Journal of Lie Theory
Volume **11** (2001) 81–109

Invariante Differentialoperatoren und die Frobenius-Zerlegung einer G-Varietät

Ilka Agricola*

Communicated by K.-H. Neeb

Zusammenfassung. Sei G eine zusammenhängende reduktive komplexe algebraische Gruppe, die auf einer glatten affinen komplexen Varietät M wirke, und bezeichne $\mathcal{D}^G(M)$ die G-invarianten algebraischen Differentialoperatoren auf M. Zerlegt man den Koordinatenring $\mathbf{C}[M]$ in G-isotypische Komponenten, so zeigen wir, daß die hierbei auftretenden Vielfachheitenräume irreduzible, paarweise nicht äquivalente $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln sind, zentralen Charakter haben und durch diesen eindeutig bestimmt sind. Als Anwendung beweisen wir, daß die G-Wirkung auf M genau dann vielfachheitenfrei ist, wenn der Quotient der Momentabbildung endlich ist. Anschließend beschreiben wir die analoge Zerlegung für reelle Formen und zeigen anhand einiger singulärer Beispiele, daß für singuläre Varietäten ähnliche Ergebnisse nicht zu erwarten sind.

1. Die algebraischen Differentialoperatoren

Betrachte eine komplexe reduktive zusammenhängende algebraische Gruppe G, die auf einer ebenfalls komplexen irreduziblen affinen glatten Varietät M regulär wirke. Mittels Translationen operiert G dann auch auf dem Koordinatenring $\mathbf{C}[M]$

$$\varrho(g)f(m) \;=\; f(g^{-1}m) \quad \text{für} \quad f \in \mathbf{C}[M],\ g \in G\,,$$

und es ist wohlbekannt, daß diese G-Wirkung lokal-endlich ist, d.h. daß jeder endlich-dimensionale Unterraum von $\mathbf{C}[M]$ in einem endlich-dimensionalen G-invarianten Teilraum von $\mathbf{C}[M]$ enthalten ist. Mit diesem Beispiel vor Augen vereinbaren wir folgende

Definition 1.1. Mit einem Vektorraum L meinen wir immer einen $\mathbf{C}$-Vektorraum abzählbarer Dimension. Ein solcher wird *halbeinfacher G-Modul* genannt, wenn er unter G lokal-endlich und vollständig reduzibel ist.

Mit L trägt auch $\mathrm{End}(L)$ eine Wirkung von G; das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß die Eigenschaft, halbeinfacher G-Modul zu sein, sich i.a. nicht von L auf $\mathrm{End}(L)$ überträgt. Wir beschränken uns deswegen auf solche Unteralgebren $\mathcal{A}$

*Diese Arbeit wurde gefördert vom SFB 288 „Differentialgeometrie und Quantenphysik" der DFG.

ISSN 0949–5932 / $2.50

von $\mathrm{End}(L)$, die unter der induzierten G-Wirkung halbeinfach im eben genannten Sinne sind, und werden in Kürze sehen, daß im Fall $L = \mathbf{C}[M]$ die algebraischen Differentialoperatoren $\mathcal{D}(M)$ diese Eigenschaft haben.

Beispiel 1.2. Wir wählen $L = \mathbf{C}[x]$ den Polynomring in einer Variablen mit der multiplikativen Wirkung von $\mathbf{C}^*$ im Argument. Auf L wird durch

$$1 \longmapsto 1, \quad x \longmapsto x^2, \quad x^2 \longmapsto x^3 + x^4, \quad \ldots, \quad x^n \longmapsto x^{n+1} + \ldots + x^{2n}$$

eine lineare Abbildung T definiert, und das Monom x^n transformiert sich unter $T_\lambda := \varrho(\lambda) T \varrho(\lambda)^{-1}$ wie

$$T_\lambda x^n \;=\; \lambda x^{n+1} + \lambda^2 x^{n+2} + \ldots + \lambda^n x^{2n}, \quad n \neq 0\,.$$

Sei $\mathcal{B}$ die von den T_λ, $\lambda \in \mathbf{C}^*$, erzeugte Unteralgebra von $\mathrm{End}(L)$. Nach Konstruktion trägt sie die von $\mathbf{C}[x]$ induzierte $\mathbf{C}^*$-Wirkung, für die $\varrho(\lambda) T_\mu \varrho(\lambda)^{-1} = T_{\lambda\mu}$ gilt. Leicht sieht man ein, daß die T_λ linear unabhängig sind; insbesondere ist $\mathcal{B}$ unter der Wirkung von $\mathbf{C}^*$ nicht lokal-endlich.

Zu den „algebraischen" Differentialoperatoren einer affinen Varietät M gibt es mehrere verschiedene Zugänge: über den Grad als Differentialoperator, über die algebraischen Differentialoperatoren $\mathcal{D}(V)$ des umgebenden Vektorraums V, welche man einfach als die Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten definiert, über die Derivationen von M oder aber über die Symbolabbildung. Diese Definitionen gelten meist – entsprechend angepaßt – auch für Varietäten mit Singularitäten, doch liefern sie nur im glatten Fall alle dieselbe Algebra. Einige dieser verschiedenen Bilder wollen wir kurz skizzieren; für Beweise sei auf die ausführliche Beschreibung in dem Lehrbuch [11] verwiesen.

