Le Calcul des Caractéristiques Effectives Pour des Matériaux Composites qui Contiennent des Nonhomogénéites Atribuées d'une Maniere Aléatoire

C. Radu and A. Zlătescu

Abstract

Dans l'étude du comportement macroscopique des matériaux aux défants et micro-nonhomogène on remplace, en général, ces corps par un milieu homogène equivalent.

Dans le présent article on détermine les caracteristiques effective du corps nonhomogène et la moyenne de probabilité par rapport aux volumes.

Mathematics Subject Classification: 73K20, 60G20
Key Words: moyenne de probabilité, series viriales, matériaux composites.

1 Introduction

Les milieux micrononhomogènes et les matériaux aux défauts sont modelés dans certaines situations, par une matrice homogene ayant des nonhomogénéités isolées distribuées d'une maniere aléatoire, y compris des fissures ou des cavités. Dans l'étude du comportement macroscopique d'un tel corps celui-ci est remplacé, en général, par un milieu uniforme homogene equivalent dont les volumes élémentaires agissant, en essence, pareillement aux volumes du corps initial qui contient un grand nombre de nonhomogénéités.

Le probleme de déterminer les caractéristiques effectives du corps nonhomogène s'impose donc, du même que les champs de liaison et le calcul de la moyenne de probabilité par rapport aux volumes qui contiennent assez de nonhomogénéités.

Dans la littérature de spécialité les vioes pour trouver les caractéristiques effectives des corps ayant des nonhomogénéité attribuées aléatoire sont classifiés en trois catégories:

I. **des estimations variables** (voir [1], [2]) qui offrent une multitude de valeurs aux caractéristiques effectives qui est d'autant plus étroite lorsqu'il y a peu de propriétés différantes entre la matrice et les nonhomogénéités (pour les fissures et les cavités, on ne peut pas appliquer cette regle);

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.3, No.1, 1998, pp. 119-133

II. **les dévelopements asymptotiques** en fonction d'un petit paraètre qui caractérise les diverses propriétés de la matrice et des nonhomogé néités ([3],[4],[5]) ou d'apres le parametre qui exprime la concentration petité des nonhomogénéités ([5]-[19]) surnommées, dans ce dernier cas, les "décompositions viriales". D'habitude, dans le cas de ces devéloppements, on retient seulement les termes linéaires en concentration ([5], [6]).

III. **des méthodes d'aproximation**, pour les quelles on met en évidence, par simplicité et intuition, les méthodes de autocoordonation ([20],...,[30]), fondées sur le probleme des nonhomogénéités qui ne s'interactionnent pas, trouvées dans un champ effectif ou dans un milieu effectif qui puisse compenser l'interaction des nonhomogénéités.

Les différentes variantes de la méthode de autocoordination menent a des résultats sifférents car, en utilisant les données expérimentales on limite la précision de la méthode et, par conséquent, il est impossible de choisir uniquement une seule variante [20...30]. Un moyen simple pour nalyser la méthode de autocoordination est formé par la méthode de la décomposition viriale dans laquelle on compare ([13],[18],[30]-[32]) les termes de la décompositions des caractéristique effevtives, en série, selon les pouvoirs de la concentration de la nonhomogénéité obtenue grâce aux deux méthodes. Les développements viriales sont construits par une évidence successive de stermes qui correspondent a l'interaction entre "n" particules (n=1,2,3...), c'est-a-dire ce que l'on obtien comme résultat du probleme résolu qui se refere a 'n' nonhomogénéités, disposées dans un champs homogéne ou l'on trouve la moyanne successivement selon toutes leurs positions possibles (on admet que la somme des contributions individuelles des nonhomogénéités peut étre remplacée par la somme des moyennes obtenue apres la réalisation des inclusions).

Etant donnée la contribution des interactions entre "n" particules dans la relation de médiatisation des n particules dans un volume infini, des intégrales convergentes font leur parution; elles sont conditionées par une baisse lente du champ déplace de nonhomogénéité dans le corps infini (comme r^{-3}, ou r représente la distance jusqu'a la nonhomogénéité). Le probleme du choix es valeurs (des intégrales) s'y impose et sera nomé "le probleme de la régularisation". Dans [19], le calcul de la conductibilité termique du milieu a des nonhomogénéité sphérique, aux intégrales conditionées convergentes on leurs a associé les valeurs obtenues par l'intégration d'une série d'ellipsoiides et on a prouvé qu'elles ne dépendent pas de la forme des ellipsoiides. Dans les [7,8,18], apres des séries des sphéres concentriques on a ajouté aussi le, pour le cas du plan ou on a considéré des cercles.

Les suppositions auxquelles on a fait appel pour construire la décomposition viriale font parties d'une autre analyse, a part. Premierement, cette analyse concerne la possibilité du passage vers un volume infini et le changement de la somme des contributions individuelles des particules dans un champ moyen avec les moyennes de probabilité de ces contributions (la difficulté de l'application directe de la loi des grands nombres consiste dans le fait que, suite a leur interaction, leur contributions individuelles ne sont plus indépendentes, mais soumises a leur positions relatives).C'est a cette analyse que l'on a dédié l'ouvrage qui suit.Dans le deuxieme paragraphe on a calculé les termes carrés des expressions du module de déformation d'un matériel composite avec des inclusions cylindriques parallelesm, dans des conditions de déformation antiplane.

Les solutions ainsi obtenues seront la base de l'analyse des différentes variantes de la méthode de l'autocoordination.

