigma + \theta \otimes F + F \otimes \theta. \tag{4.3}$$

Démonstration. Voir [18].
Définition 4.7. Soit ∇ une connexion linéaire sur M et soit $F \in \mathcal{T}_{\infty}^{\infty}(\mathcal{M})$. Un élément $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ s'appelle champ (∇, F)-récurrent s'il existe $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M)$ t.q.

$$\nabla_Z X = \alpha(Z)X + \beta(Z)F(X), \quad (\forall)Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M}).$$

Soit ∇ une connexion linéaire sur M. Considérons les connexions linéaires ∇^1, ∇^2 définies par

$$\nabla^1 = \nabla - \frac{1}{2}A, \quad \nabla^2 = \nabla + \frac{1}{2}A.$$

Relatif à la paire (∇^1, ∇^2) on a

Proposition 4.8. Soit $X \in \mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) X est un champ presque F-principal et (∇^1, F)-récurrent.

(ii) X est un champ presque F-principal et (∇^2, F)-récurrent.

(iii) X est un champ (∇^1, F)-récurrent et (∇^2, F)-récurrent.

5 Conexions presque F-principales sur une variété pseudo-riemannienne

Soient (M, g) une variete pseudo-riemannienne a n dimensions, $\Theta \in \Lambda^1(M)$ et $F \in \mathcal{T}^\infty_\infty(\mathcal{M})$.

Définition 5.1.. Une coneexion linéaire ∇ sur M s'appelle la connexion de Golab associée à (Θ, F) si pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ on a [3], [7]

$$(5.1) \qquad \nabla_x g = 0 \text{et} T(X,Y) = \Theta(Y)F(X) - \Theta(X)F(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

ou $T \in \mathcal{T}^\infty_\in(\mathcal{M})$ est le champ tensoriel de torsion de ∇.

Remarque 5.2.. Il est conuu [7] que etant données une variété pseudo-riemannienne (M, g), une 1-forme $\Theta \in \Lambda^1(M)$ et un champ tensoriel $F \in \mathcal{T}^\infty_\infty(\mathcal{M})$, alors il existe une unique connexion de Golab associée à (Θ, F). Si nous notons par ∇^0 la connexion de Levi-Civita associee a g, alors la connexion de Golab associée à (Θ, F) est donnée par la formule [7]:

$$(5.2) \qquad \nabla_X Y = \nabla^0_X Y + \Theta(Y)F(X) - S(X,Y)P, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

ou

$$(5.3) \qquad g(P, X) = \Theta(X), \quad S(X,Y) = g(F(X), Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}).$$

Définition 5.3. Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne à n dimensions, $\Theta \in \Lambda^1(M)$ et $F \in \mathcal{T}^\infty_\infty(\mathcal{M})$. Soit ∇ la connexion de Golab associée à (Θ, F). On dit qu'une connexion linéaire $\bar{\nabla}$ sur M est une connexion presque F-principale si tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \bar{\nabla} - \nabla)$ est un champ presque F-principal.

Remarque 5.4.. En utilisant la proposition 4.6 il en résulte que $\bar{\nabla}$ est une connexion presque F-principale si et seulement s'il existe deux 1-formes $\omega, \eta \in \Lambda^1(M)$ t.q.

$$(5.4) \qquad \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X)Y + \eta(X)F(X), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}).$$

De (5.2) et (5.4) on obtient pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ la formule:

$$(5.5) \qquad \bar{\nabla}_X Y = \nabla^0_X Y + \omega(X)Y + \Theta(Y)F(X) + \eta(X)F(Y) - S(X,Y)P.$$

Théorèm 5.5 *Les algèbres $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \nabla - \nabla')$ et $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \bar{\nabla} - \nabla')$ ont les mêmes champs presque F-principaux.*

Démonstration. On note $A = \nabla - \nabla^0, \bar{A} = \bar{\nabla} - \nabla^0$. En utilisant les formules (5.2) et (5.5) on obtient pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ les relations:

$$(5.2)' \qquad A(X,Y) - \Theta(Y)F(X) - S(X,Y)P,$$

$$(5.5') \qquad \bar{A}(X,Y) = \omega(X)Y + \eta(X)F(Y) + \Theta(Y)F(X) - S(X,Y)P$$

De $(5.2)'$ et $(5.5)'$ on a:

$$\bar{A}(X,Y) - A(X,Y) = \omega(X)Y + \eta(X)F(Y), \quad (\forall)X,Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

d'où l'on tire facilement le résultat du théorème 5.5.