Sei zunächst M eine nicht notwendigerweise glatte, aber irreduzible reelle oder komplexe affine Varietät, und $\mathcal{A}$ entweder ihr Koordinatenring $\mathbf{K}[M]$ oder dessen Quotientenkörper $\mathbf{K}(M)$. Wir definieren die algebraischen Differentialoperatoren von $\mathcal{A}$ als diejenige filtrierte Algebra, die als die Vereinigung über k aller „Endomorphismen vom Grad $\leq k$" entsteht, also

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A})_0 &:= \{T \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}) \mid \forall f \in \mathcal{A}:\; Tf - fT = 0\}\,,\\
\mathcal{D}(\mathcal{A})_k &:= \{T \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}) \mid \forall f \in \mathcal{A}:\; Tf - fT \in \mathcal{D}(M)_{k-1}\}\,,
\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \;:=\; \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}(\mathcal{A})_k\,. \tag{1}$$

Insbesondere sind die Endomorphismen vom Grad Null genau die Elemente von $\mathcal{A}$ und diejenigen vom Grad Eins, die die Konstanten annulieren, deren Derivationen (vgl. [11, Lemma 15.5.3])

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})_0 \;=\; \mathcal{A}, \quad \mathrm{Der}\,\mathcal{A} \;=\; \{D \in \mathcal{D}(\mathcal{A})_1 \mid D(1) = 0\}\,.$$

Dabei verstehen wir ganz allgemein unter den Derivationen $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ diejenigen $\mathbf{K}$-linearen Abbildungen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}$, die die Leibniz-Regel erfüllen. Für uns von Interesse ist die Klasse von Operatoren, die für $\mathcal{A} = \mathbf{K}[M]$ ensteht. Wir werden diese kurzerhand die *algebraischen Differentialoperatoren von M* nennen und vereinbaren die Bezeichnungen

$$\mathcal{D}(M) \;:=\; \mathcal{D}(\mathbf{K}[M]), \quad \operatorname{Der} M \;:=\; \operatorname{Der}\mathbf{K}[M]\,.$$

Der Fall $\mathcal{A} = \mathbf{K}(M)$ wurde hier nur deswegen mitdefiniert, weil wir ihn zur Formulierung des nun folgenden Kriteriums brauchen, mit dem man entscheiden kann, wann ein vorgegebener Differentialoperator algebraisch ist.

Lemma 1.3. (Erste Charakterisierung von $\mathcal{D}(M)$ [11, Thms. 15.1.24, 15.5.5])
Sei M eine affine irreduzible Varietät. Dann gilt:

1. $\operatorname{Der} M = \{D \in \operatorname{Der}\mathbf{K}(M) \mid D(\mathbf{K}[M]) \subset \mathbf{K}[M]\}$;
2. $\mathcal{D}(M) = \{D \in \mathcal{D}(\mathbf{K}(M)) \mid D(\mathbf{K}[M]) \subset \mathbf{K}[M]\}$. ■

Sei andererseits $\mathcal{D}(M)^*$ die von $\mathbf{K}[M]$ und allen ihren Derivationen $\operatorname{Der} M$ erzeugte Algebra, filtriert nach der Anzahl Derivationen, deren Produkt man nimmt. Sie ist immer eine Unteralgebra von $\mathcal{D}(M)$, und ihre natürliche Graduierung stimmt mit der von $\mathcal{D}(M)$ induzierten überein. Weiterhin induziert die faserweise Skalarmultiplikation eine Graduierung auf dem Koordinatenring $\mathbf{K}[T^*M] = \bigoplus_n \mathbf{K}[T^*M]^n$ des Kotangentialbündels von M. Wie dies aus der Theorie der Differentialoperatoren über Mannigfaltigkeiten zu erwarten ist, stellt das Hauptsymbol eine Bijektion zwischen den genannten graduierten Ringen her, welche wir nun definieren wollen. Sei hierzu $(m,\xi) \in T^*M$, und $g \in \mathbf{K}[M]$ eine Funktion mit $dg(m) = \xi$. Dann ist das Hauptsymbol des algebraischen Differentialoperators D vom Grad k gegeben durch

$$\sigma_k(D)(m,\xi) \;=\; D\left((g - g(m))^k/k!\right)(m)\,.$$

Lemma 1.4. (Zweite Charakterisierung von $\mathcal{D}(M)$)
Sei M eine glatte irreduzible affine Varietät. Dann ist die Symbolabbildung ein Algebrenisomorphismus

$$\operatorname{gr}\mathcal{D}(M)^* \;\cong\; \mathbf{K}[T^*M]$$

und es gilt $\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M)^*$.

Beweis. Dies folgt letztlich aus der Exaktheit der Sequenz (vgl. [11, Prop. 15.4.9])

$$0 \;\longrightarrow\; \mathcal{D}(M)_{k-1} \longrightarrow \mathcal{D}(M)_k \xrightarrow{\sigma_k} \mathbf{K}[T^*M]^k \longrightarrow\; 0\,,$$

deren Beweis auf der Existenz einer geeigneten Globalisierung beruht. Mit einem analogen Argument beweist man die zweite Behauptung [11, Cor.15.5.6.]. ■

Bemerkung 1.5. Falls die Varietät M singuläre Punkte hat, so stimmen die Algebren $\mathcal{D}(M)$ und $\mathcal{D}(M)^*$ im allgemeinen nicht überein, und es wird außerordentlich schwierig, über $\mathcal{D}(M)$ irgendwelche Aussagen zu machen. Beispiele hierzu werden wir ausführlich bei der Diskussion der Frobenius-Zerlegung für singuläre Varietäten behandeln.

Den ersten Schritt für das Studium der G-Wirkung auf den Differentialoperatoren von M bildet der nun folgende Satz, der unabhängig von der Wahl des Grundkörpers gilt.

Satz 1.6. (Einfachheit von $\mathcal{D}(M)^*$ [11, Thm. 15.3.8])
Folgende Bedingungen sind äquivalent:

1. *Die Varietät M ist glatt;*
2. *Die Algebra $\mathcal{D}(M)^*$ ist einfach;*
3. $\mathbf{K}[M]$ *ist ein irreduzibler $\mathcal{D}(M)^*$-Modul.* ■

Ist nun M im Fall $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ eine G-Varietät, so wird die Wirkung von G auf $\mathcal{D}(M)$ definiert via

$$g \cdot T \;=\; \varrho(g) T \varrho(g)^{-1} \;\text{ für } g \in G,\; T \in \mathcal{D}(M), \tag{2}$$

wobei ϱ die G-Translation auf $\mathbf{C}[M]$ bezeichnet. Bezüglich dieser Wirkung ist die Symbolabbildung G-äquivariant; somit ist die Wirkung von G auf $\mathcal{D}(M)$ wieder lokal G-endlich. Die G-invarianten Differentialoperatoren werden mit $\mathcal{D}^G(M)$ bezeichnet und enthalten die G-invarianten Funktionen $\mathbf{C}[M]^G$. Weil sowohl die Filtrierung nach dem Grad von $\mathcal{D}(M)$ als auch die Graduierung von $\mathbf{C}[T^*M]$ G-stabil sind und $\mathbf{C}[T^*M]^G$ unter G lokal-endlich ist, gilt das Analogon von Lemma 1.4:

Lemma 1.7. (Charakterisierung von $\mathcal{D}^G(M)$)
Sei M eine komplexe glatte irreduzible affine Varietät, auf der die komplexe reduktive zusammenhängende algebraischen Gruppe G wirke. Dann ist

$$\operatorname{gr} \mathcal{D}^G(M) \;\cong\; \mathbf{C}[T^*M]^G . \qquad ■$$

Beispiel 1.8. Ist $M = G$ mit der linksregulären Wirkung von G auf sich selbst und identifiziert man wie üblich $\mathfrak{g}$ mit den linksinvarianten Vektorfeldern, so ist $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$, also $\mathbf{C}[T^*G] \cong \mathbf{C}[G] \otimes \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$. Da es auf G keine nichttrivialen G-invarianten Funktionen gibt, andererseits alle Elemente aus der symmetrischen Algebra $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$ von $\mathfrak{g}$ unter G invariant sind, ist $\operatorname{gr} \mathcal{D}^G(G) \cong \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$; bekannterweise ist dies als graduierte Algebra isomorph zur universellen Einhüllenden $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, die uns als Algebra der G-invarianten Differentialoperatoren auf G wohlvertraut ist. Andererseits weicht die Struktur von $\mathcal{D}(M)$ (oder $\mathcal{D}^G(M)$) im Detail doch sehr von der einer universellen Einhüllenden ab; denn wenn $\mathcal{D}(M)$ (bzw. $\mathcal{D}^G(M)$) als filtrierte Algebra zur einhüllenden Algebra einer Lie-Agebra $\mathfrak{k}$ isomorph ist, dann muß $\mathbf{C}[T^*M]$ (resp. $\mathbf{C}[T^*M]^G$) deren symmetrische Algebra $\mathbf{C}[\mathfrak{k}^*]$ sein, also auf jeden Fall ein Polynomring. Dies ist im allgemeinen sicher nicht der Fall, wenn M kein Vektorraum oder T^*M kein triviales Bündel ist.

Beim Studium der Unteralgebren der Endomorphismen halbeinfacher G-Moduln benötigt man immer wieder folgende, Dixmier zugeschriebene Variante des Schurschen Lemmas für Vektorräume abzählbarer Dimension. Vorher allerdings noch eine Vereinbarung:

Definition 1.9. Es sei fortan und bis zum Ende von Abschnitt 4 der Grundkörper gleich $\mathbf{C}$, auch wenn dies nicht immer erwähnt wird.

Lemma 1.10. (Lemma von Dixmier)
Sei V ein Vektorraum.

1. *Zu jedem $T \in \mathrm{End}(V)$ existiert ein $q \in \mathbf{C}$ so, daß $T - qI$ nicht invertierbar ist;*

2. *Ist $\mathcal{A}$ eine Teilalgebra von $\mathrm{End}(V)$, die auf V irreduzibel wirkt, so ist $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(V) = \mathbf{C}$.*

Beweis. Die erste Behauptung findet sich in [19, S.11]. Für die zweite sei $Z \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(V)$ und $q \in \mathbf{C}$ derart, daß $Z - qI$ nicht invertierbar ist, d.h. es ist entweder $\ker(Z - qI) \neq \{0\}$ oder $\mathrm{im}(Z - qI) \neq V$. Weil aber Z mit allen Elementen aus $\mathcal{A}$ vertauscht, müssen $\ker(Z - qI)$ und $\mathrm{im}(Z - qI)$ beide $\mathcal{A}$-invariant sein; aus der Irreduzibilität von V folgt damit, daß entweder $\ker(Z - qI) = V$ oder $\mathrm{im}(Z - qI) = \{0\}$ sein muß. In beiden Fällen folgt $Z = qI$ auf ganz V. ■

Beispiel 1.11. Sei V halbeinfacher G-Modul. Man sagt, daß V *zentralen Charakter* hat, wenn jedes Element z im Zentrum $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ der universellen Einhüllenden von G skalar wirkt. Unter Verwendung des Harish-Chandra-Homomorphismus $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cong \mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ ist z.B. für die endlich-dimensionale G-Darstellung V^λ vom höchsten Gewicht λ der zentrale Charakter gleich $\lambda + \varrho$, wobei ϱ die Hälfte der positiven Wurzeln von G sei.

Definition 1.12. Aus dem Lemma von Dixmier folgt nun, daß für einen irreduziblen $\mathcal{A}$-Modul U, $\mathcal{A}$ wieder eine Unteralgebra von $\mathrm{End}(U)$, das Zentrum von $\mathcal{A}$ auf U skalar wirkt, genauer, es existiert ein Homomorphismus $\chi : \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}$ mit

$$Z \cdot u = \chi(Z) \cdot u \quad \forall u \in U,$$

den wir den *zentralen Charakter* von $\mathcal{A}$ auf U nennen. Der Einfachheit halber werden wir das Zentrum von $\mathcal{D}^G(M)$ kurz $\mathcal{Z}(M)$ schreiben.

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir das Zusammenspiel der algebraischen Differentialoperatoren mit den Endomorphismen von $\mathbf{C}[M]$, als deren Teilalgebra sie definiert waren, noch präzisieren. Zusammen mit Satz 1.6 folgt nämlich:

Lemma 1.13. (Schursches Lemma)
Ist M eine glatte irreduzible affine Varietät, so gilt $\mathrm{End}_{\mathcal{D}(M)}(\mathbf{C}[M]) = \mathbf{C}$. ■

Intuitiv bedeutet dies, daß $\mathcal{D}(M)$ von $\mathrm{End}(\mathbf{C}[M])$ nicht allzu sehr abweichen kann. Auch diese Aussage läßt sich mit einem allgemeinem Satz genauer fassen, den wir deswegen zuerst in der für uns relevanten Fassung zitieren wollen.

