

Le problème des partis avant Pascal

Le problème des partis doit son nom à Pascal qui lui a consacré son magistral *Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partys qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties* (1).

Deux joueurs jouent à « un jeu de pur hasard », et le premier qui gagne un nombre de « parties » déterminé sera déclaré vainqueur. S'ils doivent « quitter le jeu » avant qu'il soit normalement achevé par la victoire de l'un ou de l'autre, comment doivent-ils partager « l'argent qu'ils ont mis au jeu » ? (2). Pascal traitera de différents aspects de cette « juste distribution » dans sa correspondance avec Fermat en 1654 (3) et, dans l'*Usage* cité plus haut, il expose de manière systématique la méthode générale qui permet de l'établir et les règles selon lesquelles on peut calculer « les partys sur toutes sortes de conditions » (4) à l'aide des cellules du Triangle Arithmétique. Les démonstrations y sont si claires, le raisonnement par récurrence y est manié avec une telle maîtrise que les quelques auteurs du xvi^e siècle qui ont çà et là touché au même problème, ne paraissent guère mériter de retenir l'attention, sinon pour mieux mettre en valeur l'éclatante supériorité de Pascal et de Fermat. Aussi ne les mentionne-t-on jamais que de façon incomplète et allusive, et en insistant sur les erreurs grossières qu'ils ont commises.

(1) PASCAL, *Œuvres publiées suivant l'ordre chronologique*, par L. Brunschvicg, P. Boutroux et F. Gazier, 14 volumes, Paris, 1908-1914 (Collection des Grands Ecrivains de la France), que nous désignerons par l'abréviation *G. E.*, suivie du numéro du tome et de l'indication des pages.

(2) *G. E.*, t. III, p. 478.

(3) Cf. *G. E.*, t. III, pp. 369-431.

(4) *G. E.*, t. III, p. 485.

Si nous avons essayé ici de rassembler et d'analyser tous les textes de cette époque qui nous sont actuellement connus, ce n'est pas toutefois par pure curiosité d'historien en mal de précurseurs.

Dans sa lettre à Fermat du 24 août 1654, Pascal distingue la « méthode des combinaisons » de celle qu'il appelle « mon autre méthode universelle, à qui rien n'échappe et qui porte sa démonstration avec soy... » (5).

Cette méthode consiste à supputer ce qui reviendrait à un joueur à un moment déterminé du jeu, selon qu'il gagnera ou qu'il perdra la partie suivante : si « une certaine somme lui doit appartenir en cas de perte et de gain, sans que le hasard la lui puisse ôter, il n'en doit faire aucun party, mais la prendre entière comme assurée » ; et si une certaine somme lui appartiendra s'il gagne la partie, et appartiendra à son adversaire s'il la perd, « le party est qu'ils separent la somme qui est au hazard par la moitié, et que chacun prenne la sienne » (6). Tels sont les deux « principes » à partir desquels, après avoir résolu des cas élémentaires, Pascal va s'élever au cas plus général. Huygens adopta une méthode analogue, mais dès lors que l'Art Combinatoire étendit son empire sur le Calcul des Hasards, cette méthode apparut comme inférieure à celle des combinaisons qui, déjà au jugement de Montmort, « est beaucoup meilleure » (7). Cette appréciation a été généralement adoptée et on peut lire dans une notice de l'édition des *Œuvres* de Pascal que « le mode de démonstration dont il s'est avisé est... fort élégant, mais n'est pas d'une portée très générale » (8). Élégant, c'est-à-dire convenant bien à son objet particulier. Mais limité, car, dans une théorie pure des probabilités, on n'a que faire des « pertes », des « avantages », de la « juste distribution » dont parle Pascal. Il a semblé de plus en plus évident, surtout à partir de la seconde moitié du xix^e siècle, que de telles notions, par suite de leur portée purement pragmatique devaient être soigneusement éliminées d'une science entrée véritablement en son âge positif.

Or, depuis le développement récent et si rapide de la Théorie

(5) G. E., t. III, p. 404.

(6) G. E., t. III, pp. 478-479.

(7) Pierre REMOND DE MONTMORT, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris, J. Quillau, 1713, Avertissement, p. XXXVI.

(8) G. E., t. III, p. 378. Cf ITARD : « Les procédés de Fermat sont nettement supérieurs à ceux de son jeune émule » (*In La Science Moderne*, publiée sous la direction de R. Taton, Paris, P. U. F., 1958, tome II, p. 219).

des Jeux, et de la Recherche Opérationnelle, elles ont pris une résonance toute nouvelle; et par un contrecoup curieux, nous comprenons mieux, comme l'a souligné G. Th. Guilbaud, le véritable sens de la méthode pascalienne. « Les origines du calcul des probabilités peuvent être datées avec une grande précision : avant Pascal on a dénombré des chances,... mais avec Pascal et Fermat, un point de vue s'impose : il s'agit de *décision*, et non plus seulement de connaissance. Or, il est très important de noter que cette nouveauté de 1654 est aussi bien une actualité de 1954 : ce qui s'explique par une longue éclipse du point de vue décisionnel » (9). Mais dès lors que les découvertes de Pascal se trouvent ainsi placées sous leur véritable jour, les ébauches de ses précurseurs ne gagneraient-elles pas à être relues dans la même perspective? Puisqu'en ce cas, il s'agirait surtout de ressaisir, par-delà leurs maladresses de calcul, le « point de vue » auquel ils se placent, ne se pourrait-il pas que la « nouveauté de 1654 » ait eu elle aussi des antécédents dans le siècle précédent?

Cette hypothèse tire déjà quelque vraisemblance du fait que le problème des partis — et non pas seulement celui du dénombrement des chances — ait été posé à cette époque. « Parti » ne signifie rien d'autre que partage. Le mot se rencontre en ce sens très général dans les arithmétiques du xvi^e siècle. « Partir ou diviser proprement est trouver la partie de quelconque nombre dénommée de quelque nombre que ce soit » (10). Le thème du partage qui a joué un si grand rôle dans l'histoire des mathématiques élémentaires, est par lui-même intimement lié à des problèmes pratiques de décision; mais nous avons à répondre à une question plus précise : nos auteurs ont-ils attribué quelque caractère spécifique à des partages où entre en ligne de compte l'incertitude de l'avenir? (11)

(9) G. Th. GUILBAUD, « Leçons sur les éléments principaux de la théorie mathématique des jeux », I-1, *In Stratégies et décisions économiques. Etudes théoriques et applications aux entreprises*, Paris, éditions du C. N. R. S., 1954.

(10) P. FORCADEL, *L'Arithmétique entière et augmentée*, revue et augmentée, Paris, 1573, p. 40.

(11) Comme il s'agit surtout ici, en première analyse, de décrire la manière dont ils ont réagi chacun pour leur part, face à ce problème, l'ordre dans lequel nous exposons leurs vues sera plus logique que chronologique : aussi parlerons-nous en dernier lieu de Cardan et de Peve-ron.

PACIOLI

Le texte le plus ancien actuellement connu où le problème des partis soit clairement formulé est la *Summa* (12) de Luca Pacioli. Comme pour beaucoup de problèmes de ce genre qu'on retrouve fidèlement reproduits par toute une série d'auteurs, il est difficile de dire s'il s'agit de problèmes en quelque sorte académiques que recommandent leur originalité (13) ou leur difficulté, ou s'ils ont eu pour occasion quelque circonstance précise. Il n'est pas invraisemblable que les règles de certains jeux se soient assorties de conventions relatives à leur interruption avant leur fin normale; on se complait souvent à imaginer le Chevalier de Méré interrogeant Pascal : bien avant lui, des joueurs auraient-ils, pour mettre un terme à leurs contestations, consulté des experts mathématiciens? Toujours est-il que, comme l'indique lui-même Pacioli, le débat était déjà ouvert lorsqu'il l'aborde : des « opinions diverses » s'étaient opposées, qu'il rejette de son côté pour ce qui lui paraît être « la vérité », et « la voie droite » pour y parvenir. Sa position est ferme, et c'est elle surtout que nous essaierons de dégager d'un texte désordonné où interfèrent la mention de jeux de type très différent, et des remarques critiques parfois difficiles à interpréter.

Voici le premier problème : deux camps jouent à la balle; chaque manche est de 10 points et il faut 60 points pour gagner le jeu; la mise totale est de 10 ducats. Il arrive que, pour quelque raison accidentelle, le jeu ne puisse s'achever. On demande ce que touche de la mise totale chacun des deux camps, lorsque l'un a 50 points et l'autre 20 points.

Pacioli va énumérer trois modes de répartition qui vont, au bout du compte, s'avérer identiques : il faut leur donner une partie de cette mise proportionnelle aux points qu'ils ont respectivement gagnés. Ses commentateurs les plus directs ont pu trouver ridicule et superflue cette répétition sous trois formes à peine différentes

(12) Les textes auxquels nous nous référons se trouvent au folio 197 de la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Tusculano, Paganino de Paganini, 1523. La première édition parut en 1494 à Venise.

(13) Dans la table (non paginée), qui se trouve en tête de l'ouvrage Pacioli présente ainsi ceux qui nous intéressent :

« De certi che giocano a palla e altri al balestro e altri a mettere pegno belli e boni casi ». Le cadre dans lequel ils se présentent (*Disinctio nona, Tractatus X, De straordinariis*, [section] *De Militaribus*) dit assez leur caractère marginal.

d'une idée simple : cependant, nous ne pouvons nous contenter du raccourci trop rapide que nous venons d'en donner, qui ne rendrait compte, ni de son embarras, pour nous plein d'enseignement, ni des motifs pour lesquels il a pu croire qu'il avait lui-même découvert la « voie droite ».

a) «En premier lieu, il faut considérer combien de manches au plus un camp et l'autre peuvent faire entre eux deux : cela fera 11, à savoir quand il manque une manche à chacun », et que l'un gagne la dernière. Puis considérons quelle partie de ces 11 manches ont obtenu respectivement chacun des camps : le premier en a obtenu 5/11 et le second 2/11. Par conséquent, ils devront retirer de la mise totale, des parties proportionnelles à ces nombres dont la somme est égale à 7/11. On les calculera ainsi : 7/11 gagnent 10 ducats : combien gagnent 5/11 et 2/11? On verra que le premier camp aura 7 ducats 1/7 et le second 2 ducats 6/7.

b) On peut sous une seconde forme raisonner de manière semblable : les deux camps peuvent faire en tout 110 points; on se demande quelle partie de ces 110 font 50 : ce sera comme plus haut 5/11; et, pour le second camp, ce sera de même 2/11. On poursuivra le reste du calcul comme précédemment.

c) La troisième manière consiste à dire très brièvement : les deux camps ont à eux deux obtenu 70 points. Or, à ces 70 points correspond le gain de la mise totale qui est de 10 ducats : combien touche de cette mise celui qui a 50 points et celui qui en a 20?

Exposons sans plus attendre, bien que Pacioli n'en parle lui-même qu'après avoir rejeté des procédures différentes, la solution analogue qu'il donne du problème des partis pour trois joueurs.

Trois hommes tirant à l'arbalète jouent à qui marquera le premier les 6 coups « les meilleurs » (il s'agit sans doute de coups dans la cible). La mise totale est de 10 ducats. Alors que le premier tireur a 4 coups, le second 3, le troisième 2, ils ne veulent pas poursuivre, et s'accordent pour partager la mise. Voici comment il faut procéder : il faut considérer combien de coups ils pourraient faire au plus entre les trois : ils ne pourraient en faire plus de 16, car, lorsque les trois ont tous 5 coups, l'un des trois l'emporte définitivement à l'épreuve suivante; par conséquent, ils auront fait alors 16 coups. De ces 16, le premier en a obtenu 4, c'est-à-dire 1/4; par conséquent, il devra obtenir 1/4 de la mise totale, c'est-à-dire

2 ducats $1/2$; le second a obtenu $3/16$ des 16 coups, donc il devra obtenir les $3/16$ de la mise totale, c'est-à-dire 1 ducat $7/8$; le troisième devra de même obtenir $1/8$ de la mise totale, c'est-à-dire 1 ducat $1/4$.

Il reste alors à partager :

$$10 \text{ duc.} - 5 \text{ duc. } 5/8 = 4 \text{ duc. } 3/8.$$

On partagera cette somme d'après la règle de compagnie selon les proportions $1/4$, $3/16$, $1/8$. Les trois joueurs toucheront respectivement :

$$1 \text{ duc. } 17/18, 1 \text{ duc. } 11/24 \text{ et } 35/36 \text{ duc.}$$

Chacun d'eux recevra donc en tout :

$$4 \text{ duc. } 4/9, 3 \text{ duc. } 1/3, 2 \text{ duc. } 2/9.$$

Si on la considère dans son principe, la solution de Pacioli est de celles qui se présentent tout d'abord à un esprit peu attentif, mais elle avait des raisons plus puissantes de s'imposer à lui. Que fait-il en effet, sinon appliquer une des règles les plus fondamentales de l'arithmétique commerciale, la règle de compagnie? Et qu'il la mentionne expressément montre bien qu'il assimilait tout naturellement la situation du joueur qui a obtenu un certain nombre de points à celle du membre d'une « société » qui apporte à celle-ci un capital déterminé. Les points acquis constituent en quelque sorte un bien, un *acquis* d'après lequel doit s'effectuer le partage. Ce qui compte, c'est ce qui a été joué et gagné. Que telle soit l'argumentation élémentaire sur laquelle table Pacioli, on l'aperçoit encore mieux dans une phrase incidente où il nous dit qu'il faut procéder de la même manière que ci-dessus lorsqu'il s'agit d'une course à pied ou à cheval : il faut partager proportionnellement à la distance parcourue.

Mais que vient faire alors dans les calculs (a) et (b), ainsi que dans le problème des trois joueurs, le nombre de manches ou de coups que peuvent gagner au plus les joueurs avant que le jeu soit terminé?

Ce nombre maximum qui renvoie à un jeu *possible* n'aurait pas à intervenir dans une procédure qui repose sur la prise en considération des manches ou des points *effectivement gagnés* au cours d'un jeu déterminé. Il est d'autant plus surprenant que Pacioli y fasse appel qu'il sait fort bien s'en passer dans le calcul (c). Ce détour assez bizarre peut n'être dû qu'à une maladresse de

calcul, ou à une négligence de rédaction qui laisse transparaître une recherche avortée. Il se peut fort bien aussi qu'on ait là une trace de discussions antérieures et de procédés auxquels Pacioli aurait fait des emprunts en les modifiant. Nous le croirions d'autant plus volontiers que nous allons rencontrer plus loin une solution où ce nombre maximum a véritablement sa place, et elle n'est pas d'un raffinement tel qu'elle n'ait pu être proposée avant la rédaction de la *Summa*.

Quoi qu'il en soit, le seul fait que Pacioli et certains de ses successeurs aient accepté sans répugnance particulière de spéculer sur ce nombre, a en lui-même son importance. A n'en pas douter, il y aurait quelque exagération à affirmer sans nuances que s'amorce ici la « méthode des combinaisons ». Mais enfin, pour aussi timide et maladroit qu'il soit, c'est là un premier effort pour s'en rapporter à un ensemble d'événements possibles. Référence au possible qui devait susciter bien des difficultés tout au long de l'histoire du calcul des probabilités. N'est-ce pas précisément parce que Pascal et Fermat avaient fondé leurs « partis » sur des « combinaisons » décrivant toutes les manières dont une partie interrompue aurait pu se poursuivre que Roberval en récusera la légitimité? Pascal écrivait en effet à Fermat le 24 août 1654 :

« Je communiquay votre méthode à nos Messieurs sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le party sur la proposition qu'on joue en quatre parties, vu que, quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue en quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou à la vérité peut-estre quatre :

Et ainsi qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendait de faire le party juste sur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu, est qu'on ne jouera plus des que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'estoit faux, cela n'estoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme » (14).

Pascal qui avait victorieusement levé ce soupçon pour le cas de deux joueurs, ne devait-il pas commettre lui-même l'erreur de croire que Fermat avait commis un paralogisme semblable dans le cas de trois joueurs? (15)

(14) PASCAL, G. E., t. III, pp. 403-404.

(15) Cf. PASCAL, G. E., t. III, pp. 409-411.

Ce document sur la méfiance à laquelle pouvait se heurter le recours à des « conditions feintes » méritait d'être rappelé, car il cerne fort bien un des obstacles épistémologiques que devaient rencontrer ceux qui s'attaquaient au problème des partis.

Venons-en maintenant à la critique que formule Pacioli à l'encontre de deux autres modes de division sur lesquels il ne donne d'ailleurs que des indications succinctes :

a) Soit un jeu de moure où il faut obtenir 5 points pour gagner ; un joueur a 4 points, l'autre 3 points. Certains disent : « Revenons en arrière, et ôtons un point à chaque joueur, de sorte que l'un a 2, et l'autre 3 points. »

b) Reprenons l'exemple du jeu de balle où un camp a 50 points, l'autre 20. Rabattons 20 points : le premier en a alors 30, l'autre 0. Disons alors dans ces conditions que celui qui en a 30 aura la moitié de la mise, ce qui fait 5 ducats, « parce qu'il a la moitié du jeu » ; on divise les 5 ducats qui restent en deux parts égales et chacun des camps prend une de ces parts. Le premier camp recevra donc 7 ducats $1/2$, et l'autre 2 $1/2$.

Avons-nous affaire ici à des recettes appropriées à des cas particuliers, ou bien à des échantillons de procédés de portée plus générale ? Les allusions assez vagues qu'y fait Pacioli ne permettent pas d'en décider, mais il semble bien qu'il entend rejeter sous deux de ses aspects un même type de solution. On voit bien où veulent en venir dans l'exemple (a) ceux qui rabattent 2 points : on aura $2 + 3 = 5$, ce qui leur permettra de calculer plus aisément les parties de la mise totale qui reviennent à chacun des deux camps et qui étaient très certainement $2/5$ et $3/5$. Appliqué à l'exemple (b) un rabattement analogue aurait conduit à rabattre 5 points du nombre de points obtenu par chacun des joueurs, mais cela paraissait peut-être n'avoir pas de sens, eu égard aux règles d'un jeu où les manches étaient de 10 points. Peut-être faut-il voir là le motif d'un artifice qui retrouvera par une autre voie un partage équivalent à celui qu'aurait donné la première façon de faire. L'artifice consiste à profiter du fait qu'en rabattant 20 points on se ramène à une situation plus simple où la transaction s'opère sans mal : « J'ai fait la moitié des points et vous rien. A moi la moitié de la mise. Pour le reste, on partage. »

Ces manipulations assez tâtonnantes sont guidées par une intuition simple : ce qui importe essentiellement c'est qu'un joueur

a fait *plus* de points que l'autre ; la valeur de ce supplément, rapportée au nombre de points nécessaires pour être vainqueur, servira de critère au partage. C'est ce que Tartaglia répétera — mais encore sous une autre forme que les deux exemples précédents — et il est curieux de remarquer qu'il ait passé sous silence la critique que pour le fond, Pacioli lui avait adressée par avance. Reprenons l'exemple (a) : on ne doit pas procéder ainsi, dit Pacioli, car les deux joueurs ne rabattent pas des points en même proportion : celui qui avait 4 points rabat $1/4$ du nombre des points qu'il avait gagnés ; celui qui avait 3 points rabat, lui, $1/3$ du nombre des points qu'il avait gagnés. Pour l'exemple (b), Pacioli se contente de dire : « Ce ne serait pas juste pour la raison dite plus haut. » Sa critique, si elle avait été systématisée, revenait à dénoncer le procédé de rabattement comme un artifice illégitime, qui ne maintient qu'en apparence la différence de situation des deux joueurs et qui considère à tort comme équivalentes toutes les situations où les scores des joueurs diffèrent par un même nombre de points. Mais on peut penser que Pacioli n'a formulé sa critique que parce qu'il croyait à la bonté de sa propre règle : considérant les points acquis comme des biens déjà engrangés, il devait se refuser par principe à en ôter quoi que ce soit !

TARTAGLIA

Tartaglia (16) énonce le premier problème de Pacioli et expose la solution proposée par celui-ci pour la critiquer ensuite à l'aide d'un contre-exemple (17). Plus loin, il mentionnera deux autres problèmes sans vouloir s'y attarder, car « encore que différents en paroles », ils sont en fait semblables au premier, et on peut par conséquent répéter à leur propos l'argument déjà avancé contre Pacioli dans le premier cas.

D'ailleurs, Tartaglia est assez sceptique quant à la possibilité même de trouver une véritable solution, ou plus précisément c'est la nature même du problème qui empêche qu'on puisse couper court en ces matières à toute contestation : « La résolution d'une

(16) Niccolò TARTAGLIA, *La Prima parte del General trattato di numeri e misura*. — In Vinegia, per C. Troiano di Navo, 1556.

(17) Au folio 265, recto et verso. Dans la traduction abrégée qu'il donna en 1578 de *l'Arithmétique* de Nicolas Tartaglia, Guillaume Gosselin négligea le problème des partis.

telle question est davantage d'ordre judiciaire que rationnel, et de quelque manière qu'on veuille la résoudre, on y trouvera sujet à litiges » (18). S'il propose cependant lui-même celle qui lui « paraît la moins litigieuse », il refusera en fin de compte avec quelque hauteur de parler plus longuement sur ce sujet, « bien que soient nombreux ceux qui prennent plaisir à de semblables futilités pour l'occasion qu'elles offrent de pouvoir disputer ».

Il condamne en mathématicien ces récréations qui ne sont bonnes qu'à satisfaire de manière parfaitement vaine l'esprit de contradiction : « Parce que de telles questions sont matière à litiges et de peu d'intérêt, il ne faut pas en tenir grand compte. »

Quoi qu'il en soit, la manière dont Tartaglia montre que la solution de Pacioli est inacceptable ne manque pas d'intérêt.

« Sa règle ne me paraît ni bonne, ni belle, parce que s'il arrive qu'un parti ait 10 [points], et l'autre rien, et qu'on procédât selon sa règle, le premier devrait tirer le tout [toute la mise] et le second rien; ce serait tout à fait déraisonnable que, pour 10 [points], il doive tirer le tout. »

Il faut, pour le moins, éviter pareil inconvénient : s'il n'y a pas de réponses incontestables, il y en a de manifestement erronées. Aussi Tartaglia soulignera-t-il explicitement que le procédé de partage qu'il illustre par les exemples suivants, ne pourra donner lieu à l'inconséquence fâcheuse qu'il vient de signaler. Ce qui peut faire soupçonner que c'est là précisément le motif qui l'a conduit à prendre en considération l'écart entre les nombres de points obtenus par chacun des joueurs.

« Il faut voir en premier lieu quelle partie a chacun de tout le jeu; s'il arrive que l'un ait 10, et l'autre 0, celui qui a 10 aura donc le sixième de tout le jeu; et je dis par conséquent que dans ce cas, il devra avoir la sixième partie du nombre de ducats misé par chacun; ainsi, s'ils mettent chacun 22 ducats, il devra avoir la sixième partie des dits ducats, ce qui fera 3 ducats $\frac{2}{3}$ qui joints à ses propres 22 ducats feront 25 ducats $\frac{2}{3}$, et l'autre camp devra tirer le reste, qui sera de 18 ducats $\frac{1}{3}$. »

Autre exemple :

« Et si un camp avait 50 et l'autre 30, en retranchant 30 de 50, il

(18) ... « la risoluzione di una tal questione è più presto giudiciale, che per ragione, tal che in qual si voglia modo la sarà risolta visi trovare da litigare... »

restera 20, lesquels 20 se trouvent être le tiers de tout le jeu; dont il [le premier camp] devra tirer (oultre les siens) la tierce partie des ducats de l'autre camp, laquelle tierce partie s'élèvera à 7 ducats $\frac{1}{3}$ qui joints aux siens feront 29 ducats $\frac{1}{3}$; et l'autre camp devra tirer le reste qui sera égal à 14 ducats $\frac{2}{3}$, et ce procédé ne conduira pas à un résultat inacceptable comme cela a lieu dans la manière de faire du frère Luca. »

Tartaglia décompose ainsi en deux temps le partage :

a) Il admet tout d'abord que celui des deux joueurs qui a le plus de points doit récupérer sa mise. Notons un détail bien propre à caractériser l'attitude particulière qu'adopte Tartaglia à l'égard des mises des joueurs : dans le problème qu'il énonce d'après Pacioli, la mise totale était de 22 ducats; dans les problèmes qu'il propose, ce sont 22 ducats que mise chacun des joueurs, et la solution consistera à déterminer le sort distinct que subira chacune de ces mises qui restent bien différenciées. Tartaglia se sépare ainsi des auteurs qui admettent tacitement qu'une fois le jeu commencé, les apports des joueurs se confondent en un tout indivis : le point est d'importance, car c'est le statut — en quelque sorte juridique — qu'il accorde aux mises des joueurs qui inspire sa règle de partage.

b) Le joueur qui a le plus de points ayant repris possession de ses propres ducats, la transaction va ensuite porter sur ce qu'il doit prélever sur la mise de son adversaire. Tartaglia considère qu'il a droit à une partie de cette mise proportionnelle à $\frac{s_1 - s_2}{s}$, s_1 étant le nombre de points qu'il a obtenus, s_2 étant le nombre de points obtenus par son adversaire, s étant ce que Tartaglia désigne ci-dessus comme étant « tout le jeu », c'est-à-dire le nombre de points nécessaires à un joueur pour qu'il soit définitivement déclaré vainqueur.

Cette solution est analogue, au bout du compte, comme nous l'avons déjà dit, à celles que critiquait Pacioli. Mais outre que les différences de présentation devaient suffire à masquer cette similitude, il est préférable d'insister ici sur les raisons particulières qui ont pu porter Tartaglia à lui donner sa préférence.

Il a été frappé par l'injustice manifeste qui consisterait à favoriser outrageusement un joueur sous prétexte qu'il a gagné quelques points alors que l'autre n'en a encore obtenu aucun. Il faut certes, pense-t-il, accorder davantage au premier, mais seulement en proportion de son avance par rapport au second, cette avance étant

elle-même estimée relativement au but dont le premier est plus proche : la fin effective du jeu. Tartaglia recommande, si l'on ose s'exprimer ainsi, la règle de Pacioli plus qu'il n'en transforme l'esprit. Son attention reste fixée sur le fait que si un joueur a dépassé son adversaire par le nombre des points qu'il a gagnés, cela mérite compensation; mais on remarquera que cette compensation sera évaluée de manière identique, quel que soit le moment où le jeu sera interrompu.

(Ainsi elle sera le même dans les deux cas suivants :

$$\begin{array}{lll} s = 100 & s_1 = 99 & s_2 = 89 \\ s = 100 & s_1 = 10 & s_2 = 0 \end{array}$$

Tartaglia cherche à évaluer, pour parler comme Pascal, « la valeur sur l'argent de l'autre » (19) de l'avance obtenue par un joueur.

Sans s'en douter, il commence par vouloir décider de ce qui, dans l'ordre des raisons, est le plus difficile, et soit qu'il lui ait vraiment échappé que l'important était de cerner les variations de cette valeur, soit qu'il ait trouvé oiseux de considérer plus avant ces sornettes, il s'est satisfait d'y mettre un terme par une approximation grossière.

FORESTANI

Forestani (20) consacre un assez long développement (quatre pages imprimées en caractères très serrés (21) dans l'édition de 1682), mais s'il s'y étend si longuement, c'est surtout parce qu'il se plaît à enjoliver de détails pittoresques ses historiettes et qu'il mêle avec prolixité exposés et critiques. Il empruntera lui aussi

(19) ... « la valeur (j'entends la valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de deux est double de la dernière partie de trois,... » (PASCAL, *G. E.*, III, p. 384).

(20) Lorenzo FORESTANI, *Pratica d'aritmetica e geometria* del Rev. P. Lorenzo Forestani, da Pescia,... di nuovo ristampa e con somma diligenza ricoretta... — Siena, Stamparia del publico, 1682.

La table des matières détaille ainsi les pages auxquelles nous nous référons :

« D'alcuni che giocano alla palla, a balestrare, e d'altre variate domande

Error di Fra Luca, e del Peverone

Opinione falsa del Pagani. »

La première édition de cet ouvrage est de 1603 (cf. P. RICCARDI, *Biblioteca matematica italiana*, Modena, 1870, 1^{re} partie, p. 478).

(21) *Op. cit.*, pp. 364-367.

l'exemple du jeu de balle à Pacioli, mais donnera plus de piquant en mettant en scène un gentilhomme âgé qui, retrouvant sa maison de campagne, et affectionnant beaucoup ce jeu, demande à deux jeunes paysans d'y jouer devant lui à cette condition que celui des deux qui aura gagné le premier huit jeux aura 4 ducats. Et voilà qu'ils perdent la balle alors que l'un a 5 jeux et l'autre 3. Plus loin, ce seront trois soldats, dont le jeu est interrompu, parce qu'il leur faut prendre la garde; comment doivent-ils partager l'écu qu'ils avaient trouvé par hasard et qu'ils avaient convenu de donner à celui qui aurait gagné le premier 14 jeux? (Notons que dans ces deux exemples, l'enjeu est un bien sur lequel les joueurs n'avaient, avant de jouer, aucun titre de possession.) Forestani cite également un exemple de F. Peverone (22) mais au lieu de préciser pourquoi il n'accepte pas pour sa part de faire appel aux « progressions », il se contente simplement de donner sa propre solution. Cette solution qu'il considère comme « la plus droite et la plus commune », il l'applique à tous ses autres problèmes, non sans souligner prudemment à la fin (à la manière de Tartaglia) que diverses sont les opinions à ce sujet, que ce ne sont que des opinions, mais qu'en tout cas on ne peut accepter celle de Frère Luca. Cependant les raisons de son refus sont d'un tout autre ordre que celles de Tartaglia, et nous allons voir apparaître ici une notion dont l'absence aura pu surprendre dans les textes précédents : celle de Fortune. Fortune incertaine et changeante qui par ses caprices pourra favoriser n'importe lequel d'entre les joueurs : aussi faudra-t-il partager également entre eux ce qui relève d'elle, ou plutôt ce qui dépendrait d'elle s'ils continuaient à jouer. On peut penser qu'en adoptant cette manière fort « commune » de voir, Forestani n'avait pas le mérite de l'originalité.

Il nous apprend d'ailleurs lui-même, en le citant (23) et en

(22) « Questa la propone, e dispone Gio. Francesco Peverone nel modo sopradetto, e noi diciamo... » (*Op. cit.*, p. 366).

(23) Après avoir formulé un exemple semblable au premier exemple de Pacioli, sauf qu'un camp a 45 et l'autre 15, Forestani ajoute : « Questa è la 23. propositione descritta dal Pagani da Bagnacavallo nel suo trattato delle due false positioni », et déclare que ses conclusions aussi bien pour cet exemple que pour deux autres tout à fait semblables sont erronées. Mais ailleurs Pagani avait à propos d'un autre problème adopté un procédé différent :

« Ma perche del detto Pagani nell'ottava sua propositione, poco indietro alla sua sopradetta ha descritto, che due Giovani giucando al Tavoliero 18. ducati... » procédé que Forestani approuve en ces termes

approuvant la solution qu'il avait donnée d'un problème de parti le nom d'un de ses prédécesseurs : Pagani da Bagnacavallo. Mais ce dernier, il est vrai, avait pour d'autres problèmes, suivi fidèlement la règle de Pacioli! (24).

Forestani va, pour commencer son calcul, se demander tout comme Pacioli, « combien de jeux au plus » peuvent faire entre eux les joueurs. Mais il optera, lui, pour un mode de répartition de la mise, qui tiendra effectivement compte de cette considération. Ce que les deux exemples suivants suffiront à illustrer.

Dans l'historiette mentionnée ci-dessus, où deux jeunes paysans jouent devant un gentilhomme, nous avons, avec les notations déjà employées :

$$s = 8 \quad s_1 = 5 \quad s_2 = 3.$$

Entre les deux, ils peuvent faire au plus 15 jeux. « C'est pourquoi le premier, en gagnant 5 jeux, vient à gagner 5/15, c'est-à-dire 1/3 des 4 ducats, et le second qui a gagné 3 jeux vient à gagner 3/15, c'est-à-dire 1/5 des 4 ducats de manière que entre le premier et le second, ils en viennent à gagner 8/15 des 4 ducats. On voit clairement par là qu'il reste 7/15 qui n'ont fait l'objet d'aucune lutte, qui ne sont ni joués, ni gagnés par aucun des deux; c'est pourquoi il faut les diviser par moitié; 7/30, moitié de 7/15, joints à 1/3 font 13/30 : telle est la part que touche le premier; et l'autre moitié, c'est-à-dire 7/30 joints à 1/5 font 13/30 : telle est la partie que touche le second. « En divisant ensuite les 4 ducats selon la « règle de société », on trouvera que « le premier devra toucher 2 ducats 4/15 et le second 1 ducat 11/15; et c'est là la vraie solution des questions semblables » (25).

après l'avoir rapporté en détail : « Hor questa è quella solutione, che il detto Pagani dà alla sopradetta propositione, la qual conclusionè è quella che a noi piace e approviamo per buona » (*Op. cit.*, pp. 366-367).

(24) D. E. SMITH (*Rara Arithmetica*, Ginn and Company Publishers, Boston, 1908) mentionne, en précisant qu'il est « rare et presque inconnu », l'ouvrage suivant de Francesco Pagani da Bagnacavallo, *Arithmetica pratica utilissima artificiosamente ordinata*, édité à Ferrare en 1591. « It has no merit save as its applied problems give a view of the business life of the time. »

(25) Retenons les expressions par lesquelles Forestani justifie son argumentation : « ... i quali non sono affaticati, nè giovati nè vinti da nessun di loro » (p. 364);

... « e questa parte non essendosi ancora giocata, nè vinta, & affaticata da nissun di loro, il dovere vuole che si divida ugualmente per terzo » (p. 365).

Forestani généralise la solution au cas de trois joueurs :

$$s = 14 \quad s_1 = 10 \quad s_2 = 8 \quad s_3 = 5.$$

Entre les trois, ils peuvent faire au plus 40 jeux. Ils en ont obtenu en fait à eux trois :

$$14 + 10 + 5 = 23.$$

Une fois qu'on aura partagé les 23/40 de la mise totale proportionnellement aux points acquis, il restera à partager $\frac{40 - 23}{40}$ = 17/40 de la mise totale. Ce reste sera partagé également entre les trois joueurs.

	10	17	47
Le premier aura sur la mise totale ..	$\frac{40}{40}$	$+$ $\frac{17}{120}$	$=$ $\frac{47}{120}$
Le second joueur	$\frac{8}{40}$	$+$ $\frac{17}{120}$	$=$ $\frac{41}{120}$
Le troisième joueur	$\frac{5}{40}$	$+$ $\frac{17}{120}$	$=$ $\frac{32}{120}$ (26)

« La raison que quelques-uns allèguent à l'opposé est la suivante : ils disent que celui qui a davantage de jeux est plus près de pouvoir finir, et d'obtenir le tout; aussi convient-il qu'il retire une partie de ces deniers au prorata des jeux gagnés.

Et nous, nous disons que la Fortune peut se retourner rapidement, et favoriser l'autre à gagner le tout, comme on l'a vu et comme on le voit un nombre infini de fois, aussi bien dans le jeu de la balle que dans tout autre, mais principalement dans les choses de la guerre... ainsi que l'a doctement montré l'Arioste en la personne de Charles dans ces deux vers :

Ainsi la Fortune sourit-elle à Agramant

Qui devint de nouveau, de Charles l'assiégeant.

Charles ayant en effet assiégé Agramant, la Fortune se retourna à un tel point qu'Agramant mit en déroute en un instant l'armée de Charles et l'assiégea une nouvelle fois dans Paris » (27).

Dans cette manière d'effectuer le partage en deux temps, en essayant d'accorder une place à la fois aux avantages acquis, et à ce qui dépend de la fortune, s'esquisse la distinction pascalienne

(26) *Op. cit.*, p. 365.

(27) *Op. cit.*, p. 367.

entre ce qu'il faut considérer comme assuré, et l'attente du hasard. Mais le principe que Pascal applique à bon escient lorsqu'il y a « autant de hasards pour l'un et pour l'autre », y apparaît sous la forme d'une décision sommaire qui ne se soucie pas de cette égalité. Les joueurs pouvaient subir des revers imprévus? Il n'en faut pas moins évaluer, dira Pascal, « ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune » (28).

CARDAN

Les textes où Cardan traite du problème des partis (29) ne sont pas très longs, mais dans leur brièveté, ils sont beaucoup plus riches que tous les autres, car on y décèle une réflexion beaucoup plus méthodique : Cardan a comparé entre eux des cas différents et médité sur les « conditions » plus ou moins bonnes des joueurs selon les pertes ou les bénéfices qui peuvent leur advenir, et poussé assez loin ces spéculations pour pouvoir avancer deux principes généraux de la théorie des jeux (*ratio ludorum*). Ces textes se trouvent en deux endroits différents de sa *Practica arithmeticae* et on oublie généralement de mentionner le second :

— Paragraphes 13 et 14 du chapitre 61 : « *De Extraordinariis & Ludis* ».

— Paragraphe 5 du chapitre 68, dernier chapitre de l'ouvrage, intitulé : « *De Erroribus Fratris Lucæ in Arithmetica* » (30).

Puisque, dans la liste des erreurs de Pacioli qu'il se plaît à énumérer, Cardan est revenu sur des questions relatives aux jeux, il nous semble plus profitable de lire tout d'abord sa réfutation avant de nous informer de sa propre théorie. Cardan n'épargne pas les sarcasmes à son prédécesseur : il commet une erreur que même

(28) PASCAL, G. E., t. III, p. 478.

(29) *Practica arithmetica et mensurandi singularis*. Mediolani, impensis B. Calusci, 1539.

(30) Pour la commodité des références, nous citons d'après les *Opera omnia*, édités à Lyon, en 1663, 10 volumes, où les textes que nous analysons se trouvent au tome IV, respectivement à la page 112 et à la page 214.

Il est très regrettable que dans son remarquable ouvrage *Cardano, the gambling scholar*, Princeton University Press, 1953, Oystein Ore ait négligé de parler de ces textes. F. N. David (*Games, Gods and Gambling*, London, Charles Griffin & C°, p. 47, note (*)) n'a pu trouver, avoue-t-il, de texte sur les problèmes de Pacioli dans la *Practica Arithmeticae*. « Il serait très intéressant historiquement si Cardan les avait discutés et traités de manière erronée (ou exacte!). »

un enfant peut reconnaître! (31). Par trois fois, Cardan va dénoncer les « absurdités » auxquelles conduisent les partages effectués selon la règle de Pacioli. Comme l'argument qui, dans l'exposé de Cardan, se trouve à la seconde place, est d'un autre ordre, nous nous réservons d'en parler plus loin.

Soient les exemples suivants : disons que Primus a s_1 « jeux » (*ludi*) et Secundus s_2 « jeux »; il en faut s pour être vainqueur :

$$1) \quad s = 19 \quad s_1 = 18 \quad s_2 = 9$$

Ils ont misé chacun 12 pièces. Selon Pacioli, Primus aura 16 pièces et Secundus 8 pièces (respectivement 18/27 et 9/27 de la mise totale); il n'aurait donc gagné que 4 pièces sur l'argent de son adversaire, ce qui est le 1/3 de l'argent déposé par ce dernier. Or, il ne lui manque qu'un seul jeu pour être définitivement vainqueur, alors qu'il en manque 10 à l'autre. Le partage en question est donc tout à fait absurde (*absurdissimum*) (32).

$$2) \quad s = 19 \quad s_1 = 2 \quad s_2 = 0$$

Selon Pacioli, Primus aurait tout et Secundus rien. « Il est indubitable que cela ne convient pas, puisque par suite d'un avantage si modique, alors qu'il est si éloigné de la fin, il doit acquérir autant que s'il avait gagné les 19 jeux. » En second lieu, en mettant les choses au pis, Secundus ne doit pas pouvoir perdre toute sa mise (sous-entendu : lorsqu'on arrête le jeu avant qu'il ait atteint son terme effectif). Considérons en effet le cas suivant :

$$s = 19 \quad s_1 = 18 \quad s_2 = 0$$

Même en ce cas, Secundus n'aurait pas le droit de tout emporter, puisque alors on considérerait que le dernier jeu est superflu. A fortiori ne doit-on pas tout lui donner lorsqu'il n'a gagné que deux jeux (33).

Les « absurdités » contre lesquelles proteste Cardan ne sont pas des contradictions logiques ou des erreurs d'arithmétique, mais des décisions qui violent les exigences d'équité les plus élémentaires du sens commun (34). C'est sans doute pour une raison analogue

(31) « Et erravit ludorum determinatione errore manifestissimo, & à puero etiam cognoscibili. »

(32) *Opera*, IV, p. 214.

(33) *Ibid.*

(34) Dans le *De ludo Aleæ*, Cardan élèvera ces exigences au rang de principe fondamental : « Est omnium in Alea principalissimum, æqualitas, ut pote collusoris, astantium, pecunarium, loci, fritilli, Aleæ ipsius » (*Opera*, I, p. 263).

que Cardan élimine d'emblée l'erreur qui consiste à ne tenir compte que des points acquis, « Il est curieux de remarquer » que, à la différence de Pacioli et Tartaglia, « Cardan soit le seul qui ait compris, avec Pascal, Fermat et Huygens, que le nombre des parties à gagner, dont on est convenu au commencement du jeu, doit être sans influence sur le partage à faire quand on connaît les nombres des parties qui manquent » (35). Cardan énonce même cette vérité sous la forme d'un principe, sans cependant le démontrer : habitué qu'il était à comparer les « conditions » des joueurs dans des situations différentes, il n'aurait pas eu de mal à trouver des cas simples pour le mettre en évidence. « Quant à la théorie des jeux, il faut savoir que dans les jeux il ne faut considérer rien d'autre que le terminus ad quem... » (36).

Après cette phrase préliminaire, Cardan donne deux exemples où il met en œuvre la règle de partage suivante.

$$\text{Soit : } s = 10 \quad s_1 = 7 \quad s_2 = 9.$$

« Soustrais 7 de 10 : restent 3; soustrais 9 de 10 : reste 1.

La progression de 3 est 6 [« *progressio 3 est 6* »], la progression de 1 est 1. Tu donneras donc, en divisant tout le dépôt en 7 parties, 6 parties à celui qui a 9 et une partie à celui qui a 7. Supposons qu'ils aient misé chacun 7 pièces d'or, alors le dépôt serait au total de 14 pièces desquelles 12 reviennent à celui qui a 9 et 2 à celui qui a 7, c'est pourquoi celui qui a 7 perd 5/7 du capital. »

Autre exemple : $s = 10 \quad s_1 = 3 \quad s_2 = 6$.

Il manque 7 jeux à Primus, 4 à Secundus.

« La progression de 7 est 28, la progression de 4 est 10. Donc

(35) *Œuvres de Christiaan Huygens*, La Haye, 1888-1950, t. 14, Avertissement, p. 22, note 1.

(36) « Quantum ad rationem ludorum sciendum est quod in ludis non habet considerari nisi terminus ad quem... » (Cardan, *Opera*, t. IV, p. 112).

« Sur quoy la première chose qu'il faut remarquer est que deux joueurs qui jouent en deux parties, dont le premier en a une à point, sont en mesme condition que deux autres qui jouent en trois parties dont le premier en a deux, et l'autre une : car il y a cela de commun que pour achever, il ne manque qu'une partie au premier, et deux à l'autre : et c'est en cela que consiste la différence des avantages, et qui doit régler les partys : de sorte qu'il ne faut proprement avoir égard qu'au nombre de parties qui manquent, et non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées, puisque, comme nous avons déjà dit, deux joueurs se trouvent en mesme estat quand, jouant en deux parties, l'un en a une à point, que deux qui jouent en douze parties, l'un en a onze à dix. » (PASCAL, *G. E.*, t. III, pp. 481-482).

je donnerai 28 parties de la somme totale à celui qui a 6 jeux et, à celui qui a 3 jeux, j'en donnerai 10 parties; et ainsi je diviserai l'ensemble du dépôt en 38 parties, et celui qui a 3 perd 9/19 de son capital. »

On ne manquera pas d'être surpris au premier abord par l'intervention de cette « progression ». Il ne fait pas de doute pourtant que Cardan n'y ait vu en 1539 le moyen de résoudre rationnellement, et non par quelque compromis boiteux comme chez Tartaglia la question du partage équitable (37). Il est vrai que nous aurons quelque difficulté à comprendre la justification qu'il en donne. Mais il y a ici quelque chose de plus important que la solution elle-même : c'est le principe qui la gouverne. En une phrase — à laquelle pourtant, à notre connaissance, on n'a jamais prêté attention. Cardan énonce en toute clarté la condition essentielle que doit remplir un « parti » satisfaisant :

« Or la raison démonstrative de ce qui précède est la suivante : si la division une fois faite, le jeu recommençait à nouveau, les parties en présence devraient miser la même somme que celle qu'elles ont reçue à condition de s'arrêter de jouer » (38).

Une des objections que Cardan oppose à Pacioli nous montrera tout d'abord comment il pouvait à l'aide de sa règle dénoncer la fausseté de certaines solutions :

« Chacun doit s'approprier cette partie qu'il pourrait miser par raison d'équité à la même condition, mais celui qui a 18, jouant avec un adversaire qui a 9, peut, jouant en 19, miser 10 contre 1, ou plutôt 20 contre 1 : donc, dans le partage, il doit avoir 20 [parties de la somme totale] et l'autre seulement 1 » (39).

On remarquera que Cardan en avançant les nombres 10 et 20 n'utilise pas la solution qu'il croit être la vraie. C'est, nous

(37) Ainsi, dans le problème du Riche et du Pauvre où Cardan anticipe en quelque manière le problème de Saint-Pétersbourg, il affirme sans autre explication : « clara est responsio progressio de 4. est 10... » (*Opera*, IV, p. 112).

(38) « Ratio autem demonstrativa super hoc est quod si facta divisione iterum ludus esset inchoandus, partes haberent deponere idem quod receperunt stante conditione... » (*Ibid.*).

(39) « ... illam partem quisque debet assumere, quam æque ratione deponere posset ea conditione, sed habens 18. cum habente 9. potest eundo ad 19. deponere 10. contra 1. imo 20. contra unum : igitur in divisione debet habere 20 & ille tantum unam... » (*Opera*, IV, p. 214).

semble-t-il, que son argument est ici de nature purement polémique : si on vous propose de jouer à un jeu où il vous suffit de marquer un point, alors qu'il en faut 10 à votre adversaire pour gagner, vous seriez prêts à jouer à 10 contre un, et même, bien plutôt, à 20 contre 1. Si tel est donc le pari que vous êtes prêt à faire, c'est sur lui que doit se calquer le parti correspondant : vous devez donner en ce cas, aux joueurs qui s'arrêtent de jouer des sommes proportionnelles aux mises que vous avez acceptées en tant que parieur.

Voyons maintenant comment il applique ce raisonnement pour justifier au § 14 du chapitre 61, sa solution générale :

« Quelqu'un dit : « Je veux jouer à cette condition que tu ne puisses vaincre à moins de gagner 3 jeux de suite, et je veux être tenu pour le vainqueur si moi, je gagne 1 jeu. Et celui qui veut gagner 3 jeux mise 2 ducats; de combien doit être la mise de l'autre? Je dis qu'il mise 12 ducats. En voici en effet la raison. S'ils avaient à jouer en un jeu, il suffirait qu'il mise 2 ducats, et s'ils jouaient en 2 jeux, il devrait miser le triple : car en gagnant simplement 2 jeux, il gagnerait 4 ducats, mais il persévère en courant le risque de perdre le second jeu après avoir gagné le premier, donc il doit avoir un bénéfice triple; et s'ils jouent en 3 jeux, son bénéfice doit être sextuple, parce que la difficulté est doublée, donc il devrait miser 12 ducats. Et tout à l'heure, il a reçu 12 ducats, et l'autre 2 : donc la division a été faite de manière convenable... » (40).

Cette dernière phrase condense tout un raisonnement de façon particulièrement elliptique. Nous l'entendrons ainsi pour notre part. Cardan a affirmé plus haut, sans justification, que s'il manque un jeu à un joueur, et 3 à l'autre, lorsque les joueurs s'arrêtent de jouer, le partage doit se faire de telle sorte que le premier doit toucher une somme 6 fois plus forte que le second. Pour montrer qu'il doit bien en être ainsi, Cardan va faire un détour : il va se poser un autre problème qu'il considère comme plus facile à résoudre: Imaginons deux joueurs qui commencent à jouer : l'un

(40) « & sit in exemplo primo quod quis dicat volo ludere, hac conditione ut tu non possis vincere nisi vincas 3. sine intermissione, & si ego vinco unum volo vincere, & deponat ille qui vult vincere 3. ludos aureos 2. quantum habet deponere alius dico quod deponet 12. ratio nam si ad unum ludum haberent ludere sufficeret ponere 2. & si duos, haberet ponere triplum, ratio quia vincendo simpliciter 2. ludos vinceret 4. sed hic stat cum periculo perdendi secundum victo primo, igitur lucrari debet triplum, & si ad 3. sextuplum, quia duplicatur difficultas, igitur haberet ponere 12. & iam accepit 12. & ille 2. igitur divisio fuit convenienter facta... » (*Opera*, IV, p. 112).

aura un jeu à faire, l'autre trois; la mise de ce dernier étant connue, combien doit miser l'autre? Cardan établit que cette mise doit être 6 fois plus forte que l'autre et en conclut que le partage précédent était juste. Autrement dit, il justifie un partage au nom de ce que doivent miser « deponere » des joueurs dans un jeu équitable.

Un joueur quitte le jeu en se voyant attribuer un certain « parti »; ce parti aura été bien établi si un second joueur acceptait à bon droit de remplacer le premier pour poursuivre le jeu dans les mêmes conditions, et en misant une somme égale à celle qui avait été allouée au premier par le « parti ». Ainsi qu'avait pris soin de le formuler Pascal en tête de l'« Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partys... », si le jeu étant interrompu, chaque joueur « entre en la propriété de quelque chose », il faut que « le règlement de ce qui doit leur appartenir » soit tel que « chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne ou de continuer l'aventure du jeu : et cette juste distribution s'appelle le Party » (41).

Cette condition pourrait servir à définir un peu équitable, et elle permet également, une fois qu'on a exprimé une Règle des Partis de la transformer en une Règle des Paris. Si on connaît le juste arbitrage qui doit s'exercer au moment où un jeu s'arrête, on saura dire aussi à un joueur qui se met à jouer la mise qu'il doit mettre sur le tapis pour que le jeu auquel il va participer soit équitable.

Si nous avons tenu à évoquer ici ce texte de Pascal, ce n'est pas seulement pour souligner que Cardan, par la définition exacte qu'il donne du « Party », mérite déjà à ce titre d'être considéré comme son précurseur; c'est aussi pour mieux mettre en évidence le caractère original de sa démarche : il tente, lui, de remonter aux « partis » par le biais des paris.

Ce point de méthode, qui nous paraît fondamental, Moritz Cantor l'a complètement négligé lorsqu'il a tenté d'expliquer comment Cardan en vient à sa règle générale (42). Il commente ainsi l'exemple que nous avons précédemment cité :

(41) PASCAL, G. E., t. III, p. 478.

(42) « In dem besonderen Beispiele, von welchem Cardano redet, ist $s = 10$, $s_1 = 7$, $s_2 = 9$, der erste Spieler hätte also noch dreimal, der zweite einmal zu gewinnen. Um nun ein erstes Spiel zu gewinnen, bedarf der zweite wie der erste Spieler eines Gewinnspiels. Um ein zweites Spiel als solches zu gewinnen, sind dem ersten zwei Gewinnspiele nöthig, denn ohne einen ersten Gewinn gelangt er nicht zum zweiten. Um ein drittes Spiel als solches zu gewinnen, sind dem ersten drei Gewinnspiele

$$s = 10, \quad s_1 = 7, \quad s_2 = 9.$$

Pour gagner un premier jeu, il faut au premier comme au second joueur un succès; pour gagner un « second jeu en tant que tel », deux succès sont nécessaires au premier joueur, car sans un premier succès, il ne parvient pas au second. Pour gagner un « troisième jeu en tant que tel », il lui faudra trois succès, pour la même raison. Pour gagner le premier, le deuxième, le troisième jeu, il lui faut : $1 + 2 + 3 = 6$ succès, et le rapport selon lequel se fait le partage doit être comme 1 à 6, et dans le cas général comme :

$$[1 + 2 + 3 + \dots + (s - s_2)] \text{ à } [1 + 2 + 3 + \dots + (s - s_1)]$$

La notion de « *Spiel als solches* » qui préside à cette retranscription n'est pas assez claire pour que l'addition des nombres 1, 2, 3 de « *Gewinnspielen* » associés respectivement à différents « jeux en tant que tels » n'apparaisse pas comme assez arbitraire. Aussi ne faut-il pas s'étonner si Moritz Cantor a jugé peu heureuse la tentative de Cardan de faire mieux que Pacioli...

Mais son commentaire est peu convaincant, ne serait-ce que parce que lui échappe le style, l'esprit d'une argumentation qui ne se contente pas de comptabiliser les nombres de succès nécessaires pour parvenir au but, mais qui pèse des risques et des bénéfices possibles. C'est ici un parieur et non un pur arithméticien qui nous parle (43) : ses mots-clé sont « *lucrari* » et « *periculum* ».

Le parieur n'aurait-il pas été d'ailleurs trahi ici par l'arithméticien? Autrement dit, Cardan n'aurait-il pas aperçu la solution exacte, mais eu simplement le tort de ne pas rester fidèle à sa propre intuition? C'est le regret qu'on pourrait formuler à la suite de M. G. Kendall (qui a attribué à Peverone (44), faute de connaître les textes de Cardan, les défaillances... et les mérites de ce dernier) :

erforderlich, deren Begründung in der Nothwendigkeit liegt, überhaupt zu einem dritten Gewinne zu gelangen. Um das erste, zweite und dritte Spiel zu gewinnen, bedarf es somit $1 + 2 + 3 = 6$ Gewinnspiele und das Theilungsverhältniss der beiden Spieler muss wie $1 : 6$ sein, allgemein wie $(1 + 2 + 3 + \dots + (s - s_2)) : (1 + 2 + \dots + (s - s_1))$. » (Moritz CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, t. II, 1900, p. 502).

(43) Il en est de même de nombreux raisonnements du *De Ludo Aleæ*. Dans ses subtiles analyses, O. Ore n'a peut-être pas donné à cette perspective toute l'importance qu'elle mérite.

(44) M. G. KENDALL (« *Studies in the History of Probability and Statistics* » II, *Biometrika*, 43, 1956, p. 8) cite très élogieusement le texte de Peverone, cité plus bas.

ce serait ici un des moments de l'histoire des mathématiques où on serait passé le plus près d'une découverte importante. En effet jusqu'au second jeu, l'argument est correct. Si Primus a déjà obtenu un jeu, et mise deux ducats, alors Secundus :

ayant un jeu à faire, mise : 2 ducats

ayant deux jeux à faire, mise : $2 + 4 = 6$ ducats

ayant trois jeux à faire, mise : $2 + 4 + 8 = 14$ ducats.

Or, Peverone, poursuit M. G. Kendall (nous dirons pour notre part, Cardan), connaissait parfaitement les progressions géométriques; si, ayant fait un calcul exact pour le cas où Secundus a deux jeux à faire, « il s'en était seulement tenu à sa propre règle, et s'il avait considéré de plus près les probabilités conditionnelles de gain, il aurait résolu ce cas simple des partis, à peu près un siècle avant Fermat et Pascal » (45).

Malheureusement, on ne peut refaire l'histoire, et il convient, après avoir formulé ce regret, d'essayer de comprendre pourquoi Cardan a cru pouvoir faire fond sur ses « progressions ». Il nous faut pour cela concentrer toute notre attention sur ce § 14 du chapitre 61, dont nous avons vu que la dernière phrase nous livre le *principe* qui permet à Cardan de passer de la considération des mises à celle des partis. Il nous reste maintenant à expliquer ce qu'il dit de ces mises elles-mêmes.

Risquons-nous donc à proposer à notre tour une interprétation. Efforçons-nous tout d'abord de préciser des distinctions que certes Cardan n'a pas explicitées, et que masque l'ambiguïté du mot « *ludus* », mais qui nous permettront toutefois de suivre dans un langage assez proche du sien la marche de son raisonnement.

Primus et Secundus s'accordent avant de jouer sur un pacte, une *convention* qui fixe le montant de leurs mises respectives, et le nombre de *jeux* que chacun d'eux doit obtenir pour avoir le droit d'emporter, outre la sienne propre, la mise de son adversaire. On dira du joueur qui aura ainsi été déclaré vainqueur, qu'il a gagné la *partie* correspondante.

1) Supposons maintenant pour commencer que Primus et Secundus misent chacun un ducat, et qu'ils jouent selon cette convention, que nous appellerons c_1 , que celui qui obtient le premier un jeu, gagne la partie, et emporte le ducat de son adversaire.

2) Posons-nous ensuite le problème suivant : Secundus mise un ducat, et il gagnera la partie s'il obtient deux jeux avant que Primus n'en obtienne un. Combien doit miser Primus? Il appartient à Secundus d'exiger une somme telle que le bénéfice qu'il tirerait d'une victoire éventuelle serait dans un rapport convenable avec les conditions plus défavorables où il s'est placé au départ. Il lui faut donc définir les termes d'une nouvelle convention.

Secundus peut raisonner ainsi : « Mettons que j'obtienne effectivement deux jeux de suite :

a) Il faudra donc que Primus me donne au moins autant que si j'avais gagné deux parties, en jouant selon la convention c_1 (« *vincendo simpliciter 2 ludos* »), à savoir 2 ducats.

b) Mais cela ne me suffit pas. Car un joueur qui a gagné une partie selon la convention c_1 , conserve par devers lui, possède au sens fort, le ducat qu'il a remporté; alors que moi j'ai couru le risque de perdre le second jeu, après avoir gagné le premier (« *periculum perdendi secundum victo primo* »). Voilà donc que serait alors réduit à néant ce que je pouvais espérer de ce premier succès. Cette possibilité m'autorise à exiger une compensation en cas de victoire finale : ce ducat dont j'ai risqué la perte après avoir gagné un jeu, il doit m'être donné si je gagne effectivement le second jeu.

Primus doit donc me donner en tout : $2 + 1 = 3$ ducats. » Secundus répond par là même à la question posée : selon cette nouvelle convention c_2 , Primus qui a un jeu à faire doit miser 3 ducats, Secundus qui a deux jeux à faire misant un ducat.

3) Nouvelle supposition : Secundus qui mise toujours un ducat doit faire trois jeux avant que Primus en fasse un; quelle mise peut-il exiger de Primus? Laissons-lui à nouveau la parole : « Mettons que j'aie gagné trois jeux consécutifs. Primus doit me donner :

a) Au moins autant que si j'avais gagné trois parties jouées selon la convention c_1 : à savoir 3 ducats.

b) Une compensation que je puis réclamer en sus, car il m'était plus difficile de gagner que mon adversaire. Pour apprécier le montant d'une compensation analogue, il a fallu tout à l'heure se reporter au moment où l'avant-dernier jeu n'était pas encore joué : faisons de même ici. Imaginons qu'ayant gagné deux jeux

consécutifs, je perde le troisième. C'est ce qui pouvait m'arriver de pis : comment évaluer la perte financière que j'aurais ainsi subie? Je déclare qu'elle est équivalente au bénéfice que m'aurait apporté le gain d'une partie jouée selon la convention c_2 : j'ai en effet couru le risque de voir détruire ce que me valaient deux jeux déjà acquis. En supposant que ces jeux aient été joués selon une convention équitable, nous savons qu'ils pouvaient me rapporter trois ducats. Ce sont donc également trois ducats que Primus devra me verser comme dédommagement du péril dont j'aurais pu être victime. » La mise que doit engager Primus, selon cette convention c_3 sera de : $3 + 3 = 6$ ducats.

Tel était le seul résultat qui intéressait Cardan pour la démonstration bien déterminée qu'il voulait mener à bien. Mais si le compte rendu que nous avons essayé de donner du mouvement de sa pensée n'est pas trop infidèle, on verra aisément que les arguments que nous avons prêtés à Secundus pourraient s'ordonner selon un raisonnement par récurrence (dont nous pouvons supposer qu'il s'est réduit pour Cardan à l'énumération successive des cas correspondant aux conventions $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$, définies par le nombre de jeux que doit faire Secundus). Indiquons simplement que la convention c_n serait telle que la mise de Primus serait calculée en ajoutant les gains en ducats que ferait Secundus :

— en remportant d'une part n parties jouées selon la convention c_1 ;

— en remportant d'autre part une partie jouée selon la convention c_{n-1} .

On trouverait bien alors que les mises de Primus pour les convention $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sont données par la suite des nombres

triangulaires $1, 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots$ Passons maintenant, selon

le principe énoncé par Cardan, au problème des partis : si deux joueurs, ayant à faire un même nombre de jeux, ont misé deux sommes identiques, et que la partie s'interrompt lorsqu'il manque 1 jeu à Primus et qu'il en manque p à Secundus, le partage de la mise totale devra se faire proportionnellement aux nombres $1 + 2 + \dots + p$ et 1.

La reconstitution que nous avons proposée d'un raisonnement dont nous n'avons que les premiers maillons ne peut être sur plusieurs points qu'hypothétique; et comment traduire sinon de

manière approximative une conception du risque que nous pouvons avoir du mal à comprendre de nos jours? Mais que nous aboutissions ainsi à la « progression » même de Cardan, dans les cas où il manque 1 jeu à Primus et un nombre quelconque de jeux à Secundus, voilà qui confirme l'hypothèse que c'est bien ainsi que Cardan en est venu à faire reposer sa « ratio ludorum » sur la suite des nombres triangulaires. Quant à savoir comment il a généralisé la solution précédente au cas où il manque un nombre quelconque de jeux à Primus, aucun texte ne nous éclaire directement là-dessus.

Il est toutefois une objection qui pourrait suffire à première vue, à rendre beaucoup moins vraisemblable notre interprétation. Au point précis où se joue le sort de toute l'argumentation, Cardan semble adopter un point de vue tout à fait étranger à celui auquel nous nous sommes placés, et faire appel, pour examiner la convention c_3 , à un ordre de raisons irréductible à celui qu'il utilise pour traiter de la convention c_2 . Ne semble-t-il pas dire en effet que la « difficulté » étant deux fois plus grande, il faut que la mise de Secundus soit elle aussi multipliée par deux? (« et si ad 3. sexcuplum, quia duplicatur difficultas »). Mais les conséquences de cette interprétation seraient telles qu'il ne nous paraît pas possible de la maintenir. Si elle était vraie, il faudrait croire que dans un texte, remarquable par ailleurs pour sa fermeté et sa largeur de vue, Cardan aurait juxtaposé, à propos de deux questions analogues, deux raisonnements relevant de conceptions du « péril » tout à fait distinctes. Mais voici qui est plus grave : si l'on admettait qu'il en soit bien ainsi, on ne verrait plus comment on pourrait, en s'inspirant du raisonnement du second type, retrouver pour les conventions c_4 , c_5 ... la suite des nombres 10, 15 ... Par contre, il est très possible que l'expression « quia duplicatur difficultas » doive s'entendre en un sens qui soit en accord avec la lecture que nous avons proposée de son contexte : elle ne signifierait pas qu'il est deux fois plus difficile de gagner la partie selon la convention c_2 que de gagner la partie selon la convention c_3 , mais voudrait dire que, dans le second cas, le « péril » est redoublé : en plus du risque de perdre le second jeu après avoir gagné le premier, Secundus court le risque de perdre le troisième après avoir gagné les deux premiers. Et cela n'entraîne pas que dans l'évaluation de ce que les juristes du XVI^e siècle appelaient le « pretium periculi ». Il s'agit d'un risque « redoublé », donc d'une addition de risques,

et non d'une multiplication. Mais il se trouve, pour l'embarras de ceux qui doivent comprendre Cardan à demi-mot, que 6 est égal à la fois à $3 + 3$ et à 2×3 . Cardan a bien conduit selon nous son calcul en additionnant des ducats, et il ne fait qu'exprimer ce résultat, là où son « quia » pourrait donner lieu de croire qu'il explique que la mise doit être double.

En définitive, ce qu'il y a de plus original dans le coup d'œil de mathématicien que ce joueur invétéré jeta sur le problème de Pacioli, c'est ce qu'on y a le moins remarqué : il a cherché à engendrer par « raisons démonstratives » la loi selon laquelle s'enchaînaient les partis successifs. Il s'est trompé, mais son erreur était bien conduite.

PEVERONE

Dans ses *Due brevi e facili trattati...* de 1558 (46), Peverone a tout bonnement traduit en italien, sans y rien ajouter, et sans citer sa source, les deux exemples donnés par Cardan dans son chapitre 61. Par contre, il a supprimé une phrase, qui, par malheur, était la plus importante : celle où Cardan formulait le fondement de sa méthode (*Ratio autem demonstrativa...*). En se bornant à juxtaposer les deux problèmes, et en présentant le second comme un « autre exemple », Peverone laisse voir qu'il n'a sans doute pas compris ce qu'il y avait de meilleur dans le texte qu'il copiait.

CONCLUSION

Pour qui attache surtout du prix à la clarté des notions et à l'exactitude des solutions, la moisson pourra paraître en définitive bien maigre. Mais si, comme c'était notre propos, l'on accepte de prendre pour point de perspective d'une vue récurrente non pas la

(46) Gio. Francesco PEVERONE, *Due brevi e facili trattati, il primo d'arithmetica, l'altro di geometria, ne i quali si contengono alcune cose nuove, piacevoli e utili si a gentiluomini come artigiani* del Sig. Gio. Francesco Peverone di Caneo. — In Lione, per G. di Tournes, 1558.

Ainsi que le remarque D. E. SMITH (*Rara Arithmetica*, p. 290) ce livre « n'est en aucun sens une production savante ».

Libri l'avait signalé à propos des « questions de probabilité » traitées par Tartaglia : « On trouve aussi quelques problèmes du même genre dans l'arithmétique de Peverone, mais ils sont mal résolus ».

(*Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Paris, J. Renouard, 1840; tome troisième, p. 159, note 1).

« méthode des combinaisons », mais la méthode proprement pascalienne, n'est-il pas vrai que dans ces ébauches celle-ci trouve son véritable passé? Par sa rigueur, elle les dépasse de très loin, ne serait-ce que par le soin avec lequel elle s'attache tout d'abord aux cas les plus élémentaires; mais c'est selon le même esprit qu'elle comptabilise pertes et avantages. Pascal parvient à rassembler dans une synthèse audacieuse les notions de propriété, d'aventure du jeu, et de juste distribution; ses prédécesseurs qui parlaient le même langage, ont exploré chacun, sans bien sûr aller bien loin, des aspects différents de la solution; ou plutôt, ils ont mis chacun l'accent sur telle ou telle difficulté du problème des partis.

Pour répondre à notre question première, c'est de manière en quelque sorte négative, de par les résistances qu'il a opposées à leurs méthodes familières, qu'ils en ont pressenti le caractère spécifique. Une des réactions possibles (qui, à des occasions semblables, s'est répétée très souvent), était, comme fait Tartaglia, de le récuser comme n'étant pas du ressort des mathématiques (47). Si par contre, le mathématicien se faisait fort de donner la réponse, il devait s'aviser que la règle d'or de la justice distributrice est ici prise en défaut. Il est toutefois curieux que la difficulté n'ait pas été ressentie là où un esprit moderne serait porté à croire qu'elle se trouve : dans l'intervention de la « fortune ». Certes, Forestani la dépeint capricieuse et imprévisible, mais c'est pour mieux justifier une règle de partage.

Quant à Cardan, aussi bien par le style de ses raisonnements que par la netteté de ses principes, il mérite bien, selon nous, le titre de précurseur de Pascal.

Ernest COUMET
*Centre National
de la Recherche Scientifique, Paris*

(47) Aussi est-il possible que sa mise en forme mathématique ait été favorisée par une évolution conceptuelle qui se serait faite en dehors des mathématiques proprement dites. C'est ce que nous voudrions vérifier dans les recherches que nous avons entreprises en liaison avec les Centres d'Histoire des Sciences et de Mathématique Sociale de la VI^e Section de l'École Pratique des Hautes Études. Ces recherches concernent l'évolution du statut théologique des jeux de hasard, sur l'affinement progressif de notions telles que le « pretium periculi », à travers la transformation des méthodes commerciales et les spéculations des juristes au XVI^e siècle.