Exemple 5.6.. Soient (M,g) une variété pseudo-riemannienne, ∇^0 la connexion de Levi-Civita associée à g, Ric le champ tensoriel de Ricci, K l'invariant de Ricci. Considérons la 1-forme $\Theta \in \Lambda^1(M)$ définie par $\Theta(X) = \nabla^0_X K, \quad (\forall)X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ et soit $F \in \mathcal{T}^\infty_\infty(\mathcal{M})$ définit par la formule

$$g(F(X),Y) = Ric(X,Y), \quad (\forall)X,Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}).$$

Alors, la connexion de Golab ∇ associée à (Θ, F) est donnée par la formule [3], [7]

$$\nabla_X Y = \nabla^0_X Y + \Theta(Y)F(X) - Ric(X,Y)P, \quad (\forall)X,Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

où $g(P,Z) = \omega(Z), \quad (\forall)Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Soient $\omega, \eta \in \Lambda^1(M)$ deux 1-formes arbitraires. Alors la connexion linéaire $\bar{\nabla}$ définiée par la formula

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla^0_X Y + \omega(X)Y + \Theta(Y)F(X) + \eta(X)F(X) - Ric(X,Y)P, (\forall)X,Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

est une connexion presque F-principale.

6 Applications

Théorème 6.1.. *Soit M une hypersurface dans l'espace euclidien $E_{n+1}(n \geq 2)$. Soit g, resp. b la première, resp. la deuxième forme fondamentale. Supposons que b est non dégénérée. Soit $\nabla(I)$, resp. $\nabla(II)$ la connexion linéaire associée à g, resp. b et soit $A = \nabla(II) - \nabla(I)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ presque principal;

(ii) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ principal;

(iii) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ presque spécial;

(iv) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un cahmp spécial;

(v) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ 2-nilpotent;

(vi) M est une hypersurface sphérique;

(vii) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ F-principal, où F est l'application de Weingauten de M.

Démonstration. Voir [18].

Théorème 6.2.. *Soit (M,g) un espace pseudo-riemannien à deux dimensions dont le tenseur de Ricci S est non dégénéré. Soit ∇, resp. $\bar{\nabla}$ la connexion linéaire associée à g, resp. S et soit $A = \bar{\nabla} - \nabla$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ presque principal
(ii) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ principal,
(iii) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ spécial,
(iv) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ presque spécial,
(v) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ est un champ 2-nilpotent,
(vi) ∇ et $\bar{\nabla}$ possedent les mêmes géodésiques,
(vii) (M,g) est un espace a courbure constante (non nulle).

Démonstration.. Voir [13].

Théorème 6.3.. *Soit G un groupe de Lie et soit $\{E_1,...E_n\}$ une base dans l'algèbre de Lie $L(G)$ de G. Considérons les connexions linéaires de Cartan-Schonten $\bar{\nabla},\nabla^+,\nabla^0$ definiées par*

$$\bar{\nabla}_{E_i}E_j=0,\quad \nabla^+_{E_j}E_j=[E_i,E_j],\quad \nabla^0_{E_i}E_j=\frac{1}{2}[E_i,E_j],\quad (\forall)i,j\in\{1,...,n\}$$

Soit ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique de Riemann g sur G, definiée par $g(E_i,E_j)=\delta_{ij},(\forall)i,j\in\{1,...,n\}$. Soit K, resp.ρ, le champ tensoriel de la courbure de déformation ((resp. de la courbure mixte) du couple de connexions $(\nabla^+,\bar{\nabla})$. Alors:

i) Les proprietes suivantes sont équivalentes:
(i_1) L'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{G},\nabla^+-\bar{\nabla})$ est associative
(i_2) L'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{G},\nabla^+-\nabla')$ est associative
(i_3) L'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{G},\bar{\nabla}-\nabla')$ est associative
$(i_4)\rho=0$
$(i_5)K=0$
(i_6) Le champ tensoriel de courbure de ∇^0 est nul.