Satz 1.14. (Dichtheitssatz von Jacobson [13, Thm, Ch.12, 2])
Sei L ein Vektorraum und $\mathcal{A}$ eine Teilalgebra von $\mathrm{End}(L)$, die auf L irreduzibel wirkt. Sind $u_1, \ldots, u_n$ linear unabhängige Elemente und $v_1, \ldots, v_n$ beliebige Elemente von L, so existiert ein $T \in \mathcal{A}$ derart, daß $Tu_i = v_i$ für alle i gilt. Das bedeutet: ist X ein endlich-dimensionaler Unterraum von V, so gilt

$$\mathcal{A}|_X = \mathrm{Hom}(X, L).$$

Insbesondere folgt also mit Satz 1.6, daß

$$\mathcal{D}(M)|_X = \mathrm{Hom}(X, \mathbf{C}[M])$$

für jede irreduzible glatte affine Varietät M ist. ∎

Satz 1.15. *Sei G eine reduktive algebraische Gruppe, L ein halbeinfacher G-Modul, und $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathrm{End}(L)$, die auf L irreduzibel wirkt und bezüglich der induzierten G-Wirkung auf $\mathcal{A}$ ebenfalls halbeinfach ist. Sei weiterhin X ein endlich-dimensionaler G-invarianter Unterraum von L. Dann gilt für die Algebra $\mathcal{A}^G$ der G-Invarianten von $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{A}^G|_X = \mathrm{Hom}_G(X, L);$$

insbesondere ist also

$$\mathcal{D}^G(M)|_X = \mathrm{Hom}_G(X, \mathbf{C}[M])$$

für eine irreduzible glatte Varietät M.

Beweis. Sei $T \in \mathrm{Hom}_G(X, L)$. Nach Satz 1.14 existiert zunächst ein $D \in \mathcal{A}$ mit $D|_X = T$. Nach Voraussetzung liegt D in einem endlich-dimensionalen G-invarianten Unterraum E von $\mathcal{A}$. Wegen der Reduktivität von G zerfällt E in G-invariante Teilräume $E = E^G \oplus F$; weil T zudem G-invariant war, ist $T \in E^G|_X$, es muß also ein $\tilde{D} \in E^G \subset \mathcal{D}^G(M)$ mit $\tilde{D}|_X = T$ geben.

Für den Fall $L = \mathbf{C}[M]$ und $\mathcal{A} = \mathcal{D}(M)$ verbleibt deswegen bloß, die Voraussetzungen des Satzes zu überprüfen. Es sind $\mathbf{C}[M]$ und $\mathcal{D}(M)$, mittels Lemma 1.7 mit $\mathbf{C}[T^*M]$ identifiziert, lokal-endlich bzgl. der Wirkung von G. Satz 1.6 stellt sicher, daß $\mathcal{D}(M)$ auf $\mathbf{C}[M]$ irreduzibel wirkt. ∎

2. Die abstrakte Frobenius-Zerlegung

Es bezeichne $B = HN$ eine Boreluntergruppe (H eine Cartanuntergruppe, N das unipotente Radikal von B) und $\widehat{G} = \{(V^\lambda, \pi_\lambda)\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen endlich-dimensionaler irreduzibler Darstellungen von G, die wir stillschweigend den dominanten Gewichten $\lambda \in P_+(G)$ gleichsetzen werden. Ist $\mu \in P(G)$ ein beliebiges Gewicht von G, dann bezeichnen wir den zugehörigen Charakter von H mit h^μ und erweitern ihn zu einem Charakter von B mittels $(hn)^\mu := h^\mu$ ($h \in H$, $n \in N$). Ist nun L ein halbeinfacher G-Modul, so werden die N-invarianten Vektoren vom Gewicht μ definiert als

$$L^N(\mu) = \{f \in L \mid \varrho(b)f = b^\mu f \quad \forall\, b \in B\}.$$

Wenn $\mu = \lambda$ dominant ist, sind diese isomorph (als Vektorraum) zu den G-invarianten Morphismen von V^λ, dem irreduziblen Modul zum höchsten Gewicht λ, nach L

$$L^N(\lambda) \cong \mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L),$$

wie man durch Auswertung auf einem Vektor vom höchsten Gewicht λ leicht einsieht. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi_\lambda : \mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L) \otimes V^\lambda \longmapsto L, \quad \varphi_\lambda(T \otimes v) := T(v),$$

die die Eigenschaft hat, G-äquivariant zu sein, wenn man

$$g \cdot (T \otimes v) \ := \ T \otimes \pi_\lambda(g) v$$

setzt. Für eine Teilalgebra $\mathcal{A}$ von $\mathrm{End}(L)$ wird die Wirkung von $D \in \mathcal{A}$ auf $T \in \mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L)$ mittels Komposition definiert, $D(T) = D \circ T$, und diese Definition impliziert, daß $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L)$ auf jeden Fall $\mathcal{A}^G$-invariant ist; denn erfüllt T die Bedingung $T(\pi_\lambda(g)v) = \pi_\lambda(g)T(v)$, so folgt unmittelbar für ein $D \in \mathcal{A}^G$

$$(D \circ L)(\pi_\lambda(g)v) \ = \ D(L(\pi_\lambda(g)v)) \ = \ \pi_\lambda(g)D(L(v)) \ = \ \pi_\lambda(g)(D \circ L)(v)\,.$$

Die Menge

$$\mathcal{S}(L) \ := \ \{\lambda \in P_+(G) \mid L^N(\lambda) \neq 0\},$$

wird das *Spektrum* von G auf L genannt. Ist nun $L = \mathbf{C}[M]$ der Koordinatenring einer irreduziblen affinen G-Varietät, so schreibt man der Kürze halber $\mathcal{S}(M)$ statt $\mathcal{S}(\mathbf{C}[M])$ und kann hierüber noch folgende Aussagen machen: weil unter der punktweisen Multiplikation von Funktionen

$$\mathbf{C}[M]^N(\lambda) \cdot \mathbf{C}[M]^N(\mu) \ \subset \ \mathbf{C}[M]^N(\lambda + \mu)$$

gilt, ist $\mathcal{S}(M)$ eine additive Halbgruppe, und mittels des Satzes von Rosenlicht zeigt man, daß sie als solche immer endlich erzeugt ist. Weil $\mathbf{C}[M]^N(0) = \mathbf{C}[M]^G$ gilt und jeder der Räume $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ über $\mathbf{C}[M]^G$ endlich erzeugt ist, sind erstere genau dann endlich-dimensional, wenn $\mathbf{C}[M]^G = \mathbf{C}$ ist, es auf M neben den konstanten also keine weiteren G-invarianten Funktionen gibt (vgl. [10]).

