IJMMS 31:4 (2002) 229–249
PII. S0161171202005501
http://ijmms.hindawi.com

NON-UNICITÉ DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS QUASI-HOMOGÈNES

KHALGUI-OUNAÏES HELLA

Reçu le 19 juin 2000

Nous démontrons que si P est un opérateur différentiel quasi-homogène d'ordre m sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^n$, à coefficients de classe C^∞, tel que la m-partie principale est à coefficients réels ; et que $x_0 \in \Omega$, $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\}$ est une hypersurface non caractéristique en x_0 et strictement non pseudoconvexe avec $\{\{p_m,\phi\},\phi\}(x_0,\xi_0) \neq 0$ et $d_q p_m(x_0,\xi_0) \neq 0$, alors P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à S.

Classification 2000 des Sujets Mathématiques: 35A07.

1. Introduction. Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et S une hypersurface de Ω, passant par un point x_0, définie par

$$S = \{x \in \Omega : \phi(x) - \phi(x_0) = 0\}, \tag{1.1}$$

où ϕ est une fonction réelle de classe C^∞ vérifiant $d\phi(x_0) \neq 0$.

Définition 1.1. Soit P un opérateur différentiel défini sur Ω, on dit que P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à S s'il existe un voisinage V de x_0 dans Ω, des fonctions a et $u \neq 0$, de classe C^∞ sur V tel que $\operatorname{supp} a \subset \{x \in \Omega : \phi(x) \leq \phi(x_0)\}$,

$$\begin{gathered} V \cap \operatorname{supp} u = \{x \in \Omega : \phi(x) \leq \phi(x_0)\} \cap V, \\ Pu + au = 0 \quad \text{dans } V. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Alinhac [1] a donné des résultats de non-unicité pour des opérateurs du type

$$p(x,t,\sigma^q\xi,\sigma\tau) = \sigma^m p_m(x,t,\xi,\tau) + \sigma^{m-k} p_{m-k}(x,t,\xi,\tau) + \cdots, \tag{1.3}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$.

Dans ce papier, nous donnons des conditions suffisantes de non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs différentiels quasi-homogènes, réels, à coefficients de classe C^∞.

Les techniques utilisées dans ce travail sont rattachées aux constructions de l'optique géométrique qui sont développées dans les travaux de Plis [4], Hörmander [2] et Alinhac [1].

2. Notation et définitions. Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et soit $(x,\xi) \in T^*(\Omega)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$.

Soit $m = (m_1,\dots,m_n)$ un multi-indice tel que

$$0 < m_1 \le \cdots \le m_{q-1} < m_q = \cdots = m_n, \tag{2.1}$$

et $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

On note

$$\begin{gathered} |\alpha : m| = \alpha_1 m_1^{-1} + \alpha_2 m_2^{-1} + \cdots + \alpha_n m_n^{-1}, \\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \quad \text{avec } D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \nabla_q = \left(0,\dots,0,\frac{\partial}{\partial x_q},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Définition 2.1. On dit que P est un opérateur différentiel quasi-homogène d'ordre m sur Ω si

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha:m| \le 1} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{2.3}$$

La m-partie principale de P est l'opérateur

$$P_m(x,D) = \sum_{|\alpha:m| = 1} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{2.4}$$

Définition 2.2. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur $T^*\Omega$. On désigne par $\{f,g\}$ le crochet de Poisson quasi-homogène de f, g défini par

$$\{f,g\} = \sum_{j=q}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\right). \tag{2.5}$$

Définition 2.3. Soit $x_0 \in \Omega$ et ϕ une fonction de classe C^∞ dans Ω telle que $\nabla_q \phi(x_0) \ne 0$. L'hypersurface $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\}$ est dite strictement non pseudoconvexe au sens quasi-homogène par rapport aux bicaractéristiques de P issues de x_0, si elle est non caractéristique et vérifie la condition suivante :

$$\exists \xi_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\} : p_m(x_0,\xi_0) = H_{p_m}\phi(x_0,\xi_0) = 0, \qquad H_{p_m}^2 \phi(x_0,\xi_0) < 0, \tag{2.6}$$

avec $H_{p_m}\phi = \{p_m,\phi\}$ et $H_{p_m}^2\phi = \{p_m,\{p_m,\phi\}\}$.

3. Énoncé du théorème

Théorème 3.1. *Soit P un opérateur différentiel quasi-homogène d'ordre m, à coefficients de classe C^∞ sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^n$, tel que la m-partie principale est à coefficients réels. Soit $x_0 \in \Omega$ et*

$$S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\} \tag{3.1}$$

une hypersurface non caractéristique en x_0 et strictement non pseudoconvexe au sens quasi-homogène par rapport aux bicaractéristiques de P issues de x_0. Pour ξ_0 vérifiant (2.6), on suppose que

(i) $\{\{p_m,\phi\},\phi\}(x_0,\xi_0) \ne 0$;

(ii) $d_q p_m(x_0,\xi_0) \neq 0$ *où* $d_q p_m = (0,\dots,0,d_{\xi_q} p_m,\dots,d_{\xi_n} p_m)$.

Alors il existe un voisinage W *de* x_0 *et deux fonctions* a *et* $u \neq 0$, *de classe* C^∞ *sur* W, *s'annulant dans*

$$\{x \in W : \phi(x) > \phi(x_0)\} \tag{3.2}$$

et vérifiant

$$Pu + au = 0, \qquad x_0 \in \operatorname{supp} u. \tag{3.3}$$

Exemple 3.2. Soit P l'opérateur différentiel quasi-homogène défini sur $\mathbb{R}^5$, d'ordre $m = (1,2,4,4,4)$, de symbole

$$\begin{aligned} &p(y_1,y_2,x_1,x_2,t,\eta_1,\eta_2,\xi_1,\xi_2,\tau) \\ &\quad = \tau^4 + \tau^2[(1+t)\xi_2^2 + \xi_1^2] + (1+t)[(1+t)\eta_2^2 - \xi_1^2\xi_2^2 + t^3\eta_1] + x_1\xi_2^3. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour $x_0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $S = \{(y,x,t) \in \mathbb{R}^5 : t = 0\}$ et $\xi_0 = (2,1,1,1,0)$, l'opérateur P vérifie les hypothèses du théorème 3.1, il en résulte que P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à S.

4. Preuve du théorème 3.1. Toutes les hypothèses étant invariantes par changement de coordonnées respectant les coordonnées quasi-homogènes, on peut donc se ramener aux variables $(y,x,t) \in \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}$, dans un voisinage V de $x_0 = (0,0,0)$, avec

$$S = \{(y,x,t) \in V : t = 0\}, \qquad P = P(y,x,t,D_y,D_x,D_t). \tag{4.1}$$

On pose $s = \lambda(t-\delta)$ avec $\lambda = \delta^{-\theta}$, $\delta > 0$ et $\theta > 1$. L'opérateur P s'écrit alors dans les coordonnèes (y,x,s),

$$P(y,x,t,D_y,D_x,D_t) = P\Big(y,x,\delta + \frac{s}{\lambda},D_y,D_x,\lambda D_s\Big). \tag{4.2}$$

Prenons la solution u sous la forme

$$\begin{aligned} u\Big(y,x,\delta + \frac{s}{\lambda}\Big) &= e^{i(\sum_{j=1}^{q-1}\sigma^{1/m_j}\eta_j y_j + \sigma^{1/m_n}(\xi(y,x,\delta) + (s/\lambda)\tau(y,x,\delta)))} \\ &\quad \times e^{\nu\varphi(y,x,\delta,s)} e^{-\gamma(y,x,\delta)} w(y,x,\delta,s). \end{aligned} \tag{4.3}$$

On définit un opérateur $\tilde{P}$ par $Pu/u = \tilde{P}w/w$ avec

$$\begin{aligned} &\tilde{P}(y,x,\delta,s,D_y,D_x,D_s) \\ &\quad = P\bigg(y,x,\delta + \frac{s}{\lambda},\Big(\sigma^{1/mj}\eta_j + \sigma^{1/m_n}\xi + \sigma^{1/m_n}\frac{s}{\lambda}\nabla_j\tau + \frac{\nu}{i}\nabla_j\varphi - \frac{1}{i}\nabla_j\gamma + D_{y_j}\Big)_{1\le j\le q-1}, \\ &\qquad \sigma^{1/m_n}\nabla_x\xi + \sigma^{1/m_n}\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau + \frac{\nu}{i}\nabla_x\varphi - \frac{1}{i}\nabla_x\gamma + D_x, \sigma^{1/m_n}\tau + \frac{1}{i}\lambda\nu\varphi'_s + \lambda D_s\bigg), \end{aligned} \tag{4.4}$$

où ∇_x désigne le vecteur gradient par rapport à la variable x et ∇_j désigne la dérivée par rapport à la variable y_j.