2 La détérmination de la moyenne de probabilité par rapport au volume et les caractéristiques effectives des matériaux ayant des nonhomogénéités

2.1. Soit un corps micrononhomogéne, soumis a des champs extérieurs dont l'échelle caractéristique de varioation, L dépasse, d'une maniere significative, la plus grande dimension, l, des éléments structurels, de maniere qu'il y a une échelle intermédiaire H qui satisfait la condition $l << H << L$. Dans ce cas la, si on néglige les éléments structurels isolés, le comportement du corps sera décrit clairement dans l'échelle H, en remplacant le corps entier avec un autre corps, homogéne dans les limites de cette échelle.

Les caractéristiques du corps équivalent peuvent être déterminées dans chaque-point par la structure du corps initial dans les limites du macrovolume de dimension H qui contient le point examiné (H le "volume élémentaire") et elles lient les moyennes des champas (dans des "valeurs moyennes" ou des "moments") par rapport a ce volume. Une telle méthode se trouve a la base d'approximation du milieu compact.Les caractéristiques du corps équivalent sont déterminées soit par exprimer les modeles du H, soit par résoudre les problemes concernant les caractéristiques effecitves.

Le corps initial a structure homogéne de point de vue statistique est remplacé d'une maniere naturelle avec un autre corps homogéne équivalent si le volume contient assez de nonhomogénéités (des inclusions) pour que le volume soit représentatif.

Dans le cas des microstructures irrégulieres, cela est possible, en général, seulement asymptotiquement, c'est-a-dire pour $\frac{H}{L} \to \infty$. C'est pour cela que a la base de l'approximation du milieu compact, approximation déja mentionées, on trouve *l'hypotheses* 1^0 :

-les limites de la tension et de la déformation moyenne existe pour $\frac{H}{L} \to \infty$ et elles ne dépendent pas de la forme du volume élémentaire (c'est-a-dire que l'on admet que les problemes a limite ont une solution unique).

La passage au volume élémentaire infini doit être fait en admettant
l'hypotheses 2^0 :

-l'action des nonhomogénéités qui se trouve pres de la frontiere du volume élémentaire peut être négligée; autrement dit, on admet que pour $\frac{H}{L} \to \infty$, toute nonhomogénéité, independente de sa position, peut être admise comme trouvée dans un corps fini.

Pour que le comportement du macrovolume a l'échelle H soit complétement déterminé par la structure et pour qu'il ne dépend pas de l'état de tension des autres parties du corps initial, on doit admettre aussi *l'hypothese* 3^0 :

-aux champs du tension qui ont la même moyenne relativement a leur volume élémentaire leur correspondent des champs de déformation qui ont toujours des moyennes identiques (au mois asumptotique pour $\frac{H}{L} \to \infty$) et inversement.
L'hypothese no 3 permet aussi, pour le calcul des caractéristiques effectives, l'examination

des champs homogénes externes seulement. Dans ce qui suit, nous admettons que les trois hypotheses sont réalisées.

2.2. La définition des tensions et des déformations moyennes.

Soit V - le volume élémentaire dans l'échelle H, Σ sa frontiere et soit V_1 - la région de l'intérieur du volume élémentaire V, défini par la nonhomogénéité; Σ_1 la surface entre la nonhomogénéité et la matrice et n_k la normale extérieure (les parametres directeurs) a la frontiere de la nonhomogénéité.Pareillement, soit $u_i(i = \overline{1,3})$ les composants du vecteur de deplacement, tandis que x_1, x_2, x_3 - les coordonées cartésiennes. Alors, comme a l'intérieur des inclusions et des cavités les tensions σ_{ij} et les déformations ε_{ij} ne sont pas définies, on peut calculer leurs valeurs moyennes:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} <\sigma_{ij}>_H = \frac{1}{V}\left(\int_{V\setminus V_1}\sigma_{ij}dV + \int_{\Sigma_1} x_i\sigma_{jk}n_k d\sigma\right) \\ <\varepsilon_{ij}>_H = \frac{1}{V}\left(\int_{V\setminus V_1}\varepsilon_{ij}dV + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}(u_i n_j + u_j n_i)d\sigma\right) \quad i,j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Si les nonhomogénéités sont des inclusions pour lesquelles les tensions et les déformations sont des fonctions continues au passage par les frontieres des inclusions alors, tout en intégrant [34], sur $(x_i\sigma_{kj})_{,j}$ et ε_{ij}, (ou $()_{,j}$ est est la dérivée d'apres x_j) par rapport au volume V_1 et en utilisant la formule Gauss-Ostrogradsky, on obtient que les égalités (2.1) sont équivalentes aux moyennes obtinues d'apres le volume:

$$(2.2) \qquad <\sigma_{ij}>_H = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}dV; \quad <\varepsilon_{ij}>_H = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}dV$$

De plus, si la frontiere Σ du volume élémentaire V est suffisamment lisse et si elle passe seulement par la matrice (conformément a l'hypothese 2^0, l'influence de la nonhomogénéité surgie sur la surface peut ȋtre négligée), alors (2.1) sont équivalentes avec

$$(2.3) \qquad <\sigma_{ij}>_H = \frac{1}{V}\int_\Sigma x_i\sigma_{ij}n_k d\sigma, \quad <\varepsilon_{ij}>_H = \frac{1}{2V}\int_\Sigma (u_i n_j + u_j n_i)d\sigma$$

qui correspondent avec la définition des moyennes $<\sigma_{ij}>_H$ et $<\varepsilon_{ij}>_H$ pour les modeles expérimentales habituels, lorsque on peut mesurer seulement dans les points de la surface.

Si les nonhomogénéités sont des fissures, alors le théoreme Gauss-Ostrogradsky ne peut pas être appliqué, car les tensions qui se trouvent dans le voisinage de la frontiere de la fissure ont des singularités et c'est parce que ce cas peut être obtenu grâce au probleme des pores élliptiques vers la limite. Dans ce cas (2.1) il y a un double déplacement: premierement de l'inclusion vers les pores, ensuite des pores vers les fissures. En utilisant la premiere égalité du (2.1) en multipliant avec la matrice des coéfficients de flexibilité A_{ijkl}, on écrit:

$$(*) \qquad \varepsilon^0_{ij} = A_{ijkl} <\sigma_{kl}>_H$$

ce qui représente la déformation homogéne qui se trouve dans le volume élémentaire V avec la charge homogéne: $<\sigma_{kl}>_H\ n_l$ dans l'absence des nonhomogénéités; c'est ainsi que l'on obtient de la deuxieme égalité (2.1):

(2.4)
$$< \varepsilon_{ij} >_H = \varepsilon^0_{ij} + \frac{1}{V}\sum_{m=0}^{M} S^{(m)}_{ij},$$

ou

(2.5)
$$S^{(m)}_{ij} = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_m}(u_i n_j + u_j n_i)d\sigma - A_{ijkl}\int_{\Sigma_m} x_l \sigma_{kp} n_p d\sigma$$

et $M + 1$ ($M \in N^*$) représente le nombre des nonhomogénéités dans le volume élémentaire V.

La dimension $S^{(m)}_{ij}$ exprime la contribution de la nonhomogén éité "m" dans la déformation moyenne et Σ_m représente la frontiere de la "m" -ieme nonhomogénéité.

Dans le cas des inclusions, conformément a (2.2) la dimension $S^{(m)}_{ij}$ peut être représentée dans la forme employée dans les ouvrages [11-15]:

(2.6)
$$S^{(m)}_{ij} = (A^{(m)}_{ijkl} - A_{ijkl})\int_{V_m} \sigma_{kl} dV$$

ou $A^{(m)}_{ijkl}$ représente la malléabilité de la "m" -ieme inclusion et V_m en est son volume.

Pour mieux expliciter le sens physyque de ladimension $S^{(m)}_{ij}$ nous procédons de la sorte: on élimine virtuellement l'intérieur des nonhomogénéités si elles existent et nous changeons les actions qui se trouvent sur leur frontiere, grâce aux efforts: $\sigma^{(m)}_{ij} n_j$, de la sorte que l'état de tension de la matrice reste invarieble.

Ensuite, on remplace les inclusions et les pores avec des insertions du matériel de la matrice, ce qui coincide, comme forme, avec les nonhomogénéités nondéformées.

On obtient un corps du matériel de la matrice dans lequel sur la place de l'ancienne frontiere de la "m" -ieme nonhomogénéité (y compris pore ou fissure) il y a une distribution des sauts de déplacements $u_i 9^{(m)}$ et dans le cas de l'inclusion, de même une représentation des forces de volume,

(**)
$$f^{(m)}_i = -\sigma^{(m)}_{ij} n_j \delta(\xi^{(m)} - \lambda_{ijkl}\partial(n_k u_l \delta(\xi^{(m)}))/\partial x_j\,,$$

ou $\delta(\xi^{(m)})$ est δ -fonction et $\xi^{(m)}$ sont les coordonnées considérées a partir de la surface de la "m" -ieme nonhomogénéité tout le long de la direction de la normale extérieure n_k. De cela et du (2.6) résulte:

(2.7)
$$S^{(m)}_{ij} = A_{ijkl} D^{(m)}_{kl}, \quad D^{(m)}_{kl} = \int_V x_l f^{(m)}_k dV$$

Ici $D^{(m)}_{kl}$ est le tenseur du moment dipôle de nonhomogénéité. On remarque donc que, pour la nonhomogénéité dans le volume infini la dimension $D^{(m)}_{kl}$ est le coéfficient du terme général (d'ordre r^{-3} dans le dévelopement viriale (a voir [38])).

Un fait analogue au cas de la fissure a été etudié dans le [39]. Finalement, on peut écrire (2.4), en baissant les indices tensoriels sous la forme:

$$< \varepsilon >_H = \varepsilon^0 = \frac{1}{V} A \sum_{n=0}^{M} D^{(n)} \tag{2.8}$$

L'expression (2.8) est appliquée dans des problemes de thérmocondutibilité (a voir[12]) si par ε et σ on comprend les champs liés a la matrice a travers la relation:

$$\varepsilon = A \cdot \sigma$$

Dans ce cas, $^{(n)}$ - représente le moment électrique dipôle de la n -ieme nonhomogénéité.

3.1. Développement viriales pour les corps finis.

Passons a la construction du développement viriale pour

$$< \varepsilon_{ij} > = \lim_{H \to \infty} < \varepsilon_{ij} >_H .$$

Considerons le volume élémentaire V fixe et une particule qui a le vecteur de position r et soit aussi les vecteurs de la forme, de l'orientation et les propriétés du matériel avec des nonhomogénéités t.

Pour calculer $D^{(n)}$ on considere une nouvelle numérotation ou la n -ieme particule - nomée distinguée ou choisie a l'indice "0" et les autres particules sont marquées de 1 a M (on admet que dans le volume V on a $M+1$ particules).

On désigne par $K_M^{(n)} = \{r_1, t_1, r_2, t_2, ..., r_M, t_M\}$ la configuration des particules qui restent apres la fixation du centre, et par $D^{(n)}(K_M^{(n)}, r_0, t_0)$ le tenseur du moment dipôle de la particule distinguée.

En baissant les indices des tenseur et l'indice supérieur n, les moments dipôles pour les particules distinguées des nonhomogénéités sont donnés par:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0(K_M, r_0, t_0) = D(r_0, t_0) \\ D_1(K_M, r_0, t_0) = \sum_{k=1}^{M} [D(r_k, t_k, r_0, t_0) - D_0(K_M, r_0, t_0)] \\ . \\ . \\ . \\ D_M(K_M, r_0, t_0) = \sum [D(K_M, r_0, t_0) - \sum_{k=0}^{m-1} D_k(K_m, r_0, t_0) \;\; K_m \in U_M(K_M) \end{array} \right. \tag{3.1}$$

ou $D(K_m, r_0, t_0)$ est le moment dipôle de la particule isolée dans la présence des particules qui se trouvent dans la configuration K_m, considérant que les autres particules sont néglijables.

Donc, $D(r_0, t_0)$ est le moment dipôle de la particule distinguée dans le cas ou on suppose qu'elle est isolée dans le volume V, ce qui représente l'interaction avec une seule particule.

$D(r_k, t_k, r_0, t_0)$ est le moment dipôle de la particule isolée dans la présence d'une k -ieme particule. $D_k(K_m, r_0, t_0)$ est le moment dipôle de la particule "$k+1$", c'est-a-dire la partie qui corespond a son interaction avec tous les groupes de k particules de la configuration K_m $U_m(K_M)$ est l'ensemble de tous les groupes de m particules de K_M.

Pour $m = M$ dans (3.1) on a:

$$D(K_M, r_0, t_0) = \sum_{m=0}^{M} D_m(K_M, r_0, t_0) \tag{3.2}$$

Ensuite si on remplace (3.2) dans (2.8) on a:

$$< \varepsilon >_H = \varepsilon^0 + \frac{NA}{M+1} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{M} D_m^{(k)}(K_M, r_0, t_0) \tag{3.3}$$

ou $N = \frac{M+1}{V}$ est le nombre des particules qui se trouvent dans le volume unitaire; dans la deuxieme somme, conformément a la définition, toute n -ieme particule est considerée succesivement distinguée.

3.2. Corps infinis. Régularisation.

Passons aux corps infinis; alors on a $H \to \infty,\ V \to \infty,\ M \to \infty,\ M/V \to \infty$.

Par la suite on considere seulement $H, M \to \infty$ et la somme extérieure dans (3.3) devient une série (sa convergence est equivalente a l'hypothese no 1^0).

Nous allons prouver que dans le cas ou la distribution de chacune particule avec la croissance de la distance par rapport aux particules voisines tends vers le cas uniforme on a:

$$\frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^{M} D_m^{(n)}(K_M, r_0, t_0) \to \overline{D}_m \quad (H, M \to \infty) \tag{3.4}$$

ou $\overline{D}_m$ est le moment dipôle de la particule de nonhomogénéités arbitraire médié suivant tous les rangements possibles de la nonhomogénéité dans le volume V.

On observe que pour la démonstration de l'égalité (3.4) nous n'avons pas la possibilité d'utiliser directement la loi des grandes nombres, parce que a la suite de l'interaction, les moments dipôles pour les différents particules ne sont pas indépendents.

L'expression (3.4) est vraie parce que les particules sont asymptotiquement indépendentes pour $H, M \to \infty$.

Pour montrer (3.4) nous allons prouver premierement que la valeur moyenne $\overline{D}_m$ et les dispersion des moments dipôles existent.

La distribution des nonhomogénéités dans la configuration est conformément a [11] mais avec une autre norme et a la forme suivante:

$$\begin{aligned} &P(K_{m+1}, r_0, t_0) = P(r_{m+1}, t_{m+1} | K_m, r_0, t_0) P(K_m, r_0, t_0) \\ &P(r_0, t_0) = P(t_0) V^{-1}; P(r_m, t_{m+1} | K_m, r_0, t_0) \to P(t_{m+1}) V^{-1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

ou $P(A)$ est la probabilité de l'evenement A ou la densité de probabilité.

Cette expression est valable dans le cas ou V et la distance de la particule (r_{m+1}, t_{m+1}) a la particule (r_0, t_0) et la particule de K_m tendent vers infini.

Ainsi, on considere que la particule distinguée (r_0, t_0) entre aléatoriement dans le volume élémentaire V. L'influence réciproque des particules sur leurs rangements se fait sentir localement dans le voisinage.

On considere aussi que (3.5) est satiafait pour une numérotation arbitraire des particules, c'est-a-dire pour une option arbitraire des particules distinguées.

La moyenne pour le moment dipôle des particules sur l'ensemble (le domaine) des particules distinguées est:

$$\overline{D}_m = \int D_m(K_M, r_0, t_0) P(K_M, r_0, t_0) dK_M dr_0 dt_0 \tag{3.6}$$

Remplaçant (3.1) dans (3.6) et considérant que dans l'ensemble $U_m(K_M)$ on a C_M^m configuration K_m (chacune moyenne donne une contribution égale en valeur moyenne et en plus $C_M^m \sim M^m/m! \sim N^m V^m/m!$ pour $(H, M \to \infty)$, on a:

$$\begin{aligned}\overline{D}_m = \tfrac{N^m V^m}{m!} \textstyle\int [D(K_m, r_0, t_0) - \sum_{k=0}^{m-1} D_k(K_m, r_0, t_o)] \times \\ \times P(K_m, r_0, t_0) dK_m \cdot dr_0 \cdot dt_0 \quad (H, M \to \infty).\end{aligned} \tag{3.7}$$

En particulier, pour des interactions par couple (m=1) le moment dipôle pour deux particules a la forme suivante:

$$\begin{aligned}\overline{D}_1 = NV \textstyle\int [D(r_1, t_1, r_0, t_0) - D_0(r_0, t_0)] \times \\ \times P(r_1, t_1, r_0, t_0) dr_0 dt_0 dr_1 dt_1, \quad (H, M \to \infty).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Le passage a la limite $V \to \infty$, conf. a [9-19,31], transforme les intégrales de (3.7) et (3.8) dans des intégrales conditionellement convergentes.

Par exemple, pour (3.8) ce résultat est du au fait que les expressions qui se trouvent dans le crochet, représentent, a cause de la linéarité du probleme, les moments dipôles de la particule distinguée qui se trouve dans le champ activé (qui est en général non-homogéne) de la deuxieme particule, qui dans le corps infini, baisse avec la croissance de la distance r entre les particules, comme r^{-3}.

Ces dificultés surgissent a cause du passage prématuré a la limite dans l'expression obtenue pour le volume fini V.

Stricto sensu, il sera mieux de résoudre le probleme pour le systeme de la $(m+1)$ -ieme particule dans un corps fini et apre le calcul des intégrales qui se trouvent dans (3.6) et ensuite le passage au domaine infini de l'intégration.

Mais on peut transformé l'expression (3.6) pour avoir la possibilité de faire le passage, a la limite supérieure jusqu'au calcul des nonhomogénéités dans le corps fini.

Nous allons commencer par le cas de l'interaction par couples.

Soit $D_0^*[t_0.\Delta\sigma(r_1, t_1, r_0)]$ pour le moment dipôle de la particule distinguée qui se trouve dans le corps infini homogéne considéré a ∞ et égal a $\Delta\sigma$, la valeur du champ activé, pour lequel la particule (r_1, t_1) arrive en r_0.

Elle est la seule particule dans le corps V, chargée sur la frontiere avec les efforts $< \sigma_{ij} >_H \cdot n_j$.

Dans le probleme de l'interaction de deux particules dans un corps infini (équation (3.8)), le moment dipôle D_0^* baisse de $r = r_1 - r_0$ comme r^{-3}, et il représente le terme principal du développement asymptotique.

A cause de la nonhomogénéité du champ activé ou se trouve la particule distinguée, les termes sont proportionelles avec la dérivé du champ de tension, qui conformément a la propriété d'homogénéité du tenseur de Green pour les milieux infinits [38] a un ordre de grandeur plus elevé (pas inférieure a r^{-4}).

Evidemment les termes liés par l'influence inverse de la particule sont d'ordre r^{-6}.

On peut représenter (3.8) sons la forme suivante:

$$\begin{aligned}\overline{D}_1 = NV \int \{[D(r_1,t_1,r_0,t_0) - D_0(r_0,t_0)] \cdot P(r_1,t_1,r_0,t_0) - \\ -D_0^*[t_0, \Delta\sigma(r_1,t_1,r_0)]V^{-1}P(t_0)P(r_1,t_1)\}dr_0dt_0dr_1dt_1 + \\ +N\int D_0^*[t_0,\Delta\sigma(r_1,t_1,r_0)]P(t_0)P(r_1,t_1)dr_0dt_0dr_1dt_1 \ \ (H,M\to\infty)\end{aligned} \tag{3.9}$$

ou la densité est distribuée par la deuxieme particule $P(r_1,t_1)$. On trouve de la meme maniere que $P(r_0,t_0)$ dans (3.5), parce que (3.5) est défini pour une numérotation arbitraire des particules, quand chacune d'entre elles peut être considerée comme distinguée. Dans l'expression (3.9) l'intégration est réalisée indépendamment dans les limites du domaine $V \times V$, et parce que $P(r_1,t_1,r_0,t_0) \sim V^{-1}P(t_0)P(r_1,t_1)$ pour $V\to\infty$, $|r_1-r_0|\to\infty$ on sait que la premiere intégrale est convergente.

La deuxieme intégrale dans l'expression (3.9) se calcule des le début suivant tous les rangements possibles des particules distinguées, c'est-a-dire d'apres r pas suivant r_0, comme dans [11,12].

Considérant D_0^* formellement introduit pour un corps infini et puis pour la position arbitraire de la particule distinguée est défini seulement par $\Delta\sigma$ de qui il dépend linéairement. Parce que $\Delta\sigma$ est le champ complémentaire du champ extérieur donné, il s'annule sur la frontiere du volume V et conf. aux expression (2.3)nous avons $<\Delta\sigma>_H = 0$, considérant, cf.a l'hypothése no 2, les nonhomogénéités qui croissent la frontiere néglijables.

De meme on peut eviter la supposotion suplémentaire faite par [10-15] pour la régularisation des intégrales conditionellement convergentes. Cela simplifie le résultat, ainsi que (3.9) devient:

$$\begin{aligned}\overline{D}_1 = NV\int\{[D(r_1,t_1,r_0,t_0) - D_0(r_0,t_t)]\cdot P(r_1,t_1,r_0,t_0) - \\ -D_0^*[t_0,\Delta\sigma(r_1,t)1,r_0)]V^{-1}P(t_0)P(r_1,t_1)dr_0dt_0dr_1dt_1(H,M\to\infty)\end{aligned} \tag{3.10}$$

Analogue, on régularise les intégrales pour le calcul des moments dipôles.

Parce que, dans ce cas la, le moment dipôle de la "$m+1$"-ieme particule, noté par D_m est conditioné par l'interaction des $m+1$ particules, on peut considerer le moment dipôle $D_0^*[t_0,\Delta\sigma(K_m,r_0)]$ de la particule (r_0,t_0) qui se trouve dans un champ homogéne, égal au champ activé de la particule (r_1,t_1) qui a son tour se trouve dans le champ activé de la particule (r_2,t_2) etc. jusqu'a la particule (r_{m-1},t_{m-1}).

On considere que la derniere particule se trouve dans le champ activé $\Delta\sigma$ determiné dans le point r_{m-1} par la seule particule (r_m,t_m) qui est dans le volume V. Dans ce cas, tous les champs et les moments dipôles qui sont liés avec toutes les particules de cette chaine, sauf la particule (r_m,t_m), sont pris formellement pour un corps infini. L'intégration se realise d'apres $r_0,r_1,...,r_{m-1}$ dans un volume fini et le résultat est nul.

On a donc:

$$\begin{aligned}\overline{D}_m = \tfrac{N^mV^m}{m!}\int\{[D(K_m,r_0,t_0) - \textstyle\sum_{k=0}^{m-1}D_k(K_m,r_0,t_0)]\times \\ \times P(K_m,r_0,t_0) - D_0^*[t_0,\Delta\sigma(K_mr_0)]\cdot V^{-m}\cdot P(t_{m-1})P(r_m,t_m)\} \\ \cdot dK_mdr_0dt_0 \ \ (H,M\to\infty).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ensuite passons a la limite pour un domaine infini dans les expressions (3.10) et (3.11) ($V\to\infty$ pour m fixé).

Cet exemple nous a permis d'éliminer la divergence des intégrales, due a l'infinité du domaine d'intégration.

Ici,dans le cas considéré, le type d'homogénéités et de distributions de probabilité sont choisis d'une maniere particuliere pour eliminer les singularités nonintégrables dans (3.10) et (3.11) (on peut observer les singularités, quand les nonhomogénéités se trouvent dans le voisinage).

Dans ce qui suit, considérons les seules singularités pour les quelles les moments dipôles sont intégrables avec la densité $P(K_m, r_0, t_0)$.

Cette demande n'est pas pesante, probablement, aussi pour les fissures.

Par conséquence on trouve a étudier pas seulement les moyennes des moments dipôles, mais aussi les dispersions.On remarque que les carrés d'unmoment dipôle décroissent avec la croissance de la distance r entre les particules, comme r^{-6}, c'est-a-dire les intégrales sont convergentes sur un domaine infini.Passons, maintenant a la démonstration de (3.4).Examinons, premierement le volume V qui contient la $M+1$-ieme particule et on applique l'inégalité deTchebychev pour la somme du moment dipôle pour m particules. Parce que les distributions de (3.5), ne dépendent pas du choix des particules distinguées, la valeur moyenne $\overline{D}_m^{(n)}$ et la dispersion $\overline{[D_m^{(n)}]^2} - (\overline{D}_m^{(n)})^2$ ne dépendent également pas du nombre des particules choisies. Alors, pour la probabilité de la déviation de la moyenne aritmétique des moments dipôles, de la grandeur des valeurs moyennes nous avons l'estimation:

$$\begin{aligned} &P(|\tfrac{1}{M+1}\textstyle\sum_{n=0}^{M} D_m^{(n)} - \overline{D}_m| \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon^2(M+1)}[\overline{D}_m^2 - (\overline{D}_m)^2] + \\ &+ \tfrac{1}{\varepsilon^2(M+1)^2}\textstyle\sum_{n\neq k} \overline{(D_m^{(n)} - \overline{D}_m)(D_m^{(k)} - \overline{D}_m)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ici la barre exprime la moyenne suivant les réalisation.

L'existence des moyennes dans la deuxieme somme est due a l'intégration par carré du moment dipôle.Parce que les moyenne, sont bornées pour $H, K \to \infty$, la premiere somme de (3.12) tend vers zero.

Mais, conformement au (3.1) nous avons:

$$D_m^{(n)} = \sum_{K_m^{(n)}} d^{(n)} \tag{3.13}$$

ou

$$d^{(n)} = D^{(m)}(K_m^{(n)}, r_0, t_0) - \sum_{k=0}^{m-1} D_k^{(n)}(K_m^{(n)}, r_0, t_0).$$

est la partie du moment dipôle qui est défini par l'interaction entre la n-ieme particule distinguée et la configuration $K_m^{(n)}$, choisie parmi les M particules restées. L'index supérieur (n) indique que pour la configuration distinguée $K_m^{(n)}$ la numérotation commence par la n-ieme particule choisie.La grandeur qui se trouve dans la deuxieme somme est (3.14).

$$\overline{D_m^{(n)} \cdot D_m^{(k)}} = \sum_{K_m^{(n)};K_m^{(k)}} \overline{d^{(n)} d^{(k)}} \tag{3.14}$$

Pour chacue particule distinguée, il existe C_M^m configurations K_m, et le nombre de configurations communes pour la k-ieme particule est C_M^{m-1}. Dans la définition de $d^{(t)}$ on suppose que dans le volume V existe seulement $m+1$ particules y compris la particule distinguée, et les autres sont éliminées. C'est pour ça que du nombre total $(C_M^m)^2$ de (3.14) seulement un nombre de $C_M^m C_M^{m-1}$ contient les grandeurs qui dependent de $d^{(n)}$ et $d^{(k)}$.

Considérons de façon séparée, la somme dans (3.4) pour les termes qui contient les cofacteurs dépendents et indépendents et supposant que chacune des grandeurs $d^{(n)}$ et $d^{(m)}$ a la même valeurs moyenne $\overline{d}$ nous avons:

$$\overline{D_m^{(n)} D_m^{(k)}} = \sum \prime \overline{d^{(n)} d^{(k)}} + [(C_M^m)^2 - C_M^m C_M^{m-1}](\overline{d})^2 \tag{3.15}$$

ou l'apostrophe montre que la somme s'effectue seulement pour les cofacteurs indépendents.

Considérant connue l'estimation $|d^{(n)} d^{(k)}| \leq (\overline{d})^2$ et en vertu de (3.13) on a $\overline{D}_m = C_M^m \overline{d}$, et de (3.15) découle:

$$D_m^{(n)} D_m^{(k)} = (\overline{D}_m)^2 + O(M^{-1}), \ \ (H, M \to \infty). \tag{3.16}$$

Remarquons, donc, que $D_m^{(n)}$ et $D_m^{(k)}$ sont asymptotiquement indépendents pour $(H, M \to \infty)$. On a aussi que la deuxieme somme de (3.12) teds vers zero pour $(H, M \to \infty)$.

Par conséquent en vertu de (3.3) et (3.4) pour $(H, M \to \infty)$ nous avons la série viriale:

$$< \varepsilon >= \lim_{H \to \infty} < \varepsilon >_H = \varepsilon^0 + NA \sum_{m=0}^{\infty} \overline{D}_m \tag{3.17}$$

Parce que $\varepsilon^0 = A < \sigma >$ et tous le $\overline{D}_m$ dépendent linéarament de $< \sigma >= \lim_{H \to \infty} < \sigma >_H$ nous avons résolu en principe le probleme de la détermination des caractéristiques effectives. On nous reste a representé seulement $< \varepsilon >$ sons la forme suivantes: $< \varepsilon >= A_* < \varepsilon >$. On observe que si on introduit la dimension caractéristique moyenne des inclusions, notée par a, et supposant ensuite que les densités de probabilité ne possedent pas d'autres dimensions caractéristiques, alors, normant toutes les grandeurs par "a", nous allons montrer que $\overline{D}_m$ est proportionel a $N^m \cdot a^{3(m+1)}$, conformément a [14].

L'egalité (3.17) représente la série par rapport aux puissances de la concentration non-dimensionelle des nonhomogénéités $\nu = Na^3$.

Dans ce cas, pour les nonhomogénéités qui ne s'interactionnent pas, on a des termes linéaires, pour les interactions paires des termes carrés, etc.

4.Devéloppements viriales pour la disposition aléatoire des nonhomogénéités sans interactions

Nous allons examiner le cas pour les particules qui sont exclues des intersections.

Alors, la densité de probabilité a la forme suivante:

$$P(r_{M+1}, t_{M+1}) | (K_M, r_0, t_0) = \tag{4.1}$$

$$= \begin{cases} 0, & r_{M+1} \in V_0(K_M, r_0, t_0, t_{M+1}) \\ \frac{P}{V - V_0(K_M, r_0, t_0, t_{M+1})}, & r \notin V_0(K_M, r_0, t_0, t_{M+1}) \end{cases}$$

ou $V_0(K_M, r_0, t_0, t_{M+1})$ et le volume exclu, le volume qui contient telles dispositions du centre r_{M+1} de la particule (r_{M+1}, t_{M+1}) pour les quelles la particule va s'intersecter avec une des particules déja existantes dans le volume V.

Pour les fissures paralleles le volume exclu peut être nul.

Chacue fissure doit être isolée par un petit volume exclu sans laisser l'intersection des fissures et en assurant l'existence des valeurs moyennes et des dispersions des moments dipôles.

Mais moment dipôle pour l'approchement des extrémités des fissures a une seule singularité logarithmique. Par conséquence dans l'étude du matériel avec des fissures paraleles le volume exclu peut être considéré nul.

Examinons, ensuite l'interaction par conples.

En remplaçant (4.1) dans les égalités (3.10) nous avons pour le moment dipôle moyen l'expression:

$$\overline{D}_1 = NV \int P(t_0)P(t_1)dt_0dt_1 \int dr_0 (\int_{V - V_0(r_0,t_0,t_1)} \{ \tfrac{1}{V[V - V_0(r_0,t_0,t_1)]} \cdot$$

$$\cdot [D(r_1, t_1, r_0, t_0) - D_0(r_0, t_0)] - D_0^*[t_0, \Delta\sigma(r_1, t_1, r_0)]V^{-2}\} dr_1 - \tag{4.2}$$

$$- \int_{V_0(r_0,t_0,t_1)} D_0^*[t_0, \Delta\sigma(r_1, t_1, r_0)]V^{-2} dr_1)$$

Considerons la limite, pour $V \to \infty$. Conformément a l'hypothese no 2, le couple est considéré dans un corps infini, c'est-a-dire la contribution de la position de la particule dans le voisinage de la frontiere du volume V, est négligéable. Cf. a l'hypothese no 3, le chargement est homogéne. Donc, les moments dipôles sont invariables par rapport a un déplacement arbitraire.

C'est ainsi que l'on peut lier le system des coordonnées ayant une particule distinguées en mettant $r_0 = 0$. C'est alors que le vecteur r_1 donnera la position a la deuxieme particule par rapport a la particule distinguée.

Donc, conformement a la linéarite du D_0^* on obtient:

$$\overline{D}_1 = N \int P(t_0)P(t_1)dt_0dt_1 (\int_{\overline{V}_0(0,t_0,t_1)} \{D(r_1, t_1, 0, t_0) - D(0, t_0) -$$

$$D_0^*[t_0, \Delta\sigma(r_1, t_1, 0)]\} dr_1 - D_0^*[t_0, \int_{\overline{V}_0(0,t_0,t_1)} \Delta\sigma(r_1, t_1, 0) dr_1]) \tag{4.3}$$

ou $\overline{V}_0$ est le volume infini sans pourtant exclure V_0.

Le dernier terme du (4.3) reflete, conformement a la terminologie du [14] l'effect du volume exclu, c'est-a-dire la partie du moment dipôle pour la paire des particules qui définisent l'influence des particules dans le voisinage de la particule distinguée, sans accepter un conditionnement réciproque.

On remarque donc que c'est uniquement ce type d'effect que l'on prend en considération dans la méthode du champ autoaccordé [25, 27].

C'est bien évident que, en supposant que chaque particule se trouve dans un champ effectif σ_{ef} egal avec la somme des champs extérioeurs et des champs activés de toutes les autres particules pour lesquelles on calcule les moyennes selon tous les rangements possible. Cela mene a l'équation

(4.4) $$\sigma_{ef} =$$

$$= < \sigma >_H + NV \int \Delta s(r_1, t_1, \sigma_{ef}, r_0) P(r_1, t_1) P(r_0) dt_1 dr_1 dr_0 \quad (H, M \to \infty)$$

ou $\Delta s(r_1, t_1, \sigma_{ef}, r_0)$ représente le champ activé dans le point r_0 de la particule (r_1, t_1) trouvée dans un corps infini au champ homogéne σ_{ef}.

Quand a la distribution (4.1), selon le schéma décrit ci-dessus, l'intégrale devient convergente, en employent pour la résoudre la méthode des approximations succéssives et en gardant seulement les termes linéaires dans la limite $V \to \infty$ dans le systeme des coordonées lié a la particule distinguée r_0, ce qui mene au dernier terme du (4.3). Ce terme, apres avoir substitué n de l'expression pour la déformation moyenne (3.17) nous offre, la partie du terme, en étant conditionnée par l'effet du terme exclu. Les termes négligés supérieurs a N donnent leur contribution dans des termes plus grands de la série viriale.

Conclusion.

Les séries obtenues (viriales), selon leurs niveaux de concentration des nonhomogénéités des particules peuvent donc résoudre, en principe, le probleme du calcul des caractéristiques effectives. Dans ce cas, la forme prolongée de la décomposition viriale ne contient plus des intégrales qui demandent une régularisation.

On a obtenu cela grâce a l'examination du développement viriale dans des corps finis, cas dans lequel on peut démontrer que en additionant les actions de toutes les particules environantes les parties principales, distinctes des intégrales qui conférent la divergence lors du passage a un volume infini sont tout a fait nulles, suite a l'équation d'équilibre.

Au point de vue pratique, le calcul du terme de décomposition impose a résoure le probleme des n-nonhomogénéité, ce qui limite, en fait, l'applicabilité de la méthode.

Acknowledgements. A version of this paper was presented at the First Conference of Balkan Society of Geometers, Politehnica University of Bucharest, September 23-27, 1996.

References

[1] T.D.Sermergar, *Teoria uprugosti microneodnorodnîh*, M. Nauca, 1977.

[2] R. Cristensen, *Vredenie v mehanica compositor*, M. Mir, 1982.

[3] I.M. Lifşiţ, L.H. Rozenţveig, *C. teorii uprughih svoistv poleristallov*, Jurn. experim. i teoret. fizichi, 1964, 1951, T16, vip 11-c, 967-980.

[4] L.D. Landau, E.M. Lifşiţ, *Electrodinamica sploşnih sred*, Nauca 1982.

[5] D. Eşelbi, *Continualnaia teoria dislocaţii*, M. Izd- voinostr. lit., 1963.

[6] A.D. Buckingham, J.A. Pople, *The dielectric constant of an imperfect non polar gas*, Trans. Farady Soc. 1955, vol. 51, pt. 8, 1029-1035.

[7] V. Braun, *Dielectrichi*, M. Uzd-vo inostr. lit., 1961.

[8] M.F. Finkelberg, *Virialnoe razlojenie v zadace ob electrostaticescoi polarizaţii mnoghih tel*, Docl. An. SSSR 1963, T152, no.2, S.320-323.

[9] D.J. Jeffrey, *Group expension for the bulk properties of a statistically homogeneus random suspension*, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1974, vol. 338, no.1615, 503-516.

[10] A.M. Golovin, V.E. Cijov, *C rascetu effetivnoi teploprevednosti syspenzii*, Pricl. matematica i mehanica, 1984, T.48, 273-281.

[11] D.A.G. Bruggeman, *Berechnung verschidener Phisikalischer Konstanten von Heterogen Substanzen*, Ann. Phys. 1935, bd. 24.

[12] R. Landauer, *The electrical resistence of binary metallic mixtures*, j. Appl. Phys. 1952, vol. 23, 779-784.

[13] R.W. Zimmerman, *Elastic moduli of a solid with spherical pores new self-consistent method*, J. Rock. Mech. Min. Sci. a Geomech. Abstr. 1984, vol. 21, no.6, 339-343.

[14] A.V. Dîschin, *C rascetu effectivnîh deformaţionnîh haracteristic materiala s treşcinami*, Izv. An. SSSR, Mehanica tverdogo tela, 1985, nr.4, 130-135.

[15] L.J. Wallpole, *The elastic behaviour of a suspension of spherical particles*, Quart. J. Mech. a Appl. Math., 1971, vol.25, 135-160.

[16] A.N. Fuzî, L.P. Horoşun, G.A. Vanin, i dr., *Mehanica compozitnîh materialnov i elementov construcţii*, Kiev, Nauk dumca, 1982, 368.

[17] C. Teodosiu, *Uprughie modeli defectov i cristallîh*, M. Mir, 1985.

[18] L.I. Slepian, *Mehanica treşcin*, Sudostroenie, 1981, 296.

University Politehnica of Bucharest
Department of Mathematics I
Splaiul Independentei 313
77206 Bucharest, Romania