Bemerkung 2.1. Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von N. Wallach (vgl. [20, Prop.1.5], sowie die Darstellung in [6, Thm.4.5.12]), welches den Fall eines Vektorraums behandelt. Der wesentliche Unterschied liegt in der Tatsache, daß die Graduierung der Polynome und Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten nicht mehr gebraucht wird. Eine Ankündigung dieses Ergebnisses ist zudem implizit und ohne Beweis in [2, S.219] enthalten.

Satz 2.2. (Abstrakte Frobenius-Zerlegung)
Sei G eine zusammenhängende komplexe reduktive algebraische Gruppe, L ein halbeinfacher G-Modul, und $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathrm{End}(L)$*, die auf L irreduzibel wirkt und bezüglich der induzierten G-Wirkung ebenfalls halbeinfach ist. Dann zerfällt L als G-Modul in*

$$L \ \cong \ \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} \mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L) \otimes V^\lambda,$$

und es gilt:

1. $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L) \cong L^N(\lambda)$ *ist ein irreduzibler $\mathcal{A}^G$-Modul;*
2. *Für $\lambda \neq \mu$ sind die* $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L)$ *als $\mathcal{A}^G$-Moduln paarweise nicht isomorph;*
3. *Die Räume* $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L) \cong L^N(\lambda)$ *haben, aufgefaßt als $\mathcal{A}^G$-Moduln, zentralen Charakter.*

Korollar 2.3. (Frobenius-Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$)
Es sei G eine zusammenhängende komplexe algebraische reduktive Gruppe, die auf der glatten affinen irreduziblen Varietät M wirkt. Dann zerlegt sich der Koordinatenring von M als G-Modul in

$$\mathbf{C}[M] \;\cong\; \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} \mathrm{Hom}_G(V^\lambda,\mathbf{C}[M])\otimes V^\lambda,$$

und es gilt:

1. $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda,\mathbf{C}[M]) \cong \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ *ist ein irreduzibler $\mathcal{D}^G(M)$-Modul;*
2. *Für $\lambda\neq\mu$ sind die $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda,\mathbf{C}[M])$ als $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln paarweise nicht isomorph;*
3. *Die Räume $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda,\mathbf{C}[M]) \cong \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ haben, aufgefaßt als $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln, zentralen Charakter.*

Beweis. Die Zerlegung an sich ist ein Standard-Ergebnis und kann z.B. in [6, Thm.12.1.3] nachgelesen werden. Für die eigentlichen Behauptungen verfahren wir wie folgt:

1. Sei X^λ ein zu V^λ isomorpher Unterraum von L sowie $\varphi\neq 0$ und ψ zwei G-Homomorphismen von X^λ nach L. Nach dem Dichtheitssatz von Jacobson (Satz 1.14 und 1.15) existiert ein Operator $D\in\mathcal{A}^G$ mit $D\varphi=\psi$. Folglich erzeugt jedes Element von $\mathrm{Hom}_G(X^\lambda,L)$ diesen als $\mathcal{A}^G$-Modul, ist also irreduzibel.

2. Es bezeichne L_λ bzw. L_μ die vollständige isotypische Komponente von L zum Gewicht λ bzw. $\mu\in\mathcal{S}(L)$, und U_λ bzw. U_μ einen zu $L^N(\lambda)$ bzw. $L^N(\mu)$ isomorphen $\mathcal{A}^G$-Modul darin. Angenommen, es existiert ein $\mathcal{A}^G$-Modul-Isomorphismus
$$Q:\; U_\lambda\longrightarrow U_\mu\,.$$
Nach 1. können wir ein $f\in L_\lambda$ wählen, welches U_λ erzeugt, also $\mathcal{A}^G\cdot f=U_\lambda$. Wir betrachten den minimalen G-invarianten Teilraum E von L, der f und Qf enthält. Die Projektion $\pi: E\mapsto L_\lambda$ vertauscht mit G, ist also ein Element von $\mathrm{Hom}_G(E,L)$; damit existiert ein G-invarianter Operator $D\in\mathcal{A}^G$, der π auf E darstellt, $D|_E=\pi$, und es ergibt sich
$$\pi Qf \;=\; DQf \;=\; QDf \;=\; Q\pi f \;=\; Qf\,,$$
es ist also $Qf\in L_\lambda$, und damit $V^\lambda=V^\mu$, was mit der Gleichheit der Charaktere λ und μ gleichbedeutend ist.

3. Die Existenz eines zentralen Charakters für die $\mathcal{A}^G$-Moduln $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda,L)$, folgt nun sofort aus 1. und dem Lemma von Dixmier (Lemma 1.10), da sie – als $\mathcal{A}^G$-invariante Unterräume von L – von abzählbarer Dimension sind.

∎

Ein intensiv studierter Spezialfall ist der, wo alle Vielfachheiten gleich Eins sind (M wird dann *sphärisch* genannt), und der folgende Satz von Vinberg und Kimel'fel'd liefert ein elegantes Kriterien um zu testen, ob dieser Fall vorliegt:

Satz 2.4. (Vielfachheitenfreie Wirkungen)
Ist G eine zusammenhängende komplexe algebraische reduktive Gruppe mit Borelunterguppe $B = HN$ und M eine affine G-Varietät, so sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. $\mathbf{C}[M]$ *ist vielfachheitenfrei, d.h.* $\dim \mathbf{C}[M]^N(\lambda) = 1$ *für alle* $\lambda \in \mathcal{S}(M)$*;*
2. B *hat einen offenen Orbit in* M*;*
3. *Jede rationale B-invariante Funktion auf M ist konstant:* $\mathbf{C}(M)^B = \mathbf{C}$.

