Divulgaciones Matemáticas v. 5, No. 1/2 (1997), 11–20

# Una Condición de Suficiencia para que un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias sea Técnicamente Estable Contractivamente

*A sufficient condition for a system of ordinary differential equations to be technically contractively stable*

Pedro P. Laverde Pérez *

**Departamento de Física y Matemáticas.**
**Núcleo Universitario Rafael Rangel de la**
**Universidad de los Andes. Villa Universitaria,**
**El Prado, La Concepción de Trujillo,**
**Estado Trujillo, Venezuela.**
**FAX. 072-711230**

**Resumen**

Es conocida una condición de suficiencia para que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sea técnicamente estable contractivamente. Esta depende de la existencia de una función de Liapunov, de dos funciones numéricas integrables según Riemann, de una constante y de 6 desigualdades. En este artículo se presenta otra condición con menos requerimientos, lo que la hace más fácil de aplicar como se puede observar al conseguir una condición para la estabilidad técnica contractiva de sistemas lineales.

**Palabras y frases clave:** estabilidad técnica, estabilidad sobre intervalos de tiempo finitos, estabilidad práctica, función de Liapunov.

*Este trabajo es un resumen de la Tesis presentada por el autor en la Maestría Interinstitucional en Matemáticas de Barquisimeto, Venezuela.

**Abstract**

A sufficient condition is known for a system of ordinary differential equations to be contractively technically stable. This condition depends on the existence of a Liapunov function, two Riemann-integrable numerical functions, a single constant and six inequalities. In this paper we present a new condition which guarantees the contractive technical stability; this condition has less requirements and is easier to apply, as we show obtaining a condition for this kind of stability in linear systems.
**Key words and phrases:** technical stability, stability over a finite time interval, practical stability, Liapunov function.

# 1 Introducción

J. La Salle y S. Lefschetz [6] en la década de los sesenta hicieron un llamado, a la comunidad matemática de occidente, para trabajar sobre las estabilidades práctica y técnica; caracterizada la primera por usar cotas constantes provenientes de la experiencia real, a diferencia de la estabilidad teórica, por ejemplo la de Liapunov, en donde las cotas $\varepsilon$ y $\delta$ son variables. Ellos hicieron notar que hay sistemas que son teóricamente estables pero que en la práctica no lo son y viceversa. La estabilidad técnica es un tipo de estabilidad práctica que se considera sobre intervalos de tiempo finitos. W. Hahn [3] nos hizo caer en cuenta que trabajando sobre intervalos infinitos no se pueden verificar en la práctica los procesos físicos.

Quienes atendieron a este llamado desarrollaron una teoría cualitativa para la estabilidad técnica, entre ellos hay que destacar a Leonard Weiss quien introdujo varios conceptos, entre otros el de estabilidad técnica contractiva que es el motivo de este artículo y es análogo al de estabilidad asintótica según Liapunov.

# 2 Preliminares

Nos servirá esta sección para introducir la notación, terminología y algunos resultados conocidos que usaremos posteriormente. Los detalles, las demostraciones y un mayor desarrollo se encuentran esparcidos en las referencias [4], [7], [10] y [13], un resumen con datos del desarrollo de esta teoría en [8] y otros avances en la continuación de este tema en [9], [11] y [12].

Consideraremos las tres clases siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$x'(t) = f(t, x) \tag{1}$$

$$x'(t) = A\,x(t) \tag{2}$$

$$x'(t) = A(t)\,x(t) \tag{3}$$

donde $f : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es una función continua que satisface una condición local de Lipschitz con respecto a $x$, $A$ es una matriz de orden $n \times n$ de coeficientes reales, cada componente de la matriz $A(t)$ es una función continua de valor real e $I$ es un intervalo de la recta real.

Con $x(t; t_0, x_0)$ denotaremos la solución que en $t_0$ pasa por $x_0$. Utilizaremos $\| \ \|$ para designar una norma arbitraria definida sobre $\mathbf{R}^n$, $\| \ \|_0$ para la norma euclidiana y si todos los valores propios de una matriz $A$ son reales, usaremos $\hat{\lambda}(A)$ para el mayor de ellos.

Para una matriz simétrica $A$ es conocida la siguiente igualdad:

$$\hat{\lambda}(A) = \max \left\{ \frac{x^t A\, x}{\|x\|_0^2} \ : \ x \neq 0 \right\} \tag{4}$$

(ver [2] p. 122); el cociente del segundo miembro de (4) es llamado *cociente de Rayleigh*.

Como funciones de Liapunov usaremos, para esta clase de estabilidad, funciones $V : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ con derivadas parciales continuas y para su derivada, la siguiente igualdad:

$$\dot{V} = \nabla V(t, x) \cdot f(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} \tag{5}$$

Para cada intervalo $J$ y para cada número real $a$, asociamos con $V$ las siguientes funciones:

$$V_{i_J}(t) = \inf\{V(t, x) : \|x\| \in J\} \tag{6}$$

$$V_{S_J}(t) = \sup\{V(t, x) : \|x\| \in J\} \tag{7}$$

$$V_{m_a}(t) = \min\{V(t, x) : \|x\| = a\} \tag{8}$$

$$V_{M_a}(t) = \max\{V(t,x) : \|x\| = a\} \tag{9}$$

La derivada de la función $W(x) = \log \|x\|_0$, según (5) es

$$\dot{W}(x) = \frac{x^t A\, x}{\|x\|_0^2} \tag{10}$$

Descomponiendo la matriz $A$ como la suma de la matriz simétrica $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y la antisimétrica $A_2 = \frac{1}{2}(A - A^t)$, resulta que

$$\dot{W}(x) = \frac{x^t A_1 x}{\|x\|_0^2} \tag{11}$$

ya que $x^t A_2 x = 0$ porque el lado izquierdo de esta última ecuación es una matriz antisimétrica de orden 1. De (4), (10) y (11) tenemos que para $x \neq 0$ es válida la desigualdad

$$\dot{W}(x) \leq \hat{\lambda}(A_1) \tag{12}$$

**Definición 1** *El sistema (1) es* técnicamente estable *con respecto a*

$$(\alpha, \beta, t_0, T, \|\ \|), \quad \alpha < \beta,$$

*si* $\|x_0\| < \alpha$ *implica que* $\|x(t; t_0, x_0)\| < \beta$ *para todo* $t \in [t_0, t_0 + T)$.

**Definición 2** *El sistema (1) es técnicamente estable contractivamente respecto a* $(\alpha, \beta, \gamma, t_0, T, \|\ \|)$, $\gamma < \alpha < \beta$, *si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *El sistema es técnicamente estable con respecto a* $(\alpha, \beta, t_0, T, \|\ \|)$.
2. *si para* $\|x_0\| < \alpha$ *existe* $\sigma \in [t_0, t_0 + T)$ *tal que* $\|x(t; t_0, x_0)\| < \gamma$ *para todo* $t \in [\sigma, t_0 + T)$.

**Teorema 2.1** *El sistema (1) es técnicamente estable con respecto a*

$$(\alpha, \beta, t_0, T, \|\ \|), \quad \alpha < \beta,$$

*si existe una función* $V$ *con derivadas parciales continuas tal que*

1. $\dot{V}(t,x) \leq 0$ *siempre que* $0 < \|x\| < \beta$ *y que* $t_0 < t < t_0 + T$.
2. $V_{S_{[0,\alpha)}}(t_0) < V_{m_\beta}(t)$ *siempre que* $t_0 < t < t_0 + T$.

**Teorema 2.2** *Si* $\hat{\lambda}\left(\frac{1}{2}(A^t + A)\right) \leq \frac{1}{T}\log\frac{\beta}{\alpha}$ *entonces el sistema (2) es técnicamente estable con respecto a* $(\alpha, \beta, t_0, T, \| \ \|)$, $\alpha < \beta$.

**Teorema 2.3** *Si* $\int_0^t \hat{\lambda}\left(\frac{1}{2}(A^t(s) + A(s))\right) ds < \log\frac{\beta}{\alpha}$ *para todo* $t\epsilon[0, T)$ *entonces el sistema (3) es técnicamente estable con respecto a* $(\alpha, \beta, t_0, T, \| \ \|)$, $\alpha < \beta$.

La siguiente condición de suficiencia para la estabilidad técnica contractiva fue formulada y demostrada por Weiss e Infante [13].

**Teorema 2.4** *El sistema (1) es técnicamente estable contractivamente con respecto a* $(\alpha, \beta, \gamma, t_0, T, \| \ \|)$, $\gamma < \alpha < \beta$, *si existen una función* $V$ *con derivadas parciales continuas, dos funciones* $\varphi(t)$ *y* $\rho(t)$ *integrables sobre* $[t_0, t_0 + T)$ *y una constante* $\delta < \gamma$ *tales que*

1. $\dot{V}(t, x) < \varphi(t)$ *siempre que* $\alpha \leq \|x\| \leq \beta$ *y que* $t_0 \leq t < t_0 + T$
2. $\dot{V}(t, x) < \rho(t)$ *siempre que* $\delta \leq \|x\| < \beta$ *y que* $t_0 \leq t < t_0 + T$
3. $\int_u^v \varphi(t)dt \leq V_{m_\alpha} - V_{M_\delta}(u)$ *siempre que* $t_0 \leq u < v < t_0 + T$
4. $\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(t)dt < V_{m_\gamma}(t_0 + T) - V_{M_{[\delta,\beta]}}(t_0)$
5. $\int_u^{t_0+T} \rho(t)dt < V_{m_\gamma}(t_0 + T) - V_{M_\delta}(u)$ *si* $t_0 \leq u < t_0 + T$
6. $V(t_0 + T, x) \geq V_{m_\gamma}(t_0 + T)$ *siempre que* $\gamma \leq \|x\| < \beta$.

# 3 Otra condición de suficiencia para la estabilidad técnica contractiva

El resultado que sigue acerca de la continuidad de la función $V_i$ será usado en la demostración del próximo teorema sobre la estabilidad técnica contractiva del sistema (1).

**Lema 3.1** *Sea* $V : [0, T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *continua. Si* $\gamma$ *y* $\beta$ *son constantes tales que* $0 < \gamma < \beta$ *entonces* $\lim_{t\to T^-} V_{i_{[\gamma,\beta)}}(t) = V_{i_{[\gamma,\beta)}}(T)$.

**Demostración:** Sea $\|(x_1, \cdots, x_n)\| = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$ y sea $W = V_{i_{[\gamma,\beta)}}$. Con esta notación probaremos entonces que $\lim_{t\to T^-} W(t) = W(T)$.

El conjunto $\{(t, x) : t \in [0, T], \gamma \leq \|x\| < \beta\}$ está contenido en el rectángulo $[0, t] \times [-\beta, \beta] \times \cdots \times [-\beta, \beta]$.

Sea $\varepsilon > 0$; según el teorema de la continuidad uniforme para campos escalares continuos (ver [1] p. 391) podemos afirmar que existe una partición de este rectángulo de tal manera que la oscilación de $V$ en cada subrectángulo sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

La fórmula (6) garantiza la existencia de $x_T \in \mathbf{R}^n$ tal que $\|x_T\| \in [\gamma, \beta)$ y que cumple la desigualdad:

$$V(T, x_T) < W(T) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

Igualmente para cada $t$ existe $x_t \in \mathbf{R}^n$ tal que $\|x_t\| \in [\gamma, \beta)$ y que cumple la desigualdad:

$$V(t, x_t) < W(t) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

Por la misma fórmula, también son válidas las desigualdades:

$$W(t) \leq V(t, x_T) \tag{15}$$

$$W(T) \leq V(T, x_t) \tag{16}$$

Sea $\delta$ la longitud del subintervalo de $[0, T]$ que contiene a $T$. Si $t < T$ y si $T - t < \delta$ entonces cada una de las parejas de puntos $(T, x_T)$, $(t, x_T)$ y $(t, x_t)$, $(T, x_t)$ están en un mismo subrectángulo. Tenemos entonces para estos puntos las siguientes desigualdades:

$$V(t, x_T) - V(T, x_T) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{17}$$

$$V(T, x_t) - V(t, x_t) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{18}$$

De (13), (15) y (17) obtenemos las desigualdades:

$$W(t) - W(T) < V(t, x_T) - V(T, x_T) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y de (14), (16) y (18) obtenemos las desigualdades

$$W(T) - W(t) < V(T, x_t) - V(t, x_t) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y por lo tanto concluímos que

$$\mid W(t) - W(T) \mid < \varepsilon.$$

Otra norma $\| \|_1$ es equivalente a $\| \|$ (ver [5] p. 152), entonces existen dos constantes positivas $a$ y $b$ tales que $a\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\|x\|_1$. Por consiguiente, el conjunto $\{(t,x) : t \in [0,T], \gamma \leq \|x\|_1 < \beta\}$ está contenido en el conjunto $\{(t,x) : t \in [0,T], a\gamma \leq \|x\| < b\beta\}$ y así el lema tiene validez para cualquier norma. □

**Teorema 3.2** *El sistema (1) es técnicamente estable contractivamente con respecto a* $(\alpha, \beta, \gamma, t_0, T, \| \|)$, $\gamma < \alpha < \beta$ *si es técnicamente estable con respecto a* $(\alpha, \beta, t_0, T, \| \|)$ *y si existe una función* $V$ *con derivadas parciales continuas tal que*

1. $\dot{V}(t,x) \leq 0$ *siempre que* $0 < \|x\| < \beta$ *y que* $t_0 < t < t_0 + T$
2. $V_{S_{[0,\alpha)}}(t_0) < V_{i_{[\gamma,\beta)}}(t_0 + T)$.

**Demostración:** Supongamos que no es contractivamente estable. Por hipótesis el sistema es técnicamente estable con respecto a $(\alpha, \beta, t_0, T, \| \|)$ y podemos afirmar entonces que existen un punto $x_0$ y una sucesión creciente $\{\omega_n\}$ que converge a $t_0+T$ tales que $x(t) = x(t; t_0, x_0)$, $\|x_0\| < \alpha$ y $\|x(\omega_n)\| \geq \gamma$, para todo $n$. Por la unicidad de las soluciones, podemos considerar que $x(t) \neq 0$ para todo $t$ en $[t_0, t_0 + T)$.

Por la parte (1) de la hipótesis, por la estabilidad del sistema y porque $\|x(\omega_n)\| \neq 0$, tenemos que V es decreciente sobre la trayectoria $x(t)$, y así para todo $n$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$V(t_0, x_0) \geq V(\omega_n, x(\omega_n))$$

Las ecuaciones (6) y (7) nos permiten escribir, para todo $n$, la desigualdad:

$$V_{S_{[0,\alpha)}}(t_0) \geq V_{i_{[\gamma,\beta)}}(\omega_n)$$

Cuando $n \to \infty$ obtenemos, en virtud del Lema 3.1, la siguiente desigualdad:

$$V_{S_{[0,\alpha)}}(t_0) \geq V_{i_{[\gamma,\beta)}}(t_0 + T)$$

que contradice la hipótesis. □

**Corolario 3.3** *El sistema (1) es técnicamente estable contractivamente con respecto a* $(\alpha, \beta, \gamma, t_0, T, \| \|)$, $\gamma < \alpha < \beta$, *si existe una función* $V$ *con derivadas parciales continuas tal que*

1. $\dot{V}(t,x) \leq 0$ *siempre que* $0 < \|x\| < \beta$ *y que* $t_0 < t < t_0 + T$
2. $V_{S_{[0,\alpha)}}(t_0) < V_{m_\beta}(t)$ *siempre que* $t_0 < t < t_0 + T$
3. $V_{S_{[0,\alpha)}}(t_0) < V_{i_{[\gamma,\beta)}}(t_0 + T)$.

# 4 Sistemas lineales

Siguiendo la técnica de Weiss y Lee en [10], podemos usar el teorema 3.2 para encontrar condiciones para la estabilidad técnica contractiva de sistemas lineales, similares a las que aparecen en los teoremas 2.2 y 2.3.

Suponiendo que la función $V(t,x) = \log \|x\|_0 - \hat{\lambda}(A_1)\,t$ satisface la parte 2 del teorema 3.2 , con $t_0 = 0$, llegamos a la condición $\log \alpha < \log \gamma - \hat{\lambda}(A_1)\,t$ que nos sugiere el siguiente teorema

**Teorema 4.1** *Si el sistema (2) es técnicamente estable con respecto a*

$$(\alpha, \beta, 0, T, \|\ \ \|_0), \quad \alpha < \beta,$$

*y si* $\hat{\lambda}[\frac{1}{2}(A^t + A)] < \frac{1}{T}\log\frac{\gamma}{\alpha}$, *entonces (2) es técnicamente estable contractivamente con respecto a* $(\alpha, \beta, \gamma, 0, T, \|\ \ \|_0)$, $\gamma < \alpha < \beta$.

**Demostración.** Sea $A_1 = \frac{1}{2}(A^t + A)$, definamos $V(t,x) = \log \|x\|_0 - \hat{\lambda}(A_1)\,t$. Colocando la hipótesis en la forma $\log \alpha < \log \gamma - \hat{\lambda}(A_1)\,t$ y traduciéndola a la notación correspondiente obtenemos que

$$V_{S_{[0,\alpha)}}(0) < V_{i_{[\gamma,\beta)}}(T).$$

Con esta desigualdad y la (12), aplicamos el Teorema 3.2 para concluir que el sistema (2) es contractivamente estable con respecto a $(\alpha, \beta, \gamma, 0, T, \|\ \ \|_0)$, $\gamma < \alpha < \beta$. □

Podemos formular y demostrar el próximo teorema, para sistemas con coeficientes variables, siguiendo el mismo tratamiento con la función

$$V(t,x) = \log \|x\|_0 - \int_0^t \hat{\lambda}[A_1(s)]\,ds.$$

**Teorema 4.2** *Si el sistema (3) es técnicamente estable con respecto a*

$$(\alpha, \beta, 0, T, \|\ \ \|_0), \quad \alpha < \beta$$

*y si* $\int_0^T \hat{\lambda}\{\frac{1}{2}[A^t(s) + A(s)]\}ds < \log\frac{\gamma}{\alpha}$, *entonces el sistema (3) es técnicamente estable contractivamente con respecto a* $(\alpha, \beta, \gamma, 0, T, \|\ \ \|_0)$, $\gamma < \alpha < \beta$.

# 5 Ejemplo

Heinen y Wu propusieron en [4] encontrar el mayor intervalo para el cual resulte técnicamente estable el sistema

$$x' = (t-1)x \quad \text{con} \quad \beta = 1.01\,\alpha,\ t_0 = 0,\ \|\ \| = |\ | \tag{19}$$

Vamos a encontrar ese intervalo aplicando el teorema 2.3 . En este caso tenemos que

$$A_1(t) = t - 1 = \hat{\lambda}[A_1(t)]$$

La desigualdad que aparece en la hipótesis queda en la forma

$$\frac{t^2}{2} - t < \log 1,01.$$

Obteniendo entonces que este sistema es técnicamente estable si $T < 2,0099$.

Ahora con el teorema 4.2 podemos encontrar el menor valor de $\gamma$ de tal manera que el sistema (19) sea técnicamente estable contractivamente. De la desigualdad $\frac{T^2}{2} - T < \log\frac{\gamma}{\alpha}$ conseguimos por ejemplo para $T = 1$ que el sistema es técnicamente estable contractivamente si $\gamma \geq 0,60653\,\alpha$; para $T = 1,3$ lo es si $\gamma \geq 0,634448\,\alpha$ y para $T = 1,5$ lo es si $\gamma \geq 0,6872893\,\alpha$.

# 6 Agradecimientos

A la Maestría Interinstitucional en Matemáticas y a Ramón Gómez quien fue tutor de la Tesis de Maestría. A Neptalí Romero quien fue jurado de la Tesis y me sugirió la presentación de este artículo. A Raúl Naulín por la motivación que me ha brindado para continuar trabajando en este tema. A Pedro Briceño por su valiosa ayuda para traducir los títulos y el resumen.

# Referencias

[1] Apostol T., *Calculus*, V. 2, $2^a$ ed. Reverté, Barcelona, 1975.

[2] Bellman R., *Introducción al análisis matricial*, Reverté, Barcelona, 1965.

[3] Hahn, W., *Theory and application of Liapunov's direct method*, Prentice Hall, New Jersey, 1963.

[4] Heinen, J., Wu S., *Further results concerning finite time stability*, IEEE Trans. Auto. Cont. AC-14 (1969), 211–212.

[5] Kolmogorov, A., Fomin, S., *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, MIR, Moscú, 1978.

[6] La Salle, J., Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's direct method with applications*, Academic press, New York, 1961.

[7] Laverde, P., *Estabilidad Técnica*, Tesis de Maestría MIM, Barquisimeto, 1995.

[8] Skowronsky, J., *Applied Liapunov dynamics*, S.C.E.C., Brisbane, 1984.

[9] Weiss L., *Controllability, realization and stability of discrete-time systems*, SIAM J. Control **10**(1972) No. 2, 230–251.

[10] Weiss, L., Lee, J., *Finite time stability of linear differential equations*, Ord. Differential Equations (1972), 569–580.

[11] Weiss L., *Converse theorems for finite time stability*, SIAM J. Appl. Math. **16**(1968) N. 6, 1319–1324.

[12] Weiss, L., Infante, E., *Finite time stability under perturbing forces and on product spaces*, IEEE Trans. Autom. Control **12**(1967), 54–59.

[13] Weiss, L., Infante, E., *On the stability of systems defined over a finite time interval*, Proc. Nat. Ac. Sci USA **54**(1965), 44–48.