ii) Les propriétés suivantes sont équivalentes:
(ii_1) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{G},\bar{\nabla}-\nabla)$ est un champ spécial
(ii_2) L'algèbre de Lie $L(G)$ est commutative
$(ii_3)\bar{\nabla}=\nabla$
(ii_4) Le groupe de Lie G est commutative, lorsque la variété G est conexe.

Démonstration. Voir [15]

7 Problemes

Probleme 7.1.. (Izu Vaisman [26], p.84). Soient ∇^1,∇^2 deux connexions linéaires sur une variété différentiable M.Trouver des courbes de M et des familles de directions le long de ces courbes telles que les directions respectives soient simultanément paralleles dans les deux connexions de la paire (∇^1,∇^2), le long des courbes en question.

Probleme 7.2.. (Kentaro Yano). Soient g et $\bar{g}$ deux metriques de Riemann sur une variété différentiable M. Soient $\nabla,R,Ricg$ et K (resp. $\bar{\nabla},\bar{R},Ric\bar{g}$ et $\bar{K}$) la connexion de Levi-Civita, le tenseur de courbure, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire de l'espace de Riemann (M,g) (resp. $(M,\bar{g})$). Trouver les relations entre g et $\bar{g}$ tells qu'une des conditions suivantes soit accomplie:
(i) $\bar{\nabla}=\nabla$, (ii) $\bar{R}=R$, (iii) $Ric\bar{g}=Ricg$, (iv) $\bar{K}=K$.

Remarque. Le même problème en remplacant (ii), (iii) et (iv) par: (ii') $\bar{R} = \lambda R$, (iii') $Ric\bar{g} = \lambda Ricg$, (iv') $\bar{K} = \lambda K$, ou λ est une fonction reelle differentiable sur M.

Probleme 7.3.. Soient g and $\bar{g}$ deux metriques de Riemann sur une variété différentiable M. Soient ∇ et R (resp. $\bar{\nabla}$ et $\bar{R}$) la connexion de Levi-Civita et le tenseur de coubure de l'espace de Riemann (M, g) (resp. $(M, \bar{g})$). Notons par ρ (resp. K) le champ tensoriel de la corbure mixte (resp. de la courbure de déformation) de la paire $(\nabla, \bar{\nabla})$. Trouver les relations entre g et $\bar{g}$ telles qu'une des conditions suivantes soit accomplie:

(i) $R(X, Y) \cdot A = 0$, (ii) $\rho(X, Y) \cdot A = 0$, (iii) $R(X, Y) \cdot \rho = 0$,
(iv) $\rho(X, Y) \cdot R = 0$, (v) $R(X, Y) \cdot K = 0$, (vi) $\rho(X, Y) \cdot K = 0$,
(vii) $\rho(X, Y) \cdot \rho = 0$, (viii) $R^m(X, Y) \cdot \rho = 0$,
(ix) $\rho(X, Y) \cdot R^m = 0$, (x) $R^m(X, Y) \cdot K = 0$, ou R^m est le tenseur de courbure de la connexion $\nabla^m = \frac{1}{2}(\nabla + \bar{\nabla})$.

Remarque. Si $\bar{\nabla} = \nabla$, alors $\rho = R$ et la condition (vii) s'ecrit:

$$(vii)' R(X, Y) \cdot R = 0.$$

Les espaces de Riemann qui vérifie le condition $(\text{vii})'$ a été étudiée par Z.I.Szabo [22].