Beweis. Die Äquivalenz von 1. und 2. ist Satz 2 aus der klassischen Arbeit von Vinberg-Kimel'fel'd [18]; man kann die Gleichwertigkeit der drei Bedingungen aber auch in [10, Satz 1, III.3.6, S.199] nachlesen. ■

Satz 2.5. (Glatte vielfachheitenfreie Wirkungen und Differentialoperatoren)
Die Wirkung einer zusammenhängenden komplexen algebraischen reduktiven Gruppe G auf einer glatten affinen G-Varietät M ist genau dann vielfachheitenfrei, wenn die Algebra der G-invarianten Differentialoperatoren $\mathcal{D}^G(M)$ kommutativ ist.

Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß der Vielfachheitenraum ein irreduzibler $\mathcal{D}^G(M)$-Modul ist: ist $\mathcal{D}^G(M)$ abelsch, dann kann es nur eindimensionale irreduzible Darstellungen geben. Sind andererseits alle Vielfachheiten gleichs Eins, dann muß ein beliebiges $D \in \mathcal{D}^G(M)$ mittels Skalarmultiplikation auf den einzelnen Summanden der Zerlegung wirken, und zwei solche kommutieren natürlich. ■

Bemerkung 2.6. Dieser Sachverhalt war bereits in vielen Spezialfällen bekannt, etwa für Vektorräume (vgl. [7], wo $\mathcal{D}^G(M)$ für vielfachheitenfreie irreduzible Darstellungen ausgearbeitet ist) oder für homogene Räume. Im singulären Fall hängt die Antwort davon ab, ob man $\mathcal{D}(M)$ oder $\mathcal{D}(M)^*$ betrachtet; allgemeine Ausssagen lassen sich hier nicht beweisen, doch stellen wir in Abschnitt 6 einige Beispiele vor, die beweisen, daß die vorangegangene Behauptung für $\mathcal{D}(M)^*$ falsch ist.

Beispiel 2.7. Wir betrachten den klassischen Fall $M = G$ mit der linksregulären Wirkung, auf den sich der aller homogenen G-Räume reduzieren läßt. Sei V^π Darstellung von G und V^μ Darstellung einer Untergruppe H. Aus der Frobenius-Reziprozität für die induzierte bzw. eingeschränkte Darstellung von μ und π

$$\mathrm{Hom}_G(V^\pi, \mathrm{Ind}\,^G_H(\mu)) \;=\; \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}\,^G_H(\pi), V^\mu)$$

folgt für die triviale Darstellung $\mu = \mathrm{id}$ von $H = \{e\}$

$$\mathrm{Hom}_G(V^\pi, \mathbf{C}[G]) \;=\; \mathrm{Hom}(V^\pi, \mathbf{C}) \;=\; (V^\pi)^*,$$

welches natürlich für alle $\pi \in P_+(G)$ nicht der Nullraum ist, es ist also $\mathcal{S}(G) = P_+(G)$. Bezeichnet man die positiven Wurzeln von G mit Φ^+, so ist wohlbekannt, daß die Weylgruppe von G ein eindeutiges Element w_0 mit der Eigenschaft

$w_0\Phi^+ = -\Phi^+$ enthält, und daß das höchste Gewicht des zu V^λ dualen G-Moduls gleich $\lambda^* := -w_0\lambda$ ist. Man erhält also

$$\mathbf{C}[G] \;\cong\; \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} V^{\lambda^*}\otimes V^\lambda\,,$$

wobei die V^{λ^*} irreduzible $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Moduln mit zentralem Charakter $\lambda^*+\varrho$ sind.

3. Die zentralen Charaktere

Grundlage für das Studium der zentralen Charaktere ist der klassische Harish-Chandra-Isomorphismus zwischen $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ und $\mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W$. Für den uns interessierenden Fall wurde er von Friedrich Knop wesentlich weiterentwickelt.

Satz 3.1. (Harish-Chandra-Homomorphismus [9, Thm.])
Die zusammenhängende reduktive komplexe algebraische Gruppe G wirke auf der glatten affinen Varietät M. Dann existiert ein Unterraum $\mathfrak{h}^*_M$ von $\mathfrak{h}^*$ der Dimension $\operatorname{rk} M$, eine Untergruppe W_M der Weylgruppe W von G (genannt die „kleine Weylgruppe“ von M) sowie ein Isomorphismus η derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{Z}(M) \arrow[d, "\eta"', "\cong"] \\ \mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W \arrow[r, "\mathrm{res}"'] & \mathbf{C}[\varrho+\mathfrak{h}^*_M]^{W_M} \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\mathcal{Z}(M)$ als $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Modul endlich erzeugt. Zudem wirkt W_M auf $\mathbf{C}[\varrho+\mathfrak{h}^*_M]$ als Spiegelungsgruppe, d.h. $\mathcal{Z}(M)$ ist ein Polynomring in $\operatorname{rk} M$ *Variablen mit homogenen Erzeugenden.* ■

Die letzte Behauptung ist eine Folge aus dem Charakterisierungssatz für Pseudospiegelungsgruppen von Shepard-Todd und Chevalley (vgl. [17] und [4]). Den in diesem Satz vorkommenden Begriff des Ranges erklärt die folgende Definition:

Definition 3.2. Den Arbeiten von E. Vinberg und D. Panyushev folgend, sei (für einen Punkt x von M in allgemeiner Lage) der *Rang von M* die Differenz der Dimensionen zwischen einem B- und einem N-Orbit in M:

$$\operatorname{rk} M \;:=\; \dim Bx - \dim Nx\,.$$

Nimmt man G als zusammenhängend an, so ist der Fall $\operatorname{rk} M = 0$ gänzlich uninteressant, denn er beschreibt die triviale Wirkung auf M. Intuitiv mißt der Rang von M also die Größe des Zentrums von $\mathcal{D}^G(M)$ (ebenso wie der Rang einer Lie-Algebra die Größe des Zentrums von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ mißt).