4.1. Choix de η, $\tilde{\xi}$, τ

Lemme 4.1. *Soit p_m le m-symbole principal de P ; $\zeta_0 = (\eta_0, \xi_0, \tau_0)$ satisfaisant les hypothèses du théorème 3.1. Alors on peut trouver un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}$, des fonctions $\eta(y,x,t) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{q-1})(y,x,t)$, $\xi(y,x,t) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q-1})(y,x,t), \tau(y,x,t)$ et $\delta_0 > 0$ tels que pour tout $0 < \delta < \delta_0$ et (y,x) près de l'origine dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q}$ on a*

$$p_m(y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau) = \frac{\partial p_m}{\partial \tau}(y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau) = 0, \qquad (\eta(0), \nabla_x\xi(0), \tau(0)) = \zeta_0. \tag{4.5}$$

Preuve. On prend pour tout (y,x,t), $\eta(y,x,t) = \eta_0$ c'est-à-dire $\eta_j = \eta_{0j}$.
D'après les hypothèses (2.6) et le (i) du théorème 3.1, on a

$$\frac{\partial p_m}{\partial \tau}(0,\zeta_0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 p_m}{\partial \tau^2}(0,\zeta_0) \neq 0, \tag{4.6}$$

il résulte d'après le théorème des fonctions implicites qu'il existe une fonction q de classe C^∞,

$$q : V(0,\eta_0,\xi_0) \longrightarrow V(\tau_0) \subset \mathbb{R}, \qquad (y,x,t,\eta,\xi) \longmapsto q(y,x,t,\eta,\xi), \tag{4.7}$$

vérifiant

$$q(0,\eta_0,\xi_0) = \tau_0, \qquad \frac{\partial p_m}{\partial \tau}(y,x,t,\eta,\xi,q(y,x,t,\eta,\xi)) = 0. \tag{4.8}$$

On note

$$F(y,x,t,\eta,\xi) = p_m(y,x,t,\eta,\xi,q(y,x,t,\eta,\xi)), \tag{4.9}$$

on a alors $F(0,0,0,\eta_0,\xi_0) = p_m(0,0,0,\eta_0,\xi_0,\tau_0) = 0$ et pour tout $1 \le j \le n-q$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi_j}(y,x,t,\eta,\xi) = {} & \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(y,x,t,\eta,\xi,q(y,x,t,\eta,\xi)) \\ & + \frac{\partial q}{\partial \xi_j}(y,x,t,\eta,\xi)\frac{\partial p_m}{\partial \tau}(y,x,t,\eta,\xi,q(y,x,t,\eta,\xi)).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ainsi d'après l'hypothèse (ii) du théorème 3.1, on déduit que

$$d_\xi F(0,0,0,\eta_0,\xi_0) = d_\xi p_m(0,0,0,\eta_0,\xi_0,\tau_0) \neq 0. \tag{4.11}$$

Il résulte du théorème d'Hamilton-Jacobi que l'équation

$$F(y,x,t,\eta,\nabla_x\Psi(y,x,t,\eta)) = 0, \qquad \nabla_x\Psi(0,0,0,\eta_0) = \xi_0, \tag{4.12}$$

admet une solution C^∞, $\Psi(y,x,t,\eta)$, (y,x,t) près de l'origine, η voisin de η_0. On pose

$$\xi(y,x,t) = \Psi(y,x,t,\eta_0), \qquad \tau(y,x,t) = q(y,x,t,\eta_0,\nabla_x\xi(y,x,t)). \tag{4.13}$$

On choisit $\delta_0 > 0$ tel que pour tout δ, $0 < \delta < \delta_0$, on a (y,x,δ) voisin de l'origine. Ceci achève la démonstration du lemme 4.1. □

On prend

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0, \\ \tau(y,x,\delta) &= q(y,x,\delta,\eta_0,\nabla_x\xi(y,x,\delta)), \\ \tilde{\xi}(y,x,\delta) &= \xi(y,x,\delta)+\frac{c\cdot x}{\lambda}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

où c est un vecteur constant de $\mathbb{R}^{n-q}$ qu'on fixera ultérieurement.

Lemme 4.2. *Notons $\zeta_0 = (\eta_0,\xi_0,\tau_0)$ et $\phi(y,x,t) = t$, on a la relation*

$$\{p_m,\{p_m,\phi\}\}(0,\zeta_0) = -(p_m)''_{\tau\tau}\left(p'_{mt}+\sum_{j=1}^{n-q}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\frac{\partial \tau}{\partial x_j}\right)(0,\zeta_0). \tag{4.15}$$

Preuve. Dans toute cette preuve on écrira p à la place de p_m. On a

$$\{p,\phi\} = p'_\tau, \qquad \{p,\{p,\phi\}\} = \sum_{j=1}^{n-q}\left(p'_{\xi_j}p''_{\tau x_j}-p'_{x_j}p''_{\tau\xi_j}\right)+p'_\tau p''_{\tau t}-p'_t p''_{\tau\tau}. \tag{4.16}$$

D'après (4.5) on obtient pour tout $1 \le j \le n-q$

$$p'_{x_j}+\sum_{k=1}^{n-q}p'_{\xi_k}\xi''_{x_jx_k}+p'_\tau\tau'_{x_j} = 0, \tag{4.17}$$

d'où

$$\begin{aligned} p'_{x_j} &= -\sum_{k=1}^{n-q}p'_{\xi_k}\xi''_{x_jx_k}-p'_\tau\tau'_{x_j}, \\ p''_{\tau x_j}+\sum_{k=1}^{n-q}p''_{\tau\xi_k}\xi''_{x_jx_k}&+p''_{\tau\tau}\tau'_{x_j} = 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

d'où

$$p''_{\tau x_j} = -\sum_{k=1}^{n-q}p''_{\tau\xi_k}\xi''_{x_jx_k}-p''_{\tau\tau}\tau'_{x_j}, \tag{4.19}$$

par suite

$$\begin{aligned} \{p,\{p,\phi\}\} = &-\sum_{j,k=1}^{n-q}p'_{\xi_j}p''_{\tau\xi_k}\xi''_{x_kx_j}-\sum_{j=1}^{n-q}p'_{\xi_j}p''_{\tau\tau}\tau'_{x_j} \\ &+\sum_{j,k=1}^{n-q}p''_{\tau\xi_j}p'_{\xi_k}\xi''_{x_jx_k}+\sum_{j=1}^{n-q}p''_{\tau\xi_j}p'_\tau\tau'_{x_j}+p'_\tau p''_{\tau t}-p'_tp''_{\tau\tau}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

On en déduit que $\{p,\{p,\phi\}\}(0,\zeta_0) = -p''_{\tau\tau}(\sum_{j=1}^{n-q}p'_{\xi_j}\tau'_{x_j}+p'_t)(0,\zeta_0)$. □

4.2. Choix de φ

Lemme 4.3. *Il existe c dans $\mathbb{R}^{n-q}$ tel que*

$$p'_t(0,\zeta_0)+\sum_{j=1}^{n-q}(\tau'_{x_j}-c_j)p'_{\xi_j}(0,\zeta_0)=0 \tag{4.21}$$

et il existe une fonction $\varphi(y,x,\delta,s)$ de classe C^∞ dans $V_0\times]0,\delta_0[\times]-s_0,s_0[$, où V_0 est un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^{q-1}\times\mathbb{R}^{n-q}$ tels que

$$p_m\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\sigma^{-1/m_n}\lambda\nu D_s\varphi\Big)=0, \tag{4.22}$$

avec

$$\operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta,s)=\alpha(y,x,\delta)s+\beta(y,x,\delta,s)s^2, \tag{4.23}$$

où α et β sont des fonctions de classe C^∞ sur $V_0\times]0,\delta_0[\times]-s_0,s_0[$,

$$\alpha(0,0,0)<0, \qquad \beta(0,0,0,0)<0. \tag{4.24}$$

Preuve. Dans cette preuve on écrira p à la place de p_m. Posons

$$G(y,x,\delta,s,z)=\delta^{-\theta}p\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}z\Big). \tag{4.25}$$

