Divulgaciones Matemáticas Vol. 7 No. 1 (1999), pp. 101–103

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@luz.ve)
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia. Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

12. *Propuesto por Ignacio Larrosa Cañestro, I.E.S. Rafael Dieste, A Coruña, España* (ilarrosa@databasedm.es)

    Dado un polígono convexo inscripto en una circunferencia, pruebe que la suma de los radios de las circunferencias inscriptas en los triángulos de cualquier triangulación (es decir, descomposiciones del polígono en triángulos, cuyos vértices sean vértices del polígono y que lo recubran completamente sin solapamientos) es la misma.

(Given a convez polygon inscribed in a circle, prove that the sum of the radii of the circles inscribed in the triangles of any triangulation (i.e., decompositions of the polygon into triangles, whose vertices are vertices of the polygon and which recover it completely, without overlapping) is the same.

13. *Propuesto por Ignacio Larrosa Cañestro, I.E.S. Rafael Dieste, A Coruña, España* (`ilarrosa@databasedm.es`)

    Denotemos por B_n el n-ésimo número de Bell, es decir el número de particiones de un conjunto de n elementos en subconjuntos disjuntos y no vacíos.

    (a) Pruebe que B_n es par si y sólo si $n \equiv 2 \pmod 3$.

    (b) Caracterice los B_n que son divisibles entre 3.

    (Let's denote by B_n the n-th Bell number, i.e. the number of partitions of a set with n elements in disjoint, nonempty subsets.

    (a) Prove that B_n is even if and only if $n \equiv 2 \pmod 3$.

    (b) Characterize the B_n's which are divisible by 3.)

2 Soluciones

9. *(Propuesto por Víctor Ramírez en el vol. 4 (1996), p. 99.)*

    Sea R un anillo cualquiera, I el conjunto de los $x \in R$ para los cuales existe algún $y \neq 0$ tal que $xy = 0$ y D el conjunto de los $y \in R$ para los cuales existe algún $x \neq 0$ tal que $xy = 0$. Pruebe que si R es infinito entonces o bien $I = D = (0)$ o bien $\operatorname{card}(I) = \operatorname{card}(D) = \operatorname{card}(R)$.

    Solución (por el editor)

    En lo que sigue $\preceq$ denotará la relación de orden entre cardinales. Es claro que $I = (0)$ si y sólo si $D = (0)$. Supongamos entonces que $I \neq (0)$, y sea $x \in I$ tal que $x \neq 0$. Si $x \notin D$ entonces la aplicación $r \mapsto rx$ es una biyección entre R y Rx, por lo cual $\operatorname{card}(R) = \operatorname{card}(Rx)$. Pero es claro que $Rx \subset I \subset R$ por lo cual $\operatorname{card}(Rx) \preceq \operatorname{card}(I) \preceq \operatorname{card}(R)$, y se concluye que $\operatorname{card}(I) = \operatorname{card}(R)$. Si por el contrario $x \in D$, sea $S = \{r \in R : rx = 0\}$ y consideremos los dos casos siguientes:

    (a) $\operatorname{card}(S) = \operatorname{card}(R)$. En este caso, como $S \subseteq I \subseteq R$ concluimos que $\operatorname{card}(I) = \operatorname{card}(R)$.

(b) $\operatorname{card}(S) \prec \operatorname{card}(R)$. En este caso consideremos el cociente R/S (como grupos aditivos). Puesto que $\operatorname{card}(R) = \operatorname{card}(S)\operatorname{card}(R/S)$ y R es infinito, se concluye que $\operatorname{card}(R) = \operatorname{card}(R/S)$. Sea T un conjunto de representantes distintos de las coclases (aditivas) de S en R. La aplicación $t \mapsto tx$ es una biyección entre T y Tx, y como $Tx \subset I$, se concluye que $\operatorname{card}(R) = \operatorname{card}(R/S) = \operatorname{card}(T) = \operatorname{card}(Tx) \preceq \operatorname{card}(I)$, y nuevamente resulta $\operatorname{card}(R) = \operatorname{card}(I)$.

Ahora bien, como $I \neq (0)$ implica $D \neq (0)$, podemos razonar de manera análoga para obtener $\operatorname{card}(R) = \operatorname{card}(D)$.

12. *(Propuesto por el editor en el vol. 6 (1998), p. 81.)*

Pruebe que cualquier entero positivo impar que no sea múltiplo de 5 tiene un múltiplo con todas sus cifras iguales a 1, por ejemplo $3 \times 37 = 111$, $7 \times 15873 = 111111$.

Solución por Ignacio Larrosa Cañestro, I.E.S. Rafael Dieste, A Coruña, España (`ilarrosa@databasedm.es`)

Sea q entero positivo impar, no múltiplo de 5. Entonces $9q$ y 10 son coprimos y por el Teorema de Euler $10^{\phi(9q)} \equiv 1 \pmod{9q}$. Es decir que existe k entero positivo tal que $10^{\phi(9q)} = k(9q) + 1$. Por lo tanto $9kq = 10^{\phi(9q)} - 1$ y se sigue que $kq = 1\ldots1$ ($\phi(9q)$ unos), con $k = (10^{\phi(9q)} - 1)/(9q)$. Este valor de k no es en general el mínimo, por ejemplo si q no es múltiplo de 3 entonces $k'q = 1\ldots1$ ($\phi(q)$ unos), con $k' = (10^{\phi(q)} - 1)/(9q)$.

También resuelto por: Julio Subocz.