Nach dem Satz von Racah hat das Zentrum der universellen Einhüllenden von G genau $\operatorname{rk} G$ erzeugende Elemente, und jede endlich-dimensionale G-Darstellung ist durch die Eigenwerte dieser Operatoren, der sog. Casimir-Operatoren von G, eindeutig bestimmt (vgl. [5, Thm.7.4.7]). Bemerkenswerterweise haben auch die $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln U_λ aus Korollar 2.3 diese Eigenschaft, und dies unabhängig davon, ob sie endlich- oder unendlich-dimensional sind.

Satz 3.3. (Eindeutigkeit der zentralen Charaktere)
Die Vielfachheitenräume $U_\lambda = \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ *sind, als* $\mathcal{D}^G(M)$*-Moduln, eindeutig durch ihren zentralen Charakter bestimmt.*

Beweis. Der Beweis stützt sich auf den klassischen Harish-Chandra-Homomorphismus und zeigt sogar noch ein bißchen mehr. Sei $\chi_\lambda : \mathcal{Z}(M) \to \mathbf{C}$ der zentrale Charakter der isotypischen Komponente $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M]) \otimes V^\lambda$. Der von der G-Wirkung induzierte Homomorphismus $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{Z}(M)$ erlaubt es, dessen Einschränkung ξ_λ auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ zu betrachten, und dies ist genau der zentrale Charakter von V^λ, aufgefaßt als $\mathfrak{g}$-Modul. Für diesen ist bekannt, daß für jedes weitere höchste Gewicht μ aus $\xi_\lambda = \xi_\mu$ sofort die Existenz eines Elementes w der Weylgruppe mit $w(\lambda + \varrho) = \mu + \varrho$ folgt (vgl. [5, Thm.7.4.7.]). Mit λ und μ sind aber erst recht $\lambda + \varrho$ und $\mu + \varrho$ dominant, deswegen müssen sie gleich sein. Damit unterscheiden sich bereits die Einschränkungen auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ der zentralen Charaktere nicht-isomorpher $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln. ■

Unter den Voraussetzungen von Korollar 2.3 bezeichne $U_\lambda = \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ für $\lambda \in \mathcal{S}(M)$ den Vielfachheitenraum zu V^λ, aufgefaßt als irreduzibler $\mathcal{D}^G(M)$-Modul. Weil nun $\mathcal{Z}(M)$ zu einem Polynomring in $n = \mathrm{rk}\, M$ Variablen isomorph ist, ist der zentrale Charakter χ_λ die Auswertung eines Polynoms $\eta(Z)$ auf einem Element $\lambda' + \varrho \in \varrho + \mathfrak{h}_M^*$, genauer

$$\chi_\lambda(Z) \;=\; \eta(Z)(\lambda' + \varrho), \quad Z \in \mathcal{Z}(M)\,.$$

Die Frage, ob U_λ durch λ' eindeutig charakterisiert ist, haben wir bereits in Satz 3.3 positiv beantworten können. Gemeinsam mit Satz 3.1 bedeutet er, daß statt der $\mathrm{rk}\, G$ Casimir-Operatoren bereits $\mathrm{rk}\, M$ zentrale Differentialoperatoren ausreichen, um das Spektrum von M zu trennen. Weiterhin erlaubt uns die Beschreibung von $\mathcal{Z}(M)$ als Polynomring zunächst einzusehen, daß die Vielfachheitenräume aus der Frobenius-Zerlegung nur in Ausnahmefällen treue $\mathcal{D}^G(M)$-Darstellungen liefern. Zu einem $\mathcal{D}^G(M)$-Modul U und einer Teilmenge $X \subset U$ sei der *Annulator* definiert als

$$\mathrm{Ann}\,(X) \;:=\; \{D \in \mathcal{D}^G(M) \mid Dx \;=\; 0\; \forall x \in X\}\,.$$

Ist U zudem irreduzibel und $u \neq 0$ ein beliebiges Element von U, dann folgt aus dem Homomorphie-Satz sofort, daß U zu $\mathcal{D}^G(M)/\mathrm{Ann}\,(u)$ isomorph ist, da U in dieser Situation von u erzeugt wird.

Korollar 3.4. (Treue von $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln)
Die zusammenhängende reduktive komplexe algebraische Gruppe G wirke auf der glatten affinen Varietät M. Dann ist der Vielfachheitenraum U_λ genau dann treuer $\mathcal{D}^G(M)$-Modul , wenn $\mathrm{rk}\, M = 0$ *ist, also G auf M nur trivial wirkt.*

Beweis. Wenn G auf M trivial wirkt, so ist es klar, daß $\mathcal{D}(M)$ auf $\mathbf{C}[M]$ treu wirkt. Ist dagegen $\mathrm{rk}\, M =: n > 0$, so bemerken wir, daß natürlich

$$\mathcal{D}^G(M) \cdot \ker \chi_\lambda \;\subset\; \mathrm{Ann}\,(U_\lambda) \tag{3}$$

gilt; damit reicht es zu zeigen, daß $\ker\chi_\lambda$ nicht trivial ist. Aber in diesem Fall ist $\mathcal{Z}(M)$ isomorph zu einem Polynomring in n Variablen, der zentrale Charakter χ_λ demnach ein (multiplikativer) Homomorphismus von $\mathbf{C}[X_1,\dots,X_n]$ nach $\mathbf{C}$. Ein solcher ist bereits durch die Bilder c_i der Unbestimmten X_i eindeutig festgelegt, und jedes Polynom, welches einen Linearfaktor $X_i - c_i$ enthält, liegt im Kern von χ_λ. ■

Es scheint nicht bekannt zu sein, ob in Gleichung 3 – wie im Falle der Verma-Moduln [5, Thm.8.4.3] – statt der Inklusion die Gleichheit gilt.