References

[1] L.P.Eisenhart, *Riemannian geometry*, Bull.Princeton Univ. Press, (1966)

[2] M.J.Folland, *Weyl manifolds*, Diff.geom., 4(1970), 145-153

[3] S.Golab, *On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connextions*, Tensor, N.S. 29(1975), 249-254

[4] I.Hirică, *Asupra spaţiilor Riemann in corespondenta geodezică*, Preprint 1996

[5] M.Martin et L.Nicolescu, *Des courbes* (∇, F)*-planes*, Bull.Math. de la Soc.Sci.Math. de la RSR, 21(1969), nr.3-4(1977), 345-353

[6] R.Miron si M.Anastasiei, *Vector bundles. Lagrange spaces. Applications to the theory of relativity*, Ed.Academiei Bucuresti (1987)

[7] R.S.Mishra and S.N.Pandey, *On quarter-symmetric metric* F*-connections*, Tensor N.S., 34(1980),1-7

[8] L.Nicolescu, *Sur l'algèbre de déformation associée à une variété de Weyl*, Ann. Fac. Sci. de Kinshasa, Zaire; Section Math-Phys., 3(1977), 79-88

[9] L.Nicolescu, *On the semi-symmetric metric connection*, Tensor, N.S., 35(1981), 40-44

[10] L.Nicolescu, *Champs presque principaux dans l'algebre de deformation*, Rev.Roum. Math. Pures et App., 26(1981), 611-616

[11] L.Nicolescu, *Sur l'algèbre de déformation associée à une variété de Riemann*, An.Univ. Bucuresti, Matematica, 27(1978), 53-55

[12] L.Nicolescu, *Champs presque spéciaux dans l'algèbre de déformation*, An st. Univ. "Al.I.Cuza" Iasi, s. Ia, 27(1981), 171-176

[13] L.Nicolescu, *Sur la géométrie de l'algèbre associée à un champ tensoriel du type (1,2)*, Tensor, N.S., 38(1982), 235-241

[14] L.Nicolescu et M.Martin, *Sur l'algèbre associée à un champ tensoriel du type (1,2)*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 31(1-2)(1978), 27-35

[15] L.Nicolescu, *Grupuri Lie*, Ed.Univ. Bucuresti (1994)

[16] L.Nicolescu and C.Udriste, *On the deformation algebra of two affine connections*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la Roumanie, Tome 20(68), nr.3-4(1976), 313-323

[17] L.Nicolescu, *Sur les transformations subprojectives d'une connexion linéaire*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la Roumanie, Tome 21(69), nr.1-2 (1977), 83-91

[18] L.Nicolescu, *Champs presque F-principaux*, Publicationes Math., Tomes 32, Debrecen (1985), 85-91

[19] L.Nicolescu, *Les espaces de Riemann en représentation subgéodésique*, Tensor, N.S., Vol.32(1978), 183-187

[20] G.Pripoae, *Connexion de Schouten et de Vranceanu sur des f-variétés*, Rev. Mat. Univ. Parma, 4 (12) (1986), 195-201

[21] G.Pripoae, *Propriétés de rigidité concernant la courbure des metriques indefinies*, J.Geom. and Phys. 7(1990), 13-20

[22] Z.I.Szabo, *Structure theoremes on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$*, J.Diff.Geom., 17(1982), 531-582

[23] D.K.Sen and J.R.Vanstone, *On Weyl and Lyra manifolds*, J.Math. Phys., 13(1972), nr.7, 990-993

[24] U.Simon, *On the inner geometry of the second fundamental form*, Michigan, J.Math., 19(1972), 129-132

[25] C.Udrişte *Linii de camp*, Ed.Tehnica (1988)

[26] I.Vaisman, *Sur quelques formules du calcul de Ricci global*, Comm. Math. Helv., 41(1966-67), 73-87

[27] G.Vrănceanu, *Lectii de geometrie diferentiala, I,II*, E.D.P. Bucuresti, (1962, 1964)

[28] G.Vrănceanu, *Sur la representation géodésique des espaces de Riemann*, Rev. de Math. Pures et Appl., vol.I(1956), 121-145

[29] P.Venzi, *On geodesic mapping in Riemannian and pseudo- Riemannian manifolds*, Tensor, N.S., vol.32(1978), 193-198, vol.33(1970), 23-28

[30] K.Yano, *Union curves and subpaths* Math. Jap. 1(1948), 51-59

University of Bucharest
Department of Geometry
Academiei 14