Divulgaciones Matemáticas Vol. 13 No. 2(2005), pp. 127–146

Conjuntos, Números y Maestros: Factores Condicionantes del Estudio de una Teoría Matemática

Sets, Numbers and Teachers: Conditioning Factors of the Study of a Mathematical Theory.

Mario José Arrieche Alvarado (marrieche@ipmar.upel.edu.ve)
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Núcleo Maracay
Departamento de Matemática
Maracay, Edo. Aragua, Venezuela.

Resumen

En este trabajo resumimos la investigación que hemos llevado a cabo sobre el papel que las nociones básicas de la teoría de conjuntos debería desempeñar en la preparación matemática de los maestros de primaria en formación (Arrieche, [1]). Para tal fin, nos hemos centrado en el estudio de las relaciones de los conjuntos con los números naturales. Hemos adoptado el modelo teórico propuesto por Godino y Batanero ([10], [11]) designado como semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática. La naturaleza del problema considerado nos condujo a un paradigma metodológico de tipo mixto entre métodos cualitativos y cuantitativos (Goetz y Lecompte, [13]), utilizando con mayor intensidad el método cualitativo.
Palabras y frases clave: Teoría de conjuntos, Formación de maestros, Números naturales, Semiótico-antropológico.

Abstract

In this work we summarize the investigation that have carried out on the role that the basic notions of the set theory should perform in the mathematical preparation of the teachers of primary education in formation (Arrieche, [1]). For such end, we have centered us in the study of the relations of the sets with the natural numbers. We have adopted

Recibido 2005/04/14. Revisado 2005/10/31. Aceptado 2005/11/03.
MSC (2000): Primary 97D30.

the theoretical model proposed by Godino and Batanero ([10], [11]) appointed as semiotic-anthropological for the investigation in teaching of the mathematics. The nature of the respected problem conducted us to a paradigm metodological of mixed type between quantitative and qualitative methods (Goetz y Lecompte, [13]), utilizing with greater intensity the qualitative focus.
Key words and phrases: natural numbers, formation of teachers, praxeología mathematical, semiotic, anthropological.

1 Introducción

En este trabajo se presenta un resumen de la investigación sobre el papel que deberían desempeñar las nociones básicas de teoría de conjuntos en la formación matemática de los maestros de Educación primaria. El mismo conduce al autor a la obtención del grado de doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (España). Por cuestiones de espacio, solo describimos sucintamente el problema de investigación haciendo énfasis en el enfoque utilizado, algunas investigaciones previas relacionadas con el tema, las aportaciones de la investigación con los problemas abiertos propuestos y los factores condicionantes del estudio de una teoría matemática. Se remite al lector interesado en profundizar en este tema a Arrieche, [1]. El objetivo general de esta investigación se centra en un aspecto específico de la formación matemática de los maestros de Educación Primaria: clarificar el papel que el lenguaje conjuntista debería tener en esa formación. Con dicho fin se tienen en cuenta las facetas epistemológicas, instruccional y cognitiva puestas en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en cualquiera de los niveles educativos existentes, de cuyo análisis se derivan conocimientos necesarios para la toma de decisiones sobre el problema didáctico planteado. Puesto que la problemática es muy amplia, nos hemos restringido al estudio de las relaciones de los conjuntos con los números naturales, dado el carácter central que los números desempeñan en la matemática escolar, y por tanto en la formación de maestros. El marco teórico desde el que se plantea el problema, propuesto por Godino y Batanero ([10], [11]) designado como semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de la Matemática, atribuye un papel esencial a los aspectos epistemológicos, esto es, la indagación de la naturaleza de los conocimientos matemáticos objeto de investigación. Por dicho motivo se analiza, en primer lugar, el papel de la teoría de conjuntos en la propia matemática, analizando su origen, los problemas abordados y la progresiva consolidación del lenguaje conjuntista como elemento central de la matemática. Así mismo, se estudian las relaciones ecológicas entre las nociones conjuntistas y las diversas construcciones de los números naturales.

Las facetas instruccional y cognitiva se abordan mediante el análisis de un proceso de estudio de la teoría de conjuntos y los números naturales en un curso de formación de maestros y la evaluación final de los significados de una muestra de 122 estudiantes sobre las nociones conjuntistas elementales.

2 Investigaciones previas

En este apartado describimos brevemente las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la teoría de conjuntos, realizadas con grupos de maestros en formación presentados en los trabajos de Linchevski y Vinner [14], Zazkis y Gunn [20], Fischbein y Baltsan [7] y Arrieche [2].

Linchevski y Vinner [14] en una investigación sobre “el concepto ingenuo de conjunto en maestros de la escuela elemental”, estudiaron cuatro aspectos del concepto de conjunto en una muestra de 309 sujetos, los cuales son los siguientes: a) el conjunto como una colección arbitraria de objetos, b) la colección formada por un objeto como un conjunto, c) el conjunto como elemento de otro conjunto; y d) el orden de los elementos de un conjunto y el problema de los elementos repetidos.

En este estudio se escogieron varios aspectos del concepto matemático de conjunto y examinaron si los maestros poseen conocimientos de ello, y si no, cuáles son sus concepciones.

El procedimiento de recolección de datos consistió en la aplicación de un cuestionario escrito. Para su elaboración, se realizó una entrevista a 21 maestros, en donde se le propusieron varias preguntas y se grabaron sus reacciones. Entre algunos de los ítems relacionados con nuestro trabajo, señalamos los siguientes:

1. ¿Cuáles de las siguientes colecciones es un conjunto? Explique su respuesta.

   (a) 1, 3, 7, 9, 0, 12

   (b) un libro, 1, 3, una mesa, 7, 9

   (c) una cuchara de mesa, una cuchara de té, un tenedor, un cuchillo.

   (d) 7.

   (e) Todos los niños con menos de 10 años que han volado a la luna.

   (f) $\{7\}$, $\{5\}$, 7, 5.

(g) un triángulo, un cuadrado, un círculo, una caja.

2. Un maestro pidió a sus estudiantes dar un ejemplo de un conjunto. Uno de los estudiantes escribió: Mi conjunto tiene tres elementos: a) 5, b) 1.5, c) el conjunto de todos los enteros impares entre 2 y 100. ¿Es esta respuesta correcta? Explica tu respuesta.

Los resultados revelaron que el concepto ingenuo de conjunto en estos maestros difería del concepto matemático. La mayoría de estos sujetos creían que los elementos de un conjunto dado tienen una propiedad común, que un conjunto no puede ser elemento de otro conjunto y que los elementos repetidos de un conjunto deben contarse por separado. Además, casi la mitad de las personas estudiadas rechazaron que la colección formada por un solo objeto es un conjunto.

Zazkis y Gunn [20], realizaron una investigación sobre la comprensión de los conceptos básicos introductorios de la teoría de conjuntos, tales como: conjunto, elemento de un conjunto, cardinalidad, subconjunto, y el conjunto vacío, en un grupo de maestros en formación de la Facultad de Educación de la Universidad Simon Fraser (Canadá), correspondiente al curso de desarrollo profesional de profesores de matemáticas. La técnica de recogida de datos consistió en la aplicación de un cuestionario escrito, entrevistas clínicas, y la participación de estudiantes en un proyecto basado en el uso de ordenadores. El experimento incluyó los conceptos básicos de conjuntos en un entorno abierto basado en un ordenador con el programa matemático ISETL.

Después de la enseñanza del tema de la teoría de conjuntos, se aplicó un cuestionario escrito a 46 estudiantes. Las respuestas de todos los estudiantes se recogieron en términos de verdadero o falso, de acuerdo a sus decisiones y exactitud según las convenciones matemáticas. A continuación presentamos una síntesis de este cuestionario, señalando algunos de los ítems relacionados con nociones conjuntistas estudiadas en la tesis.

Dado el conjunto $A = \{5, 7, \{5\}, \{5, 7, \{7\}\}\}$. Determine el número de elementos de A.

¿Verdadero o falso? Marque con un círculo su decisión. Explique la respuesta.

1)	5 es un elemento de A	v	f
2)	$\{5\}$ es un elemento de A	v	f
3)	$\{5,\ 7,\ \{7\}\}$ es un elemento de A	v	f
4)	$\varnothing$ es un elemento de A	v	f
5)	$\{5\}$ es un subconjunto A	v	f
6)	$\{\varnothing\}$ es un subconjunto A	v	f
7)	$\varnothing$ es un subconjunto A	v	f
8)	$\{5, 7, \{7\}\}$ es un subconjunto A	v	f

Los resultados revelaron complejidades en la comprensión de los estudiantes en las nociones de los conceptos estudiados, sobre todo cuando los elementos de un conjunto son a la vez conjuntos, pues, interpretaban el elemento como un subconjunto. También se prestó atención especial a la descripción de las dificultades mostradas por los estudiantes con el concepto de conjunto vacío.

Fischbein y Baltsan [7], en una investigación realizada en un grupo de estudiantes, entre los que se encontraban maestros en formación, sobre "el concepto matemático de conjunto y el modelo colección", analizaron los diferentes conceptos erróneos sostenidos por los estudiantes con respecto al concepto matemático de conjunto. Entre los objetivos propuestos en este trabajo, se encontraban: a) verificar la hipótesis de que todos los conceptos erróneos con respecto al concepto matemático de conjunto tienen su origen en la influencia tácita del modelo "colección", b) determinar el efecto del modelo colección después que el estudiante aprende el concepto formal de conjunto; y c) notar el efecto de la edad.

La muestra considerada en este estudio, consistió en cuatro grupos de sujetos: (a) 46 estudiantes del curso 8vo.; (b) 51 estudiantes del curso 10mo.; (c) 21 estudiantes de Universidad (maestros de escuela elemental en formación); (d) 32 estudiantes de Universidad (los maestros en formación de la escuela de primer ciclo de secundaria) para quienes la matemática es un tema principal. Se elaboró un cuestionario, cuyas preguntas tenían el propósito fundamental de verificar la hipótesis de investigación.

Al igual que en los casos anteriores, presentamos aquellos ítems que guardan una estrecha relación con las nociones conjuntistas que analizamos en el capítulo 7.

1. Los elementos constituidos por todos los números mayores que 8 y menores que 10, ¿definen un conjunto? En caso afirmativo, señale cuántos elementos tiene.

2. ¿Es correcto afirmar que los puntos en donde se intersectan dos rectas diferentes constituyen un conjunto? En cada caso afirmativo, ¿cuántos

elementos tiene?

3. ¿Es posible definir un conjunto en donde su único elemento sea el 5?
4. ¿Es posible definir un conjunto formado por los puntos de la intersección de dos rectas paralelas? Si es afirmativo, ¿cuántos elementos tiene?
5. ¿Es posible formar un conjunto con los elementos comunes de las siguientes colecciones: 9, 7, 17, 10, 5, 3 y -9, -17, -10, -5, -3?
6. La colección 2, 4, 6, 8, 10,$\cdots$ ¿define un conjunto? En caso afirmativo, ¿cuántos elementos hay en el conjunto?
7. ¿La colección de todos los números que contienen el dígito 8 es un conjunto? ¿cuántos elementos tiene?

En los resultados obtenidos se mostraron en los estudiantes las siguientes interpretaciones: a) un conjunto es una colección de objetos que tiene una propiedad común, b) los elementos de un conjunto son números, c) un conjunto debe poseer un número mínimo de elementos, d) no aceptaron la posibilidad de que un conjunto pueda consistir en un sólo elemento, e) no aceptan la existencia de un conjunto vacío, f) dos conjuntos son iguales si tienen el mismo número de elementos; y g) contaron separadamente los elementos repetidos en los conjuntos.

Arrieche [2] realizó una investigación sobre la comprensión de nociones básicas de teoría de conjuntos, tales como conjunto, subconjunto, elemento de un conjunto, conjunto vacío, conjunto unitario y operaciones entre conjuntos en un grupo de maestros de primaria en formación de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada-España. El objetivo principal de este estudio consistió en caracterizar los significados personales de estos estudiantes con respecto a nociones básicas de teoría de conjuntos. Para tal efecto, el autor usó la noción de significado personal en el sentido dado por Godino y Batanero ([10], [11]) como el sistema de prácticas (actuativas y discursivas) manifestadas por un sujeto ante una cierta clase de tareas. Estas manifestaciones indicarán los aprendizajes logrados, así como las respuestas erróneas, juzgadas desde el punto de vista institucional, y que son indicativas de las dificultades y conflictos cognitivos de los sujetos en el estudio del tema.

Una vez concluida la enseñanza del tema, se aplicó un cuestionario escrito a los alumnos, formado por 7 ítems conteniendo en total 25 subitems con la finalidad de determinar lo aprendido, los errores y las dificultades presentadas por los estudiantes en la comprensión de estos contenidos. Se trataba de preguntas de respuestas abiertas donde el alumno tiene o bien que definir conceptos, efectuar operaciones, argumentar la verdad o falsedad de proposiciones, realizar comprobaciones y demostraciones, o resolver problemas.

Los resultados obtenidos revelaron que las mayores dificultades se han presentado en la negación de la definición simbólica de intersección, en la demostración de una propiedad de conjuntos y en la aplicación de las propiedades de una relación binaria. Entre los principales errores detectados mencionamos los siguientes: Imprecisión en las definiciones de los conceptos, que indican una comprensión insuficiente. Confusión entre conceptos, como, por ejemplo entre elemento y subconjunto; entre intersección y complementario de la unión, entre aplicación y correspondencia, entre equivalencia e igualdad, entre conjunto unitario y elemento. No reconocimiento o aplicación incorrecta de propiedades del conjunto vacío, subconjunto.

3 El problema de investigación y el enfoque

El objetivo general de nuestro trabajo consiste en investigar un aspecto del currículo matemático de los estudiantes de Magisterio, que, una vez pasada la "resaca" de la "matemática moderna", es conflictivo actualmente: el papel que las nociones básicas de teoría de conjuntos deberían desempeñar en los planes de formación de maestros de educación primaria. Las preguntas iniciales que motivaron nuestra investigación fueron:

- ¿Cuál es el papel que debería desempeñar el estudio de los conjuntos, aplicaciones y relaciones en la formación de los maestros?
- ¿Es útil el lenguaje conjuntista para desarrollar los restantes temas del programa, en particular en el estudio de los números naturales?
- ¿Interesa incluir un tema introductorio en el programa sobre conjuntos, relaciones y aplicaciones, o por el contrario, dichos contenidos pueden y deben ser tratados de manera implícita y a medida que se usan?

La decisión de incluir un tema en el currículo puede estar basada en su conexión con otros temas, esto es, por su carácter instrumental. Pero es necesario investigar su viabilidad y los requisitos necesarios para el estudio. No es suficiente realizar un estudio de tipo epistemológico-ecológico, sino que hay que tener en cuenta los restantes componentes de los sistemas didácticos: el profesor, los alumnos y las estrategias instruccionales implementadas. ¿Qué conflictos cognitivos tienen los alumnos con los distintos componentes del significado de las nociones pretendidas? ¿Cómo implementan el estudio del tema los profesores en función del tiempo y recursos disponibles? Las facetas cognitiva e instruccional proporcionan también criterios sobre el grado y modo de estudio de un tema matemático, como es en nuestro caso, la teoría de conjuntos en la formación de los maestros. Esta parte de nuestra investigación nos lleva a caracterizar:

- Los significados elementales o sistémicos (praxeológicos) puestos en juego en el libro de texto (Krause, 1991) usado en el proceso de estudio de los temas conjuntos, relaciones y funciones de un grupo de maestros en formación.

- Las praxeologías matemáticas implementadas en el desarrollo de las clases impartidas por un profesor en la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", correspondiente al programa de formación de maestros, en los temas de introducción de nociones conjuntistas y la construcción de los números naturales.

- Los significados personales construidos por los maestros en formación sobre las nociones conjuntistas tras el proceso de estudio implementado, tratando de explicar los conflictos semióticos, al menos parcialmente, mediante la trayectoria didáctica implementada.

Esta información nos parece necesaria para la toma de decisiones sobre la orientación del currículo y la identificación de los puntos críticos del proceso de enseñanza y aprendizaje correspondiente.

Inicialmente el problema tiene un interés que podemos calificar de práctico para un profesor: ¿qué contenidos matemáticos debo enseñar a mis alumnos y cómo enseñarlos? Puesto que en los últimos diseños curriculares se han suprimido las nociones conjuntistas de la educación primaria, estamos tentados a responder que el papel de la teoría de conjuntos en la formación de los maestros debe ser nulo, dado que no tienen que enseñar esos contenidos.

Esto implica que podemos prescindir del lenguaje de los conjuntos, aplicaciones y relaciones cuando los maestros estudien los sistemas numéricos, la geometría y las magnitudes. Pero nos queda la duda si con esa opción drástica creamos una barrera para que los maestros puedan ampliar sus conocimientos matemáticos sobre temas algo más avanzados que los que se supone tendrán que enseñar en el ejercicio de su profesión, y que requieren de los conjuntos para ser estudiados de una manera apropiada.

También es posible que perdamos la oportunidad de ofrecer una presentación estructurada de los restantes contenidos del programa. Parece, pues que la respuesta de supresión se basa mas bien en meras opiniones. Para tomar una decisión fundada es necesario disponer de información que no está directamente accesible y, por tanto, requiere investigación.

Nuestra investigación se ha situado claramente en una aproximación epistemológica (Gascón, [9]), esto es, elegimos como punto de entrada y central para indagar los problemas didácticos el propio conocimiento matemático. Para ello incluso se adoptan y elaboran modelos epistemológicos que consideran el saber matemático desde una perspectiva multifacética y relativa a los contextos institucionales en que desempeña sus roles. Este enfoque de investigación se ejemplifica en nuestro caso al adoptar como tema central la clarificación de los significados (Godino y Batanero, 1994, 1998) de la "praxeología conjuntista" y sus relaciones ecológicas con las "praxeologías numéricas". También adoptamos como marco teórico el enfoque semiótico de la cognición matemática (Godino, [12]).

Pero la didáctica de la matemática no debe caer en un epistemologísmo, esto es, una posición reduccionista de los problemas didáctico-matemáticos, prescindiendo de estudiar los restantes componentes del sistema didáctico (profesor, estudiante) y del contexto institucional en que tiene lugar la interacción didáctica. Tampoco puede prescindir de estudiar las relaciones entre dichos componentes.

4 Síntesis de aportaciones y problemas abiertos

4.1 Relaciones entre los números y los conjuntos: Necesidad de distinguir entre número y cardinal

En el desarrollo de nuestra investigación hemos encontrado que las nociones básicas de la teoría de conjuntos están involucradas implícita o explícitamente en las diversas construcciones de los números naturales. El uso de nociones conjuntistas es esencial y explícito en las construcciones realizadas por Frege [8] y Dedekind [5], así como en las construcciones de tipo axiomático- constructivista (Peano [16], Weyl [19]), Lorenzen [15].

Nuestra investigación, apoyándonos en las críticas de Benacerraf [3] a la construcción de Frege, nos ha permitido concluir que los números no deben confundirse con los conjuntos, que cada número no se puede identificar con una colección de conjuntos coordinables, ni como una propiedad de los conjuntos coordinables entre sí. Sin embargo, los cardinales de los conjuntos, su numerosidad, son la razón de ser de los números. Esto se muestra bien al analizar la presentación de los números naturales en los libros de texto usados actualmente: ha desaparecido el discurso conjuntista, pero no la praxis conjuntista.

La definición de Frege [8] y Russell [17] de número natural como una clase de equivalencia debe ser interpretada como una representación del número natural; el conjunto de clases de equivalencia que constituyen los cardinales puede ser vista como un sistema de entidades dotado de la estructura numérica natural.

El estudio realizado de las diversas construcciones de los números naturales nos ha permitido llegar a una conclusión de importantes consecuencias didácticas: Los números naturales se deben concebir como un tipo de estructura recursiva, no como propiedades de los conjuntos, ni incluso como conjuntos o clases de equivalencia de conjuntos. Estos sistemas de entidades (cardinales, notaciones, propiedades de conjuntos) pueden ser estructurados mediante una ordenación natural, constituyendo, por tanto, ejemplares particulares del tipo de estructura numérica natural.

La indagación sobre las diversas construcciones de los números naturales nos lleva a seleccionar como más apropiada la visión propuesta por Dedekind, que en esencia es la misma que las de Peano, Weyl, Lorenzen y Benacerraf, y que podemos describir como enfoque axiomático-constructivista. Esta es una manera más general y comprensiva de considerar a los números que la visión logicista de Frege y Russell que identifican los números con algunos tipos de conjuntos particulares. Cada sistema de numerales, entre los que se deben incluir las notaciones y materializaciones usadas para expresar cardinales, como también el propio sistema de cardinales finitos, son ejemplares del tipo estructural que designamos como "números naturales". La distinción entre ejemplar y tipo que propone el enfoque semiótico de la cognición matemática de Godino [12] se revela aquí como un constructo útil para entender las relaciones entre las diversas construcciones de $\mathbb{N}$.

4.2 Números y conjuntos en los libros de texto de primaria: Paso de una presentación logicista a otra constructivista

Nuestro estudio de las relaciones entre los conjuntos y los números naturales nos permite analizar y valorar la pertinencia y adecuación de las maneras de presentar los números naturales en la educación primaria y en la formación de profesores. A título de ejemplo, veamos en la figura 1 la manera en que se introducían los números del 1 al 5 en un libro de texto de primaria correspondiente al periodo de vigencia de la "matemática moderna" (Ferreros, Gil y Roldán, [6]).

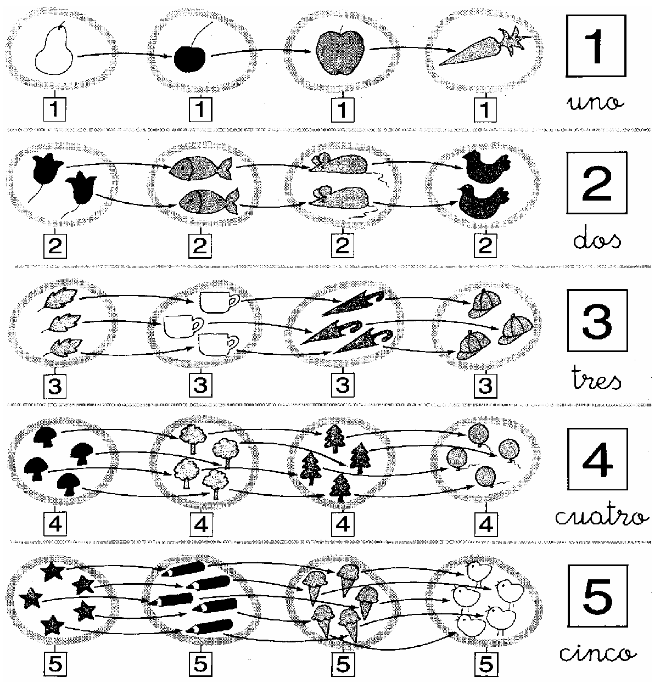


Figura 1: Los números 1 al 5 en libros de la época de la matemática moderna

El esquema presentado enfatiza la coordinabilidad que se establece entre las colecciones de uno, dos, tres, cuatro y cinco objetos. Queda en un segundo plano el hecho que entre una fila y la siguiente las colecciones consideradas tienen un objeto más; se quiere asociar el uso de un mismo símbolo numérico para designar a todas las colecciones de objetos que son coordinables entre sí.

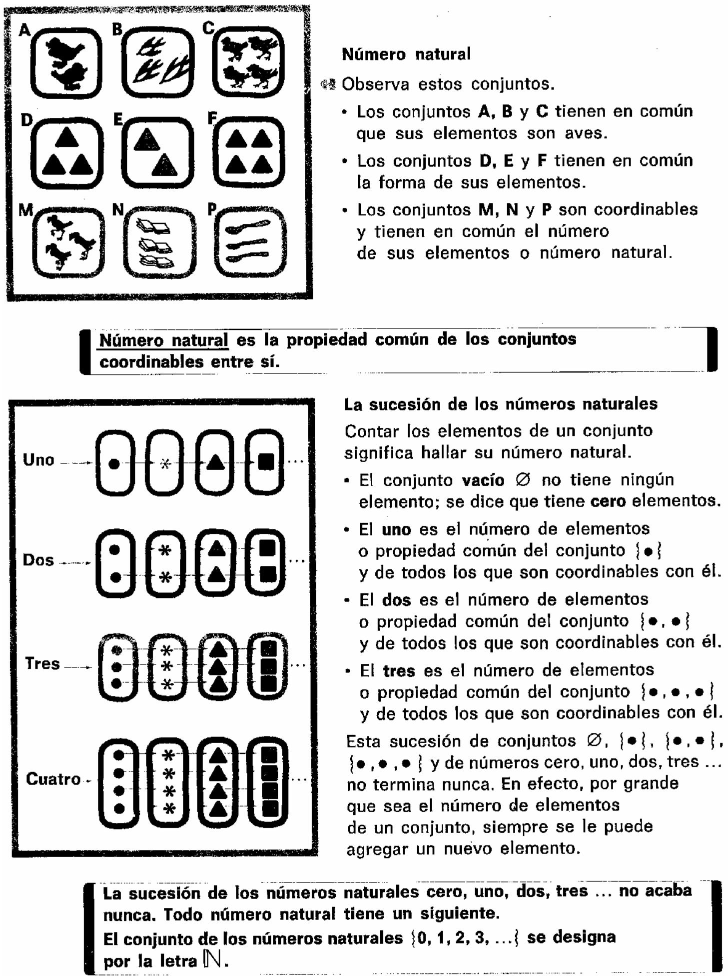
El uso de la teoría de conjuntos en los libros de primaria de la época de la matemática moderna lleva a definir un número natural, como "propiedad común de los conjuntos coordinables entre sí", como se muestra en la figura 2. Esta definición de número natural es rechazada por Russell [17] considerando que adolece de un defecto absolutamente fatal: no muestra que es solamente un objeto el que satisface la definición. El lenguaje empirista de "propiedad común" de los conjuntos coordinables no aporta nada nuevo al uso de los símbolos numéricos en las situaciones de recuento y ordenación de colecciones, regulado como se describe en la segunda parte de la figura 2.

En esta parte de la investigación dejamos como problema abierto el de la elaboración y experimentación de un módulo de estudio de los números naturales para la formación de profesores de primaria, que sin un formalismo complejo muestre los diversos enfoques de $\mathbb{N}$ de manera comprensiva y articulada.

4.3 La cardinación de conjuntos como praxis conjuntista

El modelo epistemológico adoptado para la realización de nuestra investigación nos lleva a distinguir como constituyentes esenciales de cualquier organización matemática la praxis y el logos (Chevallard, Bosch y Gascón, [4]). El logos, o discurso matemático, emerge como consecuencia de una praxis (problemas y técnicas) que constituye la razón de ser del discurso teórico.

Esto tiene consecuencias educativas importantes, ya que si deseamos que el estudiante dote de significado fenomenológico al discurso conjuntista, será necesario que se le ponga en contacto con problemas y técnicas que motiven su invención. En la enseñanza de las matemáticas elementales encontramos, como tipos de problemas que puedan justificar el uso del lenguaje conjuntista, los relativos a la construcción de los números naturales, como medios para expresar los cardinales de los conjuntos finitos, pero sin caer en la visión reduccionista del logicismo de identificación de los números con conjuntos. A título de ejemplo vemos en la figura 3 la introducción de los números 1 al 5 en un libro de texto de primaria usado en la actualidad. El libro (Varela y cols., [18]) comienza con el estudio de los números del 1 hasta el 5. La consigna que se da al niño es escueta: ¿Cuántos hay? De manera indirecta se pide hallar el cardinal de 9 colecciones de objetos dados mediante una propiedad: ¿Cuántos



Número natural

Observa estos conjuntos.

- Los conjuntos **A, B** y **C** tienen en común que sus elementos son aves.
- Los conjuntos **D, E** y **F** tienen en común la forma de sus elementos.
- Los conjuntos **M, N** y **P** son coordinables y tienen en común el número de sus elementos o número natural.

Número natural es la propiedad común de los conjuntos coordinables entre sí.

La sucesión de los números naturales

Contar los elementos de un conjunto significa hallar su número natural.

- El conjunto **vacío** $\varnothing$ no tiene ningún elemento; se dice que tiene **cero** elementos.
- El **uno** es el número de elementos o propiedad común del conjunto $\{\bullet\}$ y de todos los que son coordinables con él.
- El **dos** es el número de elementos o propiedad común del conjunto $\{\bullet, \bullet\}$ y de todos los que son coordinables con él.
- El **tres** es el número de elementos o propiedad común del conjunto $\{\bullet, \bullet, \bullet\}$ y de todos los que son coordinables con él.

Esta sucesión de conjuntos $\varnothing$, $\{\bullet\}$, $\{\bullet, \bullet\}$, $\{\bullet, \bullet, \bullet\}$ y de números cero, uno, dos, tres ... no termina nunca. En efecto, por grande que sea el número de elementos de un conjunto, siempre se le puede agregar un nuevo elemento.

La sucesión de los números naturales cero, uno, dos, tres ... no acaba nunca. Todo número natural tiene un siguiente.
El conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ se designa por la letra $\mathbb{N}$.

Figura 2: Definición de $\mathbb{N}$ por abstracción cuadernos, niñas, niños, patos, maestras, sillas, niños sentados, papeleras, mesas hay representados en la escena? La realización de la tarea pedida supone el manejo de colecciones finitas de objetos, su clasificación en subcolecciones de acuerdo con una propiedad característica, la producción de una colección de marcas coordinable con cada subcolección y el recuento de los objetos (determinación del cardinal del conjunto correspondiente) expresado aquí mediante el sistema de numeración más simple (colecciones de marcas).

Para el caso de la formación de maestros, una presentación de las nociones conjuntistas básicas motivadas en el contexto de la descripción y solución de problemas de cardinación, o de otros tipos de problemas de geometría, medida y estocástica, no ha sido aún desarrollada. Los libros de texto disponibles hacen una presentación del lenguaje conjuntista de una manera directa, indicando ejemplos de uso artificiales y en su mayor parte triviales.

Un problema abierto relevante es, por tanto, el diseño y experimentación de módulos de estudio de la "teoría de conjuntos", contextualizada en problemas significativos de construcción de los sistemas numéricos y de los restantes bloques curriculares.

4.4 El análisis semiótico como técnica para caracterizar praxeologías matemáticas e identificar conflictos semióticos

La metodología utilizada para obtener criterios fundados para determinar el papel que las nociones conjuntistas desempeña en la formación matemática de los maestros de primaria, podría ser útil para determinar el papel de otros contenidos matemáticos en la formación de maestros o en cualquiera otra especialidad. Así mismo, consideramos como aporte significativo la aplicación de la técnica del análisis semiótico para caracterizar, tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática. En nuestro caso, fue aplicado con los conjuntos, relaciones, aplicaciones y los números naturales en el contexto de la formación de maestros, pero creemos que esta herramienta metodológica puede ser útil con otros contenidos matemáticos y otros contextos institucionales. Este tipo de análisis puede ser una herramienta útil para evaluar si un libro de texto presenta características matemáticas y didácticas adecuadas para que los estudiantes de un determinado nivel educativo sigan el proceso de estudio correspondiente.

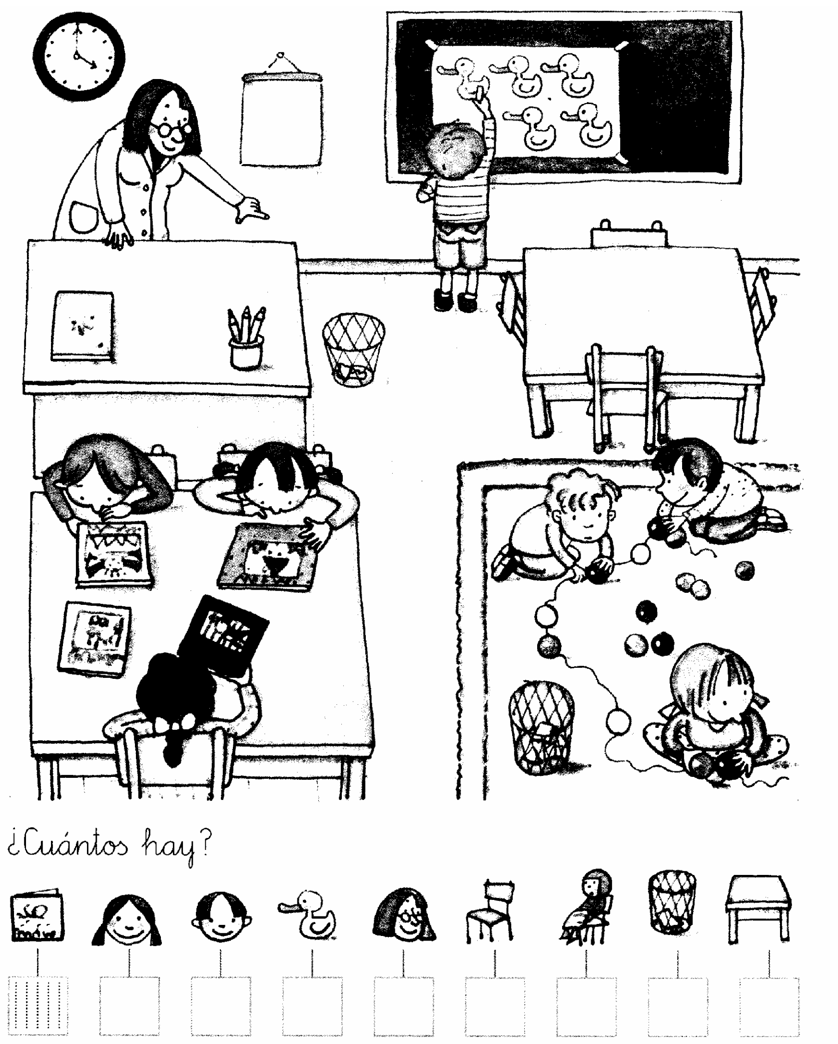


Figura 3: Introducción de los números del 1 al 5 en libros de la época actual

4.5 Explicación de conflictos semióticos mediante el análisis del proceso de estudio

El estudio cognitivo realizado con una muestra de 122 estudiantes de magisterio nos ha llevado a la conclusión que las nociones básicas de teoría de conjuntos, tales como: subconjunto, conjunto vacío, conjunto unitario, elemento de un conjunto, relación, aplicación biyectiva no son triviales ni evidentes para los futuros maestros.

Con nuestra investigación hemos realizado una descripción sistemática de los errores y dificultades que manifiestan los maestros en formación en el aprendizaje de las nociones básicas de la teoría de conjuntos tras el proceso de estudio implementado. Esta faceta de la investigación, nos ha aportado información sobre los aspectos que requieren una mayor atención por parte del docente y de los dicentes en el proceso enseñanza-aprendizaje de estos contenidos.

El análisis del proceso de estudio de las nociones indicadas por un grupo de alumnos nos ha permitido identificar algunos factores explicativos de los conflictos semióticos que plantea la comprensión de estas nociones. Este análisis ha tenido en cuenta el texto usado como material de apoyo y la transcripción de las interacciones entre profesor y estudiantes durante las clases observadas.

5 Factores condicionantes del estudio de una teoría matemática

Al describir el problema de investigación, hemos indicado que nos interesamos, no sólo por el aprendizaje de los alumnos, sino también por los aspectos instruccionales, por la faceta epistemológica y sus mutuas interacciones. Esto no implica que quitemos valor a las investigaciones que se centran en una sola de estas facetas, pero consideramos que la didáctica de la matemática tiene que abordar el estudio de las interacciones entre los aspectos epistemológicos, cognitivos, e instruccionales, sin perder de vista también otros factores contextuales, como los curriculares, socioculturales, históricos, etc.

Hemos incluido en nuestra investigación la observación y evaluación sistemática de un proceso de estudio matemático en el que el profesor y los alumnos interaccionan para fijar los significados institucionales finalmente implementados y para tratar de resolver conflictos semióticos potenciales. El profesor, apoyándose en el libro de texto que selecciona, es el último eslabón de un proceso de adaptación y fijación de los significados (transposición didáctica) que condicionan de manera importante las “oportunidades para aprender” de los estudiantes. El análisis semiótico que hemos realizado del texto y de las explicaciones del profesor ha permitido fijar una “radiografía” del saber efectivamente implementado, lo que ha proporcionado algunas claves explicativas de las deficiencias de los aprendizajes de los alumnos.

En el estudio de las relaciones ecológicas entre las praxeologías numéricas y conjuntistas hemos aportado información sobre la relevancia de la teoría de la conjuntos como campo de indagación matemática y como herramienta esencial para las diversas ramas de la matemática. Pero esto no justifica de manera directa su inclusión en los currículos de educación primaria o incluso de secundaria. El estudio de cualquier organización matemática requiere tiempo, capacidades cognitivas, recursos instruccionales, etc. Cada decisión curricular, atribuida habitualmente al buen juicio y experiencia de “expertos”, requiere ser sometida a indagación sistemática si debe ser tomada de manera racional.

En nuestro caso, el estudio de la teoría de conjuntos en el currículo de formación de maestros se justificará en la medida en que desempeñe un papel instrumental en el estudio de los contenidos matemáticos propios del currículo de primaria. El oficio de maestro no es el de un matemático, por lo que no puede estudiar conjuntos por su propio interés intrínseco. Esto explica nuestro interés en estudiar las relaciones entre los conjuntos y las construcciones de los números naturales, dado el carácter esencial de los números y las operaciones aritméticas en el currículo de primaria.

Tradicionalmente, el alumno ha sido el centro de atención de las preocupaciones didácticas. Este centramiento parece natural, ya que el sistema de enseñanza se justifica por la necesidad de la sociedad de transmitir la cultura matemática y para capacitar a sus miembros en la generación de nuevos conocimientos. Los estudiantes deben apropiarse del saber y ser capaces de producir nuevos saberes que resuelvan los nuevos problemas. Esto explica que la caracterización de los significados personales de los estudiantes sea el criterio de evaluación final del funcionamiento del sistema. Pero la explicación de las deficiencias de los aprendizajes no podemos buscarla sólo en las capacidades intelectuales de los sujetos, como a menudo han supuesto las investigaciones cognitivistas. En nuestro trabajo hemos tratado de poner en relación los aprendizajes con el proceso de estudio seguido, así como con los significados institucionales implementados, ya que estos factores tienen la consideración de variables didácticas, esto es, variables sobre las que el profesor tiene un cierto grado de libertad para actuar. No ocurre eso con las variables propias del desarrollo cognitivo de los sujetos.

Esto no quiere decir que las variables de índole no cognitiva sean de tipo didáctico. El tiempo que el currículo asigna al estudio de las matemáticas, las expectativas de empleo de los maestros en formación, la ratio profesor - alumno, por ejemplo, son sin duda factores condicionantes de los aprendizajes sobre los que el profesor no tiene posibilidades de actuar.

Podemos afirmar como conclusión final de nuestra investigación que los maestros necesitan conocer las nociones elementales de la praxeología conjuntista, principalmente por sus relaciones con la praxeología numérica, y que su aprendizaje requiere tiempo de estudio, tanto dirigido como autónomo. Es posible que las severas restricciones temporales del actual currículo de formación de maestros en España impida hacer este estudio, pero ello no debe llevarnos a hacer de la necesidad, virtud, esto es, puesto que no se dispone de tiempo para el estudio, concluir que no es necesario ese estudio.

Nuestro análisis muestra, además, la extraordinaria complejidad de los problemas didáctico-matemáticos, y en consecuencia las inevitables limitaciones de los esfuerzos de investigación.

Referencias

[1] Arrieche, M. *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*, Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada, 2002.

[2] Arrieche, M. *Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros: Un estudio exploratorio de aspectos epistemológicos, curriculares y cognitivos*, Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2000.

[3] Benacerraf, P. *What numbers could not be*, en P. Benacerraf y H. Putnam (Eds), *Philosophy of mathematics, Selected readings*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1983, pp. 272–294.

[4] Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J., *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE Universidad de Barcelona y Ed. Horsori, Barcelona, 1997.

[5] Dedekind, R., *¿Qué son y para qué sirven los números?*, 1888, trad. e introducción de José Ferreirós, Alianza Editorial, Madrid, 1998.

[6] Ferreros, L., Gil, J., Roldán, G., *Matemática 1*, Santillana, Madrid, 1981.

[7] Fischbein, E., Baltsan, M., *The mathematical concept of set and the collection model*, Educational Studies in Mathematics, **37**(1999), 1–22.

[8] Frege, G., *Fundamentos de la aritmética*, 1884, trad. Ulises Moulines, Laia, Barcelona, 1972.

[9] Gascón, J., *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina cientifica*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/1, **52**(1998), 7–33.

[10] Godino, J. D., Batanero, C., *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 **3**(1994), 325–355.

[11] Godino, J. D., Batanero, C., *Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education*, en A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177–195), Kluwer, A. P., Dordrecht, 1998.

[12] Godino, J. D., *Un enfoque semiótico de la cognición matemática*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2001 (Pendiente de publicación. Recuperable en `http://www.ugr.es/local/jgodino/`).

[13] Goetz, J., Lecompte, M., *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*, Morata, Madrid, 1988.

[14] Linchevski, L., Vinner, S., *The naive concept of sets in elementary teachers*, Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (1988), Vol. 11: 471–478.

[15] Lorenzen, P., *Metamatemática* (traducción de Jacobo Muñoz), Tecnos, Madrid, 1971 (1962).

[16] Peano, G., *Los principios de la aritmética*, 1889, trad. Julián Velarde, Clásicos El Basilisco, Oviedo, 1979.

[17] Russell, B., *Los principios de la matemática*, 1903, trad. Juan Carlos Grimberg, Espasa-Calpe, Madrid, 1967.

[18] Varela, A. y cols., *Matemática 1*, Anaya, Madrid, 2000.

[19] Weyl, H., *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*, 1949, trad. Carlos Ímaz, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 1965.

[20] Zazkis, R., Gunn, Ch., *Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions*, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16 **1**(1997), 133–169.