4. Die Momentabbildung einer vielfachheitenfreien Wirkung

Die Momentabbildung auf dem Kotangentialbündel T^*M läßt sich anhand der geschlossenen Formel

$$\psi:\ T^*M \to \mathfrak{g}^*, \quad T^*M \ni \alpha \longmapsto [\xi \longmapsto \alpha(\xi_{\pi(\alpha)})]$$

schreiben. Dabei ist mit π die kanonische Projektion $T^*M \to M$ gemeint und das Element ξ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit dem von ihm erzeugten Vektorfeld auf M identifiziert. Sie hat die Eigenschaft, G-äquivariant zu sein, wenn man auf $\mathfrak{g}^*$ die koadjungierte Darstellung wählt, und ist die „kommutative“ Variante der Operatordarstellung von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: der Homomorphismus $\tilde{\psi}:\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}(M)$ liefert eine Abbildung auf den entsprechenden graduierten Ringen, welche wir ebenfalls $\tilde{\psi}$ nennen wollen,

$$\tilde{\psi}:\ \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathbf{C}[T^*M]\,,$$

und die genau der Komorphismus der Momentabbildung ψ ist. Dies möge als Motivation dienen, warum zu erwarten ist, daß die Momentabbildung zum Studium der G-invarianten Differentialoperatoren geeignet ist. Wir bezeichnen mit $X//G$ den algebraischen Quotienten einer affinen Varietät X nach der Wirkung der reduktiven Gruppe G und verweisen für seine Eigenschaften z. B. auf [10, II.3.2, S. 95].
Weil die Momentabbildung G-äquivariant war, definiert der Homomorphismus $\tilde{\psi}_G:\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]^G \to \mathbf{C}[T^*M]^G$ nun einen Morphismus $\psi_G : T^*M//G \to \mathfrak{g}^*//G$. Zwischen T^*M und $\mathfrak{g}^*$ führen wir noch den Abschluß des Bildes der Momentabbildung ein. Insgesamt erhält man dann das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T^*M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{ct}}"'] & \overline{\psi(T^*M)} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{g}^* \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{g}^*}"] \\
T^*M//G \arrow[r, "\psi_G"] & \overline{\psi(T^*M)}//G \arrow[r, hook] & \mathfrak{g}^*//G
\end{tikzcd}$$

Hierbei sei $\pi_{\mathrm{ct}} : T^*M \to T^*M//G$ der algebraische Quotient des Kotangentialbündels (der Index „ct“ soll genau hieran erinnern), $\pi_{\mathfrak{g}^*} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*//G$ der algebraische Quotient der dualen Lie-Algebra bezüglich der koadjungierten Darstellung (von dem wir natürlich wissen, daß er sich mittels des Harish-Chandra-Homomorphismus als $\mathfrak{h}^*/W$ realisieren läßt); nach [10, II.3.2, S. 95] kann der

Quotient von $\overline{\psi(T^*M)}$ als die Einschränkung von $\pi_{\mathfrak{g}^*}$ realisiert werden, weswegen wir hierfür keine getrennte Notation eingeführt haben. Von Bedeutung ist nun vor allem der Quotient ψ_G der Momentabbildung, denn das Hauptziel dieses Abschnittes besteht im Beweis des folgenden Satzes. Er wurde vor allem von den ähnlich lautenden Ergebnissen der Arbeit [3] motiviert, die sich mit den Wirkungen kompakter Gruppen auf Heisenberg-Gruppen befaßt.

Satz 4.1. (Geometrisches Kriterium für vielfachheitenfreie Wirkungen)
Die zusammenhängende komplexe algebraische Gruppe G wirkt genau dann auf der glatten irreduziblen affinen Varietät M vielfachheitenfrei, wenn der Quotient der Momentabbildung

$$\psi_G : \quad T^*M//G \longrightarrow \mathfrak{g}^*//G$$

eine endliche Abbildung ist, d.h. wenn $\mathbf{C}[T^*M]^G$ ein endlich erzeugter $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]^G$-Modul ist.

Beweis. Wenn G auf M vielfachheitenfrei wirkt, dann ist $\mathcal{D}^G(M)$ abelsch (Satz 2.5), stimmt also mit $\mathcal{Z}(M)$ überein. Nach dem bereits zitierten Satz 3.1 von F. Knop ist aber $\mathcal{Z}(M)$ immer ein endlich erzeugter $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Modul. Wegen $\operatorname{gr}\mathcal{D}^G(M) = \mathbf{C}[T^*M]^G$ und $\operatorname{gr}\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^*//G = \mathfrak{h}^*/W$ folgt damit die Behauptung. Sei nun andererseits $\mathbf{C}[T^*M]^G$ ein endlich erzeugter $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]^G$-Modul, d.h. in der nichtkommutativen Variante $\mathcal{D}^G(M)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Modul. Wähle ein $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Generatorensystem $D_1, \ldots, D_m$ von $\mathcal{D}^G(M)$. Es läßt sich nun jedes Element $D \in \mathcal{D}^G(M)$ schreiben als eine Linearkombination $D = z_1D_1 + \ldots + z_mD_m$ mit Koeffizienten z_i aus $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Nach dem Satz über die Frobenius-Zerlegung (Kor. 2.3) wirkt $\mathcal{D}^G(M)$ auf jedem Vielfachheitenraum $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ irreduzibel. Wählt man nun irgendein $v \in \mathbf{C}[M]^N(\lambda) - \{0\}$, so muß insgesamt $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ in der linearen Hülle von $D_1v, \ldots, D_mv$ liegen, da ja $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ skalar wirkt. Insbesondere gilt somit für jedes λ die Abschätzung $\dim \mathbf{C}[M]^N(\lambda) \leq m$, woraus mit dem nachfolgenden Lemma folgt, daß G vielfachheitenfrei wirkt. ∎

Lemma 4.2. (Unbeschränktheit der Vielfachheiten)
Es wirke die reduktive komplexe algebraische Gruppe G auf der irreduziblen affinen Varietