Divulgaciones Matemáticas Vol. 10 No. 2(2002), pp. 181–185

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@luz.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Los problemas que se proponen a continuación corresponden a la cuarta edición de la Olimpíada Matemática de Centroamérica y el Caribe, realizada en Mérida (Yucatán, México) del 29 de junio al 6 de julio del 2002. En esta competencia pueden participar solamente jóvenes que no hayan cumplido 16 años al 31 de diciembre del año inmediatamente anterior. La prueba se realiza en dos días consecutivos y los participantes disponen, cada día, de cuatro horas y media para resolver tres problemas.

Este año los países asistentes fueron: Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, México, Puerto Rico y Venezuela. El país ganador fue México, cuyos representantes obtuvieron tres medallas de oro.

Los representantes de Venezuela fueron José Javier Sanahuja Ortiz, Aurora Stephany Brassesco (quienes obtuvieron mención honorífica) y José Nelson Ramírez Sánchez. Los acompañaron José Nieto como jefe de delegación y Tomás Kabbabe como tutor.

1 Problemas propuestos

61. ¿Para qué enteros $n \geq 3$ es posible acomodar, en algún orden, los números $l, 2, \ldots, n$ en forma circular de manera que cualquier número divida a la suma de los dos números siguientes en el sentido de las manecillas del reloj?

62. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D y E los pies de las alturas desde los vértices A y B, respectivamente. Muestre que si

    área$(BDE) \leq$ área$(DEA) \leq$ área$(EAB) \leq$ área(ABD),

    entonces el triángulo es isósceles.

63. Para cada entero $a > 1$ se construye una lista infinita de enteros $\mathcal{L}(a)$ como sigue:

    (i) a es el primer número de la lista $\mathcal{L}(a)$.

    (ii) Dado un número b en $\mathcal{L}(a)$, el siguiente número en la lista es $b+c$, donde c es el mayor entero que divide a b y es menor que b.

    Encuentre todos los enteros $a > 1$ tales que 2002 está en la lista $\mathcal{L}(a)$.

64. Sean ABC un triángulo, D el punto medio de BC, E un punto sobre el segmento AC tal que $BE = 2AD$ y F el punto de intersección de AD con BE. Si el ángulo DAC mide $60°$, encuentre la medida de los ángulos del triángulo FEA.

65. Encuentre un conjunto infinito de enteros positivos S tal que para cada $n \geq 1$ y cualesquiera n elementos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de S, el número $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ no es un cuadrado perfecto.

66. En el plano coordenado se tiene la cuadrícula de $n \times n$, con n entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras (x, y), con $0 \leq x \leq n$ y $0 \leq y \leq n$. Considere los caminos que van de $(0, 0)$ a (n, n) sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba. Uno de tales caminos se llama *equilibrado* si la suma de los valores de x de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de y de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado n en dos figuras de la misma área.

2 Soluciones

13. [**7**(1) (1999) p. 102, propuesto por Ignacio Larrosa Cañestro]. Denotemos por B_n el n-ésimo número de Bell, es decir el número de particiones de un conjunto de n elementos en subconjuntos disjuntos y no vacíos.

    (a) Pruebe que B_n es par si y sólo si $n \equiv 2 \pmod{3}$.

    (b) Caracterice los B_n que son divisibles entre 3.

    Solución por José H. Nieto, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`jhnieto@luz.ve`).

    Sea n un entero positivo y denotemos por $\Pi(n)$ al conjunto de las particiones de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $p < n$ un primo y $T = (1, 2, \ldots, p) \in S_n$ la permutación cíclica de los números 1, 2,..., p (que deja fijos $p+1$,...,n). T induce una biyección T^* de $\Pi(n)$ en sí mismo, a saber la que hace corresponder a una partición $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ la partición $\{T(B_1), T(B_2), \ldots, T(B_k)\}$. Las particiones invariantes bajo T^* son de dos tipos:
    (i) Aquellas en las cuales cada uno de los números 1, 2,..., p está solo en un bloque. El número de estas particiones es claramente $B(n-p)$.
    (ii) Aquellas en las cuales los números 1, 2,..., p están todos juntos en el mismo bloque. El número de estas particiones es claramente $B(n-p+1)$.

    El número de las particiones restantes es múltiplo de p, ya que se pueden agrupar en órbitas de la forma P, $T^*(P)$, ${T^*}^2(P)$,..., ${T^*}^{p-1}(P)$. Por lo tanto se cumple que $B(n) \equiv B(n-p) + B(n-p+1) \pmod{p}$.

    La parte (a) se prueba ahora fácilmente por inducción, aplicando la recurrencia anterior con $p = 2$ y tomando en cuenta que $B(1) = 1$ y $B(2) = 2$.

    Para la parte (b), si se aplica la recurrencia con $p = 3$ a la sucesión $B(1), B(2), B(3), \ldots$ y tomando en cuenta que $B(3) = 5 \equiv 2 \pmod{3}$ se obtiene (módulo 3) la sucesión de restos
    1, 2, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 1,...
    la cual claramente es periódica con período 13. De aquí se sigue que $B(n)$ es divisible entre 3 si y sólo si n es congruente con 4, 8, 9 u 11 módulo 13.

50. [**9**(2) (2001) p. 209]. La suma (o diferencia simétrica) de dos conjuntos A y B se define como

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Inicialmente los 1024 subconjuntos de un conjunto de 10 elementos están escritos cíclicamente en una circunferencia. Simultáneamente entre cada dos subconjuntos vecinos se escribe su suma. Después todos los conjuntos anteriores se borran. ¿Cuáles conjuntos estarán escritos en la circunferencia después de repetir esta operación 2001 veces?

Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`jsubocz@hotmail.com`).

Sean $\ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ los subconjuntos en la circunferencia (i entero módulo 1024). Después de la primera operación tendremos en la circunferencia los elementos $\ldots, a_i + a_{i+1}, a_{i+1} + a_{i+2}, \ldots$

Luego de la segunda operación obtenemos

$\ldots, a_i + 2a_{i+1} + a_{i+2}, a_{i+1} + 2a_{i+2} + a_{i+3}, \ldots$

En la tercera se obtiene el término general $a_i + 3a_{i+1} + 3a_{i+2} + a_{i+3}$.

Continuando de esta manera, vemos que la ley de formación de los términos se puede obtener utilizando el triángulo de Pascal. Así, después de la k-ésima operación los términos en la circunferencia son de la forma:

$a_i + \binom{k}{1}a_{i+1} + \binom{k}{2}a_{i+2} + \cdots + a_{i+k}$

Ahora es fácil ver que si $k = 2^s$ entonces $\binom{k}{j}$ es par para $0 < j < k$. Mostrémoslo inductivamente. En efecto, $\binom{2}{1} = 2$.

Consideremos el desarrollo del binomio $(a + b)^k$ donde los coeficientes son tomados módulo 2, y supongamos que

$(a + b)^{2^{s-1}} = a^{2^{s-1}} + b^{2^{s-1}}$, $s \geq 2$, entonces

$(a + b)^{2^s} = ((a + b)^{2^{s-1}})^2 = (a^{2^{s-1}} + b^{2^{s-1}})^2 = a^{2^s} + b^{2^s}$.

Teniendo en cuenta que $A + A = \varnothing$ para todo conjunto A, podemos deducir que después de la 2^s-ésima operación los términos en la circunferecia son de la forma $a_i + a_{i+2^s}$. Pero para $s = 10$, $i = i + 1024$, luego $a_i = a_{i+1024}$ y entonces $a_i + a_{i+1024} = \varnothing$.

Luego, todos los términos son vacíos después de la operación n^o 1024, y por lo tanto seguirán vacíos para toda operación posterior.

52. [**9**(2) (2001) p. 209]. Sea f una función del intervalo [0, 1] en el conjunto de números reales tal que para cualesquiera x, y en el intervalo [0, 1] se cumplen las siguientes condiciones:
(a) Si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.
(b) $f(0) = 0$.

(c) $f(1-x) = 1 - f(x)$.
(d) $f(x/3) = f(x)/2$.

Demostrar que si x es racional entonces $f(x)$ es racional.

Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (jsubocz@hotmail.com).

Por (b) y (c) es (e) $f(1) = 1$. Luego, usando (a) es $0 \leq f(x) \leq 1$. Por (d) y (e) es $f(1/3) = 1/2$, y de (c) se deduce que $f(1/2) = 1/2$. Ahora por (c) es $f(2/3) = 1/2$, y usando (a) se deduce que $f(x) = 1/2$, para $x \in [1/3, 2/3]$. Por (d) se obtiene $f(x) = 1/4$ para $x \in [1/9, 2/9]$, luego, $f(x) = 3/4$ para $x \in [7/9, 8/9]$, usando (c). Continuando con este proceso, utilizando (d) y luego (c) en cada etapa, es claro que $f(x)$ queda definida para cada x en el complemento C' del discontinuo de Cantor $C \subset [0, 1]$ y que $f(x)$ es racional en C'. (Así como en los extremos de los tercios medios). Como $f(C')$ es denso en [0,1] y f es monótona por (a), hay una única extensión continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$. (Esta función fué definida y estudiada por Georg Cantor).

Si expresamos a x en base 3 y $x \in C$, entonces x tiene una expansión triádica en la cual aparecen solamente los dígitos 0 y 2. $f(x)$ tiene entonces la expansión triádica que se obtiene de la de x, cambiando cada dígito 2 por el dígito 1. [1, pp 509]. Por último, si $x \in C$ y x es racional, su expansión es periódica a partir de algún dígito, y entonces, también lo es la expansión de $f(x)$, lo que muestra que $f(x)$ es racional.

[1] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C. A. *Análisis matemático*, Kapelusz, Buenos Aires, 1952.