On a

$$\nabla_x\tilde{\xi}=\nabla_x\xi+\frac{c}{\lambda}=\nabla_x\xi+c\delta^\theta. \tag{4.26}$$

On voudrait trouver $z_0\in\mathbb{C}$ tel que

$$G(0,0,0,0,z_0)=0, \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(0,0,0,0,z_0)\neq 0. \tag{4.28}$$

Pour cela on pose $X=(y,x,\delta+s\delta^\theta,\eta,\nabla_x\xi+c\delta^\theta+s\delta^\theta\nabla_x\tau,\tau)$ et on applique la formule de Taylor à p au point X jusqu'à l'ordre 2 ; on obtient

$$G(y,x,\delta,s,z)=\delta^{-\theta}p(X)+\delta^{-\theta/2}zp'_\tau(X)+\frac{z^2}{2}p''_{\tau\tau}(X)+O(\delta^{\theta/2}). \tag{4.29}$$

Ensuite, on pose $X_1=(y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau)$ et on applique de nouveau la formule de Taylor au point X_1 à l'ordre 1 on aura

$$\begin{aligned}G(y,x,\delta,s,z)=\delta^{-\theta}p(X_1)+sp'_t(X_1)+\sum_{j=1}^{n-q}\Big(c_j+s\tau'_{x_j}\Big)p'_{\xi_j}(X_1)\\+\delta^{-\theta/2}zp'_\tau(X_1)+\frac{z^2}{2}p''_{\tau\tau}(X_1)+O(\delta^{\theta/2}).\end{aligned} \tag{4.30}$$

Or d'après (4.5), $p(X_1) = p'_\tau(X_1) = 0$, d'où

$$G(y,x,\delta,s,z) = s\left[p'_t(X_1) + \sum_{j=1}^{n-q} \tau'_{x_j} p'_{\xi_j}(X_1)\right] + \sum_{j=1}^{n-q} c_j p'_{\xi_j}(X_1) + \frac{z^2}{2} p''_{\tau\tau}(X_1) + O(\delta^{\theta/2}). \tag{4.31}$$

Ainsi

$$G(0,0,0,0,z_0) = \sum_{j=1}^{n-q} c_j p'_{\xi_j}(0,\zeta_0) + \frac{z_0^2}{2} p''_{\tau\tau}(0,\zeta_0). \tag{4.32}$$

On pose

$$A = \sum_{j=1}^{n-q} c_j p'_{\xi_j}(0,\zeta_0), \qquad B = p'_t(0,\zeta_0) + \sum_{j=1}^{n-q} \tau'_{x_j} p'_{\xi_j}(0,\zeta_0). \tag{4.33}$$

Comme

$$d_\xi p(0,\zeta_0) \neq 0, \tag{4.34}$$

on peut donc trouver $c \in \mathbb{R}^{n-q}$ tel que

$$A = B. \tag{4.35}$$

On déduit de (4.27), (4.32) que z_0 est donné par

$$z_0^2 = -\frac{2B}{p''_{\tau\tau}(0,\zeta_0)}. \tag{4.36}$$

D'après le lemme 4.2 et l'hypothèse de non stricte pseudoconvexité de l'hypersurface on a $z_0^2 < 0$. Ainsi z_0 est imaginaire pur. On choisit z_0 tel que $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Donc d'après l'hypothèse (i) du théorème 3.1 on a

$$\begin{gathered} G(0,0,0,0,z_0) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial z}(0,0,0,0,z_0) = z_0 p''_{\tau\tau}(0,\zeta_0) \neq 0, \end{gathered} \tag{4.37}$$

d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de $(0,0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et une fonction

$$g : V \longrightarrow V(z_0) \subset \mathbb{C}, \qquad (y,x,\delta,s) \longmapsto g(y,x,\delta,s) \tag{4.38}$$

vérifiant

$$g(0,0,0,0) = z_0, \tag{4.39}$$

$$G(y,x,\delta,s,g(y,x,\delta,s)) = 0 \quad \text{dans } V. \tag{4.40}$$

On pose

$$D_s\varphi(y,x,\delta,s) = g(y,x,\delta,s) \tag{4.41}$$

avec

$$\varphi_{|s=0} = 0, \tag{4.42}$$

alors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(y,x,\delta,s) = i\frac{\partial g}{\partial s}(y,x,\delta,s). \tag{4.43}$$

Par ailleurs, d'après (4.25), (4.39) et (4.41) on a

$$p(y,x,\delta+\delta^\theta s,\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\delta^\theta s\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi(y,x,\delta,s)) = 0, \tag{4.44}$$

en dérivant cette expression par rapport à s on obtient

$$\delta^\theta p'_t+\delta^\theta\tau'_x\cdot p'_\xi+\frac{\delta^{\theta/2}}{i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}p'_\tau = 0. \tag{4.45}$$

D'où en prenant $y=0$, $x=0$, $s=0$ et $\eta=\eta_0$ on obtient

$$\begin{aligned}&\delta^\theta p'_t(0,0,\delta,\eta_0,\nabla_x\tilde{\xi},\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)\\&\quad+\delta^\theta\tau'_x(0,0,\delta)\cdot p'_\xi(0,0,\delta,\eta_0,\xi_0,\tau_0+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)\\&\quad+\frac{\delta^{\theta/2}}{i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(0,0,\delta,0)p'_\tau(0,0,\delta,\eta_0,\xi_0,\tau_0+\delta^{\theta/2}D_s\varphi) = 0.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Appliquons la formule de Taylor à p'_t, p'_ξ et p'_τ à l'ordre 1, au point

$$X = (0,0,\delta,\eta_0,\nabla_x\xi(0,0,\delta),\tau(0,0,\delta)), \tag{4.47}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}&\delta^\theta p'_t(X)+\delta^\theta\tau'_x(0,0,\delta)\cdot p'_\xi(X)+\frac{\delta^{\theta/2}}{i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(0,0,\delta,0)p'_\tau(X)\\&\qquad+\frac{\delta^\theta}{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}D_s\varphi\right)(0,0,\delta,0)p''_{\tau\tau}(X)+o(\delta^\theta) = 0.\end{aligned} \tag{4.48}$$

D'après le lemme 4.1, nous avons pour $\delta<\delta_0$

$$p'_\tau(0,0,\delta,\eta_0,\nabla_x\xi(0,0,\delta),\tau(0,0,\delta)) = 0, \tag{4.49}$$

d'où (4.48) devient

$$\delta^\theta p'_t(X)+\delta^\theta\tau'_x(0,0,\delta)\cdot p'_\xi(X)+\frac{\delta^\theta}{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}D_s\varphi\right)(0,0,\delta,0)p''_{\tau\tau}(X)+o(\delta^\theta) = 0. \tag{4.50}$$

On en déduit que

$$p'_t(X)+\tau'_x(0,0,\delta)\cdot p'_\xi(X)+\frac{1}{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}D_s\varphi\right)(0,0,\delta,0)p''_{\tau\tau}(X)+o(1) = 0. \tag{4.51}$$

En faisant tendre δ vers zéro, on obtient

$$B+\frac{1}{i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}z_0p''_{\tau\tau}(0,\zeta_0) = 0, \tag{4.52}$$

donc

$$B + g_s'(0,0,0,0) z_0 p''_{\tau\tau}(0,\zeta_0) = 0. \tag{4.53}$$

Par ailleurs, nous avons $z_0^2 = -2B/P''_{\tau\tau}(0,\zeta_0)$, ceci donne

$$B z_0 - 2B g_s'(0) = 0, \tag{4.54}$$

d'où $g_s'(0) = z_0/2$. Ainsi

$$\operatorname{Re} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(0) = -\operatorname{Im} g_s'(0) = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} z_0 < 0, \tag{4.55}$$

par suite $\beta(0,0,0,0) < 0$ et

$$\alpha(0,0,0) = \operatorname{Re} i g(0,0,0,0) = i z_0 < 0. \tag{4.56}$$

□

Corollaire 4.4. *On a*

$$\begin{aligned} p_m\Big(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \frac{\lambda\nu}{\sigma^{1/m_n}} \Big(D_s \varphi + \frac{1}{\nu} D_s\Big)\Big) \\ = \frac{1}{\lambda\nu}[H(y,x,\delta,s) D_s + K(y,x,\delta,s) + \delta^r Q(y,x,\delta,s,D_s)], \end{aligned} \tag{4.57}$$

où H, K et les coefficients de Q sont réguliers, $H(0) \neq 0$, $r > 0$ et Q un opérateur différentiel en D_s.

Preuve. Fixons $\sigma^{1/m_n} = \lambda^{3/2}\nu$. Dans cette preuve on écrira p à la place de p_m. On a

$$\begin{aligned} p\Big(y, x, \delta + \frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau + \frac{\lambda\nu}{\sigma^{1/m_n}} \Big(D_s \varphi + \frac{1}{\nu} D_s\Big)\Big) \\ = \sum_{|\alpha':m'| + |\beta:m_n| + k/m_n = 1} a_{\alpha'\beta k} \eta^{\alpha'} \Big(\nabla_x \tilde{\xi} + \frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\Big)^\beta \\ \times \Big(\tau + \delta^{\theta/2}\Big(D_s \varphi + \frac{1}{\nu} D_s\Big)\Big)^k, \end{aligned} \tag{4.58}$$

où $\alpha' \in \mathbb{N}^{q-1}$, $m' = (m_1, \ldots, m_{q-1})$, $\beta \in \mathbb{N}^{n-q-1}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Pour montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \Big[\tau + \delta^{\theta/2}\Big(D_s \varphi + \frac{1}{\nu} D_s\Big)\Big]^k = (\tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi)^k + k(\tau + \delta^{\theta/2} D_s \varphi)^k \delta^{\theta/2} D_s \\ - a_k \tau^{k-2} \frac{\delta^\theta}{\nu} \varphi''_{ss} + \delta^r \frac{\delta^\theta}{\nu} R_k(y,x,\delta,s,D_s), \end{aligned} \tag{4.59}$$

il suffit de raisonner par récurrence sur k. De (4.59) on déduit que

$$\begin{aligned} & p\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}\Big(D_s\varphi+\frac{1}{\nu}D_s\Big)\Big) \\ & \quad = \sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}(\tau+\delta^{\theta/2}(D_s\varphi))^k \\ & \qquad + \sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}k(\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)^{k-1}\frac{\delta^{\theta/2}}{\nu}D_s \\ & \qquad - \sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}\tau^{k-2}\frac{\delta^{\theta}}{\nu}\varphi''_{ss} \\ & \qquad + \delta^r \sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} \frac{\delta^{\theta}}{\nu}a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}R_k(y,x,\delta,s,D_s). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Or d'après le lemme 4.3 et ce qui précède on a

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}(\tau+\delta^{\theta/2}(D_s\varphi))^k \\ & \quad = p\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi\Big) = 0, \\ & \sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}k(\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)^{k-1}\frac{\delta^{\theta/2}}{\nu}D_s \\ & \quad = p'_\tau\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi\Big)\frac{\delta^{\theta/2}}{\nu}D_s, \\ & -\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}\tau^{k-2}\frac{\delta^{\theta}}{\nu}\varphi''_{ss} \\ & \quad = \frac{\delta^{\theta}}{\nu}K(y,x,\delta,s), \\ & \delta^r\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} \frac{\delta^{\theta}}{\nu}a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}R_k(y,x,\delta,s,D_s) \\ & \quad = \delta^r\frac{\delta^{\theta}}{\nu}Q(y,x,\delta,s,D_s). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Reprenons le terme $\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}(\nabla_x\tilde{\xi} + (s/\lambda)\nabla_x\tau)^{\beta}k(\tau + \delta^{\theta/2}D_s\varphi)^{k-1}(\delta^{\theta/2}/\nu)D_s$ et appliquons la formule de Taylor d'abord au point $X = (y,x,\delta+s/\lambda,\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+(s/\lambda)\nabla_x\tau,\tau)$ à l'ordre 2, puis au point $X_1 = (y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau)$ à l'ordre 1, nous obtenons

$$\begin{aligned} & p'_\tau\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi\Big) \\ & \qquad = p'_\tau(X_1)+\delta^{\theta/2}(D_s\varphi)p''_{\tau\tau}(X_1)+O(\delta^{\theta}). \end{aligned} \tag{4.62}$$

Il en résulte qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned} p\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}\Big(D_s\varphi+\frac{1}{\nu}D_s\Big)\Big) \\ = \frac{1}{\lambda\nu}[p''_{\tau\tau}(y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau)(D_s\varphi)D_s+K(y,x,\delta,s)+\delta^r Q(y,x,\delta,D_s)]. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Nous avons par hypothèse (i) du théorème 3.1 que $p''_{\tau\tau}(0,0,0,\zeta_0) \neq 0$. En posant

$$H(y,x,\delta,s) = p''_{\tau\tau}(y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau)(D_s\varphi), \tag{4.64}$$

nous obtenons le résultat cherché. □

4.3. Recollement des solutions asymptotiques. Les constructions précédentes nous donnent une famille de fonctions u_δ dépendant du paramètre $\delta > 0$ qui pour t près de δ vérifient $Pu_\delta = 0$.

Dans la suite, on donne à δ la suite de valeurs $\delta_k = b_k = k^{-\rho}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\rho > 0$. On note $\nu = \nu_k = k^\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et $\sigma = \sigma_k = (\lambda_k^{3/2}\nu_k)^{m_n}$. On notera pour $t \in [b_{k+1}, b_{k-1}]$, $t = \delta_k + s/\lambda_k$, la fonction

$$\begin{aligned} u_k\Big(y,x,\delta_k+\frac{s}{\lambda_k}\Big) &= e^{i(\sum_{j=1}^{q-1}\sigma^{1/m_j}\eta_j y_j+\sigma^{1/m_n}(\tilde{\xi}(y,x,\delta_k)+(s/\lambda_k)\tau(y,x,\delta_k)))} \\ &\quad\times e^{\nu_k\varphi(y,x,\delta_k,s)}e^{-\gamma(y,x,\delta_k)}w(y,x,\delta_k,s). \end{aligned} \tag{4.65}$$

On a pour k assez grand et $t \in [b_{k+1}, b_{k-1}]$

$$|s| = \lambda_k|t-\delta_k| \le \lambda_k|\delta_{k-1}-\delta_k| \simeq \rho k^{\rho(\theta-1)-1}. \tag{4.66}$$

Notons (c.1) la condition suivante :

(c.1) $\rho(\theta-1)-1 < 0$.

Si (c.1) est vérifiée, la fonction u_k est bien définie.

L'opérateur $\tilde{P}$ défini par (4.4) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \tilde{P} = \sigma P_m\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\Big(\eta_j+\sigma^{1/m_n-1/m_j}\Big(\nabla_j\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_j\tau\Big)+\frac{\nu}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_j}}\nabla_j\varphi \\ -\frac{1}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_j}}\nabla_j\gamma+\frac{1}{\sigma^{1/m_j}}D_{y_j}\Big)_{j\le q-1};\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau \\ +\frac{\nu}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_n}}\nabla_x\varphi-\frac{1}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_n}}\nabla_x\gamma+\frac{1}{\sigma^{1/m_n}}D_x,\tau+\frac{\lambda\nu}{\sigma^{1/m_n}}(D_s\varphi+D_s)\Big) \\ +\sigma^\kappa(\cdots)+\cdots \end{aligned} \tag{4.67}$$

avec $\kappa < 1$.

On impose que la fonction γ et les paramètres λ, σ, δ vérifient les conditions suivantes :

(c.2) $\sigma^{-1/m_j}\nabla_j\gamma$ bornée pour δ voisin de zéro,

(c.3) $\sigma^{-1/m_n}\nabla_x\gamma$ bornée pour δ voisin de zéro,

(c.4) $\lambda^{-1}\sigma^{1/m_n}-1/m_j$ bornée pour δ voisin de zéro.

4.3.1. Choix de γ. On va déterminer la fonction $\gamma(y,x,\delta)$ de sorte qu'on puisse “recoller” les fonctions u_k. Pour cela on choisira les fonctions $\gamma(y,x,\delta_k)$ de sorte que $|u_k| \gg |u_{k+1}|$ près de δ_k ; $|u_{k+1}| \gg |u_k|$ près de δ_{k+1} et $|u_k| = |u_{k+1}|$ en un point proche du milieu de $[\delta_k, \delta_{k+1}]$.

Pour obtenir ce résultat on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.5. *Posons pour* $t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$

$$G_k(y,x,t) = \nu_k \operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta_k,s_k) - \nu_{k+1} \operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1}), \quad s_j = \lambda_j(t-\delta_j). \tag{4.68}$$

Notons $t_k = \delta_k/3 + (2/3)\delta_{k+1}$ *et* $I_k(y,x) = G_k(y,x,t_k)$*, alors*

$$I_k(y,x) \simeq -\alpha(y,x,0)\frac{\rho}{3}k^{\rho(\theta-1)+\varepsilon-1}, \quad \textit{quand } k \longrightarrow +\infty. \tag{4.69}$$

Preuve. On a $s_k = \lambda_k(t-\delta_k)$. On pose $l_k = (1/3)(\delta_k - \delta_{k+1})$. Alors $l_k \simeq (\rho/3)k^{-\rho-1}$ pour k assez grand. Ainsi pour $t = t_k = \delta_k - 2l_k = \delta_{k+1} + l_k$ on a $s_k = \lambda_k(t_k - \delta_k) = -2\lambda_k l_k$ et $s_{k+1} = \lambda_{k+1} l_k$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\nu_k \operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta_k,s_k) - \nu_{k+1}\operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})\\
&\quad= k^{\varepsilon}[\alpha(y,x,\delta_k)s_k + \beta(y,x,\delta_k,s_k)s_k^2]\\
&\qquad - (k+1)^{\varepsilon}[\alpha(y,x,\delta_{k+1})\cdot s_{k+1} + \beta(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})\cdot s_{k+1}^2]\\
&\quad= k^{\varepsilon}[\alpha(y,x,\delta_k)(-2k^{\rho\theta}l_k + \beta(y,x,\delta_k,s_k)(4k^{2\rho\theta}l_k^2))]\\
&\qquad - (k+1)^{\varepsilon}[\alpha(y,x,\delta_{k+1})(k+1)^{\rho\theta}l_k + \beta(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})l_k^2(k+1)^{2\rho\theta}]\\
&\quad= -\frac{\rho}{3}[2\alpha(y,x,\delta_k)k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} + \alpha(y,x,\delta_{k+1})(k+1)^{\varepsilon+\rho\theta}k^{-\rho-1}]\\
&\qquad + l_k^2[4\beta_k k^{2\rho\theta+\varepsilon} - \beta_{k+1}(k+1)^{2\rho\theta+\varepsilon}].
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Notons $E_1 = -(\rho/3)[2\alpha(y,x,\delta_k)k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} + \alpha(y,x,\delta_{k+1})(k+1)^{\varepsilon+\rho\theta}k^{-\rho-1}]$ et $E_2 = l_k^2[4\beta_k k^{2\rho\theta+\varepsilon} - \beta_{k+1}(k+1)^{2\rho\theta+\varepsilon}]$.

On commence par calculer E_1. On a pour k assez grand

$$\alpha(y,x,\delta_k) = \alpha(y,x,k^{-\rho}) = \alpha(y,x,0) + O(k^{-\rho}), \tag{4.71}$$

d'où

$$\begin{aligned}
E_1 = k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1}\Big[&-\frac{2\rho}{3}\alpha(y,x,0) + O(k^{-\rho})\\
&-\frac{\rho}{3}\alpha(y,x,0)\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon+\rho\theta} + O((k+1)^{-\rho})\Big],
\end{aligned} \tag{4.72}$$

par suite

$$E_1 \simeq -k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1}\rho\alpha(y,x,0), \tag{4.73}$$

quand k tend vers l'infini. L'expression E_2 s'écrit aussi sous la forme

$$E_2 = l_k^2[4\beta_k k^{2\rho\theta+\varepsilon} - \beta_{k+1}(k+1)^{2\rho\theta+\varepsilon}] \tag{4.74}$$

or on a

$$l_k^2 \simeq \frac{\rho^2}{9}k^{-2\rho-2} \tag{4.75}$$

quand k tend vers $+\infty$ et

$$\beta(y,x,s_k,\delta_k) = \beta(y,x,s_k,k^{-\rho}) = \beta(y,x,s_k,0) + O(k^{-\rho}). \tag{4.76}$$

On a

$$\begin{aligned} s_k &= \lambda_k(t_k - \delta_k) = \delta_k^{-\theta}\left[\frac{1}{3}\delta_k + \frac{2}{3}\delta_{k+1} - \delta_k\right] \\ &= \frac{2}{3}\delta_k^{-\theta}[\delta_{k+1} - \delta_k] = -2\delta_k^{-\theta}l_k \simeq -\frac{2}{3}\rho k^{\rho\theta-\rho-1}, \quad \text{quand } k \longrightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{4.77}$$

D'où, quand k tend vers l'infini on a

$$s_k \simeq -\frac{2}{3}\rho k^{\rho\theta-\rho-1}, \qquad s_{k+1} \simeq \frac{1}{3}\rho k^{\rho\theta-\rho-1}. \tag{4.78}$$

Ainsi on a

$$\beta_k = \beta(y,x,s_k,\delta_k) = \beta(y,x,0,0) + O(k^{\rho\theta-\rho-1}) + O(k^{-\rho}). \tag{4.79}$$

On en déduit que

$$E_2 \simeq \beta(y,x,0,0)\frac{\rho^2}{3}k^{2(\rho(\theta-1)-1)+\varepsilon}, \tag{4.80}$$

quand $k \to +\infty$. Par suite on a

$$E_1 + E_2 \simeq -\rho\alpha(y,x,0)k^{\varepsilon+\rho(\theta-1)-1}, \quad \text{quand } k \longrightarrow +\infty. \tag{4.81}$$

On obtient ainsi le résultat du lemme 4.5. □

Démontrons maintenant le résultat énoncé au début du paragraphe 4.3.1. On pose pour k_0 assez grand

$$\gamma_k(y,x) = -\sum_{j=k_0}^{k-1} I_j(y,x), \tag{4.82}$$

on a

$$(\gamma_{k+1} - \gamma_k)(y,x) = -I_k(y,x). \tag{4.83}$$

D'après (4.69), on a

$$I_k(y,x) \simeq -\alpha(y,x,0)\rho k^{\rho(\theta-1)+\varepsilon-1}, \tag{4.84}$$

le signe de l'expression $\rho(\theta-1)+\varepsilon-1$ nous sera imposé ultérieurement par la condition (c.7). Ainsi on a

$$I_k(y,x) \simeq -\int_k^{k+1} \alpha(y,x,0)\rho u^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1}du. \tag{4.85}$$

On peut donc écrire

$$y_k(y,x) \simeq \int_{k_0}^{k} \alpha(y,x,0)\rho u^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} du, \tag{4.86}$$

d'où

$$\begin{aligned} y_k(y,x) &\simeq \frac{\rho k^{\varepsilon+\rho(\theta-1)}}{(\varepsilon+\rho(\theta-1))}\alpha(y,x,0) \\ &\simeq \frac{\rho\delta^{-(\theta-1+\varepsilon/\rho)}}{(\varepsilon+\rho(\theta-1))}\alpha(y,x,0). \end{aligned} \tag{4.87}$$

Vérifions (c.2), (c.3) et (c.4). On a $\sigma^{1/m_j} = (\lambda_k^{3/2}\nu_k)^{m_n/m_j}$, d'où

$$\sigma = \left(k^{3/2\rho\theta}k^{\varepsilon}\right)^{m_n}, \qquad \sigma^{1/m_j} = \left(k^{\varepsilon+(3/2)\rho\theta}\right)^{m_n/m_j}. \tag{4.88}$$

Posons $\Gamma_j = m_n/m_j > 1$, alors

$$\begin{aligned} \sigma^{-1/m_j}\nabla_y y_k(y,x) &\simeq \frac{\rho}{(\varepsilon+\rho(\theta-1))}\nabla_y\alpha(y,x,0)\delta^{-((\theta-1+\varepsilon/\rho)-\Gamma_j((3/2)\theta+\varepsilon/\rho))}, \\ \theta-1+\frac{\varepsilon}{\rho}-\Gamma_j\left(\frac{3}{2}\theta+\frac{\varepsilon}{\rho}\right) &= \theta\left(1-\frac{3\Gamma_j}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{\rho}(1-\Gamma_j)-1<0. \end{aligned} \tag{4.89}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \sigma^{-1/m_n}\nabla_x y(y,x,\delta_k) &\simeq \nabla_x\alpha(y,x,0)\frac{\rho}{\varepsilon+\rho(\theta-1)}\delta^{-((\theta-1+\varepsilon/\rho)-(3/2)\theta-\varepsilon/\rho)} \\ &\simeq \nabla_x\alpha(y,x,0)\frac{\rho}{\varepsilon+\rho(\theta-1)}\delta^{\theta/2+1}, \\ \lambda_k^{-1}\sigma_k^{1/m_n-1/m_j} &\simeq k^{\rho\theta(-(3/2)\Gamma_j+1/2)}k^{\varepsilon(1-\Gamma_j)}. \end{aligned} \tag{4.90}$$

On remarque que le second membre de cette dernière équivalence tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Ainsi les conditions (c.2), (c.3) et (c.4) sont vérifiées. On choisira θ et ρ de telle sorte que la condition (c.1) est vérifiée.

4.3.2. Équation de transport et choix de w

Lemme 4.6. *On a*

$$\frac{1}{\sigma}\tilde{P} = \frac{1}{\lambda\nu}\left[H(y,x,\delta,s)D_s+K(y,x,\delta,s)+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q}(y,x,\delta,s,D_y,D_x,D_s)\right], \tag{4.91}$$

où H, K et les coefficients de $\tilde{Q}$ sont réguliers, $H(0,0,0,0)\neq 0$, $\tilde{r}>0$, à condition que l'on ait

(c.5) $\varepsilon[1-m_n(1-\kappa)] < \rho\theta[3m_n(1-\kappa)/2-1]$ *pour tout* κ, $0\le\kappa\le 1-1/m_n$ *et*
(c.6) $\varepsilon<\rho\theta/2$; $\varepsilon<\rho(1-\theta/2)$.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\tilde{P} = P_m\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\Big(\eta_j+\sigma^{1/m_n-1/m_j}\Big(\nabla_j\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_j\tau\Big)+\frac{\nu}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_j}}\nabla_j\varphi \\ -\frac{1}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_j}}\nabla_j\gamma+\frac{1}{\sigma^{1/m_j}}D_{y_j}\Big)_{j\le q-1};\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau \\ +\frac{\nu}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_n}}\nabla_x\varphi-\frac{1}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_n}}\nabla_x\gamma+\frac{1}{\sigma^{1/m_n}}D_x,\tau+\frac{\lambda\nu}{\sigma^{1/m_n}}(D_s\varphi+D_s)\Big) \\ +\sigma^{\kappa-1}(\cdots)+\cdots\end{aligned} \tag{4.92}$$

avec $\kappa<1$. En utilisant un développement de Taylor de P_m à l'ordre 1 au point $X=(y,x,\delta+s/\lambda,\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+(s/\lambda)\nabla_x\tau,\tau+(\lambda\nu/\sigma^{1/m_n})(D_s\varphi+D_s))$, on remarque d'après le corollaire 4.4 que $\sigma^{-1}\tilde{P}$ s'écrit sous la forme (4.91) si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\sigma^{\kappa-1}=o(1/\lambda\nu)$,

(ii) $\delta^{-d}\sigma^{-1/m_n}=o(1/\lambda\nu)$, $\delta^{-d}\sigma^{-1/m_j}=o(1/\lambda\nu)$ avec $d=\theta-1+\varepsilon/\rho$,

(iii) $\nu\sigma^{-1/m_n}=o(1/\lambda\nu)$, $\nu\sigma^{-1/m_j}=o(1/\lambda\nu)$.

La condition (i) est vraie d'après (c.5), ainsi les termes de $\sigma^{-1}\tilde{P}$ provenant des termes d'ordre inférieurs de P sont inclus dans $\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q}$. La condition (ii) est vraie d'après la deuxième partie de (c.6). La condition (iii) est vraie d'après la première partie de (c.6).

Déterminons la suite de fonctions $w_j(y,x,\delta,s)$, $j\ge 0$, par

$$\begin{aligned}(HD_s+K)w_0=0, &\qquad w_0(y,x,\delta,0)=1,\\ (HD_s+K)w_j=-\tilde{Q}w_{j-1}, &\quad w_j(y,x,\delta,0)=0,\quad j\ge 1.\end{aligned}\tag{4.93}$$

Ainsi la solution formelle $\tilde{w}=\sum_{j\ge0}w_j\delta^{j\tilde{r}}$ sera alors la solution de

$$(HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})\tilde{w}=0. \tag{4.94}$$

On prend une fonction de (y,x,δ,s,z), $Z(y,x,\delta,s,z)$, C^∞ près de $(0,0,0,0)$, telle que

$$Z\sim\sum_{j\ge0}w_jz^j, \tag{4.95}$$

quand z tend vers 0, au sens suivant :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^{\,n-q},\ \forall\beta\in\mathbb{N}^{\,q-1},\ \forall N\in\mathbb{N},\quad \exists\, c_{k\alpha\beta N}\ge 0, \tag{4.96}$$

tel que pour (y,x,δ,s,z) près de l'origine on a

$$\left|D_s^kD_x^\alpha D_y^\beta\Big(Z-\sum_{j=0}^N w_jz^j\Big)\right|\le c_{k\alpha\beta N}|z|^{N+1}. \tag{4.97}$$

Si on prend $w(y,x,\delta,s)=Z(y,x,\delta,s,\delta^{\tilde{r}})$, on obtient $(HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})w=o(\delta^\infty)$. □

LEMME 4.7. *Pour tout $t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$; $(y,x) \in V$ où V est un voisinage de $(0,0)$, soit*

$$u_k(y,x,t) = e^{i\sum_{j=1}^{q-1}\sigma^{1/m_j}\eta_j y_j + \sigma^{1/m_n}(\xi(y,x,\delta_k)+(t-\delta_k)\tau(y,x,\delta_k))} \times e^{\nu_k\varphi(y,x,\delta_k,s)} e^{-\gamma(y,x,\delta_k)} w(y,x,\delta_k,s) \tag{4.98}$$

avec $s = \lambda_k(t-\delta_k)$ et soit $f_k = Pu_k/u_k$. Alors il existe $k_0 > 0$ tel qu'on a

$$\forall(\beta,\alpha,l) \in \mathbb{N}^{q-1}\times\mathbb{N}^{n-q}\times\mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ N \text{ assez grand},\quad \exists c_{\alpha\beta lN} > 0;\ \exists\, \Gamma_N > 0 \\ \text{tels que } \left|D_y^\beta D_x^\alpha D_t^l f_k(y,x,t)\right| \le c_{\alpha\beta lN} k^{-\Gamma_N} \tag{4.99}$$

pour tout k, $k \ge k_0$ et $(y,x,t) \in V\times[\delta_{k+1},\delta_{k-1}]$.

PREUVE. On a $Pu_k/u_k = \tilde{P}w_k/w_k = (\sigma/\lambda\nu)(1/w_k)[(HD_s + K + \delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})w_k]$. Or

$$w_k = \sum_{j=0}^{N-1}(\delta^{\tilde{r}})^j w_j(y,x,s,\delta_k) + (\delta^{\tilde{r}})^N R_N(y,x,s,\delta_k) \tag{4.100}$$

avec R_N fonction de classe C^∞ et bornée dans un voisinage de zéro. D'où

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{\sigma}{\lambda\nu}\frac{1}{w_k}\Bigg[\sum_{j=0}^{N-1}(\delta_k^{\tilde{r}})^j(HD_s+K)w_j \\ &\qquad + (\delta_k^{\tilde{r}})^N(HD_s+K)R_N + \sum_{j=0}^{N-1}(\delta_k^{\tilde{r}})^j\tilde{Q}w_j + (\delta_k^{\tilde{r}})^{N+1}\tilde{Q}R_N\Bigg] \\ &= \frac{\sigma}{\lambda\nu}\frac{1}{w_k}\Big[(HD_s+K)w_0 + \left(\delta_k^{\tilde{r}}\right)^N\tilde{Q}w_{N-1} + (\delta^{\tilde{r}})^N(HD_s+K\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N\Big] \\ &= \frac{(k^{3\rho\theta/2+\varepsilon})^{m_n}}{k^{\rho\theta+\varepsilon}}\frac{1}{w_k}k^{-\rho\tilde{r}N}[\tilde{Q}w_{N-1} + (HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N] \\ &= k^{\rho\theta((3/2)m_n-1)+\varepsilon(m_n-1)\rho\tilde{r}N}\frac{1}{w_k}[\tilde{Q}w_{N-1} + (HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N] \\ &= k^{\rho[-\tilde{r}N+\theta((3/2)m_n-1)]+\varepsilon(m_n-1)}\frac{1}{w_k}[\tilde{Q}w_{N-1} + (HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N] \\ &= k^{-\rho[\tilde{r}N-\theta((3/2)m_n-1)]+\varepsilon(m_n-1)}\frac{1}{w_k}[\tilde{Q}w_{N-1} + (HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N]. \end{aligned} \tag{4.101}$$

On en déduit que $|f_k| \le C_N k^{-\Gamma_N}$. On procède de même pour les dérivées de f_k. □

4.3.3. Étude de l'ensemble où $|u_k| = |u_{k+1}|$. Pour $(y,x,t) \in V\times[\delta_{k+1},\delta_{k-1}]$, V est un voisinage de $(0,0) \subset \mathbb{R}^{q-1}\times\mathbb{R}^{n-q}$ posons

$$F_k(y,x,t) = \log\left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right|. \tag{4.102}$$

LEMME 4.8. *Il existe des constantes c et η strictement positives telles qu'on ait*

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} \ge ck^\eta \tag{4.103}$$

avec

(c.7) $\varepsilon+\rho(\theta-1)-1>0$, $\eta=2\rho\theta-\rho+\varepsilon-1$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_k}{\partial t} &= \left[\lambda_k \nu_k \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial s}(y,x,s_k,\delta_k)-\lambda_{k+1}\nu_{k+1}\frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial s}(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\right]\\ &\quad+\left[\lambda_k\frac{w_s'(y,x,s_k,\delta_k)}{w(y,x,s_k,\delta_k)}-\lambda_{k+1}\frac{w_s'(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})}{w(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})}\right],\end{aligned}\tag{4.104}$$

On note $E_3=[\lambda_k(w_s'(y,x,s_k,\delta_k)/w(y,x,s_k,\delta_k))-\lambda_{k+1}(w_s'(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})/w(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}))]$.

on écrira

$$\frac{\partial F_k}{\partial t}=\left[\lambda_k \nu_k \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial s}(y,x,s_k,\delta_k)-\lambda_{k+1}\nu_{k+1}\frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial s}(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\right]+E_3.\tag{4.105}$$

D'après (4.25) on a

$$\operatorname{Re}\varphi(y,x,s,\delta)=\alpha(y,x,\delta)s+\beta(y,x,\delta,s)s^2,\tag{4.106}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial s}&=\alpha(y,x,\delta)+2\beta(y,x,\delta,s)s+\beta_s'(y,x,\delta,s)s^2\\ &=\alpha(y,x,\delta)+s(2\beta(y,x,\delta,s)+\beta_s'(y,x,\delta,s)s)\\ &=\alpha(y,x,\delta)+\beta_1(y,x,\delta,s)s,\end{aligned}\tag{4.107}$$

où $\beta_1(y,x,\delta,s)=2\beta(y,x,\delta,s)+\beta_s'(y,x,\delta,s)s$, avec $\beta_1(0,0,0,0)<0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_k}{\partial t}\\ &=[(\lambda_k\nu_k-\lambda_{k+1}\nu_{k+1})\alpha(y,x,\delta_k)]\\ &\quad+[\lambda_{k+1}\nu_{k+1}(\alpha(y,x,\delta_k)-\alpha(y,x,\delta_{k+1}))]\\ &\quad+\left[-\beta_1(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})\frac{(t-\delta_{k+1})}{\delta_{k+1}^{2\theta}}\nu_{k+1}+\beta_1(y,x,\delta_k,s_k)\frac{(t-\delta_k)}{\delta_k^{2\theta}}\nu_k\right]+E_3\\ &=[(\lambda_k\nu_k-\lambda_{k+1}\nu_{k+1})\alpha(y,x,\delta_k)]+[\lambda_{k+1}\nu_{k+1}(\alpha(y,x,\delta_k)-\alpha(y,x,\delta_{k+1}))]\\ &\quad+\left[-\beta_1(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})\left(\frac{(t-\delta_{k+1})}{\delta_{k+1}^{2\theta}}\right)\nu_{k+1}+\beta_1(y,x,\delta_k,s_k)\left(\frac{(t-\delta_k)}{\delta_k^{2\theta}}\right)\nu_k\right]+E_3.\end{aligned}\tag{4.108}$$

Notons $E_4=[(\lambda_k\nu_k-\lambda_{k+1}\nu_{k+1})\alpha(y,x,\delta_k)]$, $E_5=[\lambda_{k+1}\nu_{k+1}(\alpha(y,x,\delta_k)-\alpha(y,x,\delta_{k+1}))]$ et $E_6=[-\beta_1(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})((t-\delta_{k+1})/\delta_{k+1}^{2\theta})\nu_{k+1}+\beta_1(y,x,\delta_k,s_k)((t-\delta_k)/\delta_k^{2\theta})\nu_k]$.

Évaluons E_4, nous avons

$$|E_4|\le c_0|\lambda_k-\lambda_{k+1}|\le c_1k^{\rho\theta+\varepsilon-1},\quad \text{avec } c_0>0,\ c_1>0.\tag{4.109}$$

La fonction $\alpha(y,x,\delta)$ étant de classe C^∞ par rapport à (y,x,δ^r) avec $r>0$, alors il existe des constantes $c'>0$ et $c''>0$ telles que

$$|\alpha(y,x,\delta_k)-\alpha(y,x,\delta_{k+1})|\le c'(\delta_k^r-\delta_{k+1}^r)\le c''k^{-\rho r-1}.\tag{4.110}$$

On en déduit qu' il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $|E_5| \le c_2 k^{\rho\theta+\varepsilon-\rho r-1}$. Estimons E_6,

$$\begin{aligned}
E_6 &= -\beta_1(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1}) \\
&\quad \times \left[\left(\frac{t-\delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{t-\delta_k}{\delta_{k+1}^{2\theta}} \right) \nu_{k+1} + (t-\delta_k) \left(\frac{\nu_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}} (t-\delta_k) [\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) - \beta_1(y,x,s_k,\delta_k)], \\
&= -\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) \left[\frac{\delta_k - \delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} \nu_{k+1} \right] \\
&\quad - \beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) \left[\frac{\nu_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}} \right] (t-\delta_k) \\
&\quad - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}} (t-\delta_k) [\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) - \beta_1(y,x,s_k,\delta_k)].
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Pour k assez grand on a $(\delta_k - \delta_{k+1})/\delta_{k+1}^{2\theta} \simeq \rho k^{2\theta-\rho-1}$ et $\nu_{k+1} \simeq k^{\varepsilon}$. Comme $\beta_1(0,0,0,0) < 0$ il existe donc une constante $\tilde{c}_0 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
-\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) \left[\frac{\delta_k - \delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} \nu_{k+1} \right] &= -\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) \left[\frac{\delta_k - \delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} \nu_{k+1} \right] \\
&\ge \tilde{c}_0 k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

On a $\nu_k/\delta_k^{2\theta} \simeq k^{2\rho\theta+\varepsilon}$, d'où on a $\nu_{k+1}/\delta_{k+1}^{2\theta} - \nu_k/\delta_k^{2\theta} \simeq (2\rho\theta+\varepsilon) k^{2\rho\theta+\varepsilon-1}$. Comme $t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$, on a $|t-\delta_k| \le c^{te} \rho k^{-\rho-1}$. On en déduit qu'il existe une constante $\tilde{c}_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
&\left| -\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) \left[\frac{\nu_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}} \right] (t-\delta_k) \right| \\
&\qquad = \left| (t-\delta_k) \beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) \left[\frac{\nu_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}} \right] \right| \\
&\qquad \le \tilde{c}_1 k^{2\rho\theta+\varepsilon-2-\rho}.
\end{aligned} \tag{4.113}$$

On a

$$\begin{aligned}
&-\frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}} (t-\delta_k) [\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) - \beta_1(y,x,s_k,\delta_k)] \\
&\qquad = \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}} (t-\delta_k) [\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) - \beta_1(y,x,s_k,\delta_k)] \\
&\qquad = o(k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}).
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Ainsi on déduit qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $E_6 \ge c_3 k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}$ On voit facilement qu'il existe une constante $c_4 > 0$ telle que $|E_3| \le c_4 k^{\rho\theta}$. On a donc obtenu les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
|E_4| &\leq c_0 |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \leq c_1 k^{\rho\theta+\varepsilon-1}, \quad \text{avec } c_0 > 0,\ c_1 > 0,\\
|E_5| &\leq c_2 k^{\rho\theta+\varepsilon-\rho r-1}, \quad \text{avec } c_2 > 0,\\
E_6 &\geq c_3 k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}, \quad \text{avec } c_3 > 0,\\
|E_3| &\leq c_4 k^{\rho\theta}, \quad \text{avec } c_4 > 0.
\end{aligned}
\tag{4.115}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
&\rho\theta+\varepsilon-1 \leq 2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon \quad (\text{car } \theta > 1 \text{ et } \rho > 0),\\
&\rho\theta+\varepsilon-\rho r-1 \leq 2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon \quad (\text{car } r > 0,\ \rho > 0 \text{ et } \theta > 1),\\
&\rho\theta < 2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon \iff \rho(\theta-1)-1+\varepsilon > 0 \quad (\text{d' après (c.7)}).
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

On en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour k assez grand

$$
\frac{\partial F_k}{\partial t}(y,x,t) \geq c k^{\eta}, \quad \text{avec } \eta = 2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon
\tag{4.117}
$$

d'où le lemme 4.8. □

Estimons maintenant la fonction F_k. D'après les expressions (4.68), (4.98) et (4.102) on peut écrire

$$
\begin{aligned}
F_k(y,x,t) &= \gamma(y,x,\delta_{k+1}) - \gamma(y,x,\delta_k) + G_k(y,x,t)\\
&\quad + \log\left(\left|\frac{w(y,x,\delta_k,\lambda_k(t-\delta_k))}{w(y,x,\delta_{k+1},\lambda_{k+1}(t-\delta_{k+1}))}\right|\right).
\end{aligned}
\tag{4.118}
$$

En utilisant (4.87) et en prenant $t = t_k = (1/3)\delta_k + (2/3)\delta_{k+1}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
F_k(y,x,t_k) &= \gamma(y,x,\delta_{k+1}) - \gamma(y,x,\delta_k) + I_k(y,x)\\
&\quad + \log\left(\left|\frac{w(y,x,\delta_k,\lambda_k(t_k-\delta_k))}{w(y,x,\delta_{k+1},\lambda_{k+1}(t_k-\delta_{k+1}))}\right|\right)\\
&= \log\left(\left|\frac{w(y,x,\delta_k,\lambda_k(t_k-\delta_k))}{w(y,x,\delta_{k+1},\lambda_{k+1}(t_k-\delta_{k+1}))}\right|\right)\\
&= O(1).
\end{aligned}
\tag{4.119}
$$

Ainsi $F_k(y,x,t_k)$ est bornée indépendemment de k. Pour que $k^{\eta} l_k$ tende vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ il faut que

(c.8) $2\rho\theta+\varepsilon-2(\rho+1) > 0$.

D'après (4.103), on a $F_k(y,x,t)$ s'annule en un point d'un intervalle contenant t_k. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $t_k(y,x)$ de classe C^{∞} sur un voisinage V_0 de $(0,0)$ à valeurs dans un intervalle ouvert de $[\delta_{k+1},\delta_k]$, telle que $F_k(y,x,t_k(y,x)) = 0$. Par ailleurs, on vérifie que $t_k(y,x) = t_k + e_k(y,x)$, avec $e_k(y,x) = O(k^{-\eta})$.

Les étapes suivantes étant standard, les démonstrations sont les mêmes que dans [1, 3]. On ne mentionnera que les étapes, laissant le lecteur se rapporter à [3] pour les détails.

4.3.4. Modification des u_k. On va modifier légèrement les fonctions u_k de manière à pouvoir bien définir la perturbation a.

On construit une suite de fonctions, $y_k(y,x,s)$, nulles sur les surfaces $t = t_k(y,x)$ et $t = t_{k-1}(y,x)$, plus petites que toute puissance de $1/k$ pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$, telles que, en notant

$$v_k(y,x,t) = u_k(y,x,t)\big(1 + y_k(y,x,s)\big), \tag{4.120}$$

on a

(1) $\tilde{F}_k = \log(|v_k/v_{k+1}|)$ satisfait (4.103) et s'annule pour $t = t_k(y,x)$,
(2) $g_k = Pv_k/v_k$ satisfait (4.99),
(3) g_k est plate sur $\{(y,x,t) : t = t_k(y,x)\}$ et $\{(y,x,t) : t = t_{k-1}(y,x)\}$.

Cette construction utilise uniquement le lemme 4.7 et le fait que les surfaces $t = c^{te}$ sont non caractéristiques pour P.

4.4. Dernière étape. On choisit χ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support compact telle que

$$\chi(s) = 1 \quad \text{pour } |s| \le \frac{3}{4}, \qquad \operatorname{supp}\chi \subset [-1,1], \quad 0 \le \chi \le 1. \tag{4.121}$$

On pose $\chi_k(t) = \chi((t-\delta_k)/3l_k)$ et $u(y,x,t) = \sum_{k \ge k_0} \chi_k(t) v_k(y,x,t)$, k_0 est un entier assez grand. On vérifie alors que $a = -Pu/u$ est une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de zéro, plate sur $t = 0$.

Il reste à vérifier que u est plate sur $t = 0$. Or, ce résultat découle du fait que d'après l'expression (4.87), la fonction $y_k(y,x)$ est $O(k^{\rho(\theta-1)+\varepsilon})$ et $|v_k \operatorname{Re}\varphi(y,x,t)| \le Ck^{\rho(\theta-1)+\varepsilon-1}$.

4.5. Compatibilité des conditions (c.1), ..., (c.8) et choix effectif des paramètres. Par hypothèse nous avons $\theta > 1$, $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ et $K \le (1 - 1/m_n)$. Les conditions sont

(c.1) $\rho(\theta-1) - 1 < 0$,
(c.5) $\varepsilon[1 - m_n(1-K)] < \rho\theta[3m_n(1-K)/2 - 1]$,
(c.6) $\varepsilon < \rho\theta/2$ et $\varepsilon < \rho(1-\theta/2)$,
(c.7) $\varepsilon + \rho(\theta-1) - 1 > 0$,
(c.8) $2\rho\theta + \varepsilon - 2(\rho+1) > 0$,

fixons $\theta = 9/8$, $\varepsilon = 3/4$ et choisissons $\rho = 6$. Ainsi les conditions (c.1), (c.2), (c.3), (c.4), (c.5), (c.6), (c.7) et (c.8) sont vérifiées. Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, *Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, Sémin. Goulaouic-Meyer-Schwartz, Equations Deriv. Partielles 1980–1981, Exposé no. 16, École Polytechnique, Paris, 1981, pp. 1–8 (French).

[2] L. Hörmander, *Non-uniqueness for the Cauchy problem*, Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations (Colloq. Internat., Université de Nice, Nice, 1974), Lecture Notes in Mathematics, vol. 459, Springer, Berlin, 1975, pp. 36–72.

[3] R. Lascar and C. Zuily, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles*, Duke Math. J. **49** (1982), no. 1, 137–162.

[4] A. Pliś, *A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 599–617.

Khalgui-Ounaïes Hella : Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisia
E-mail address: hella.khalgui@fst.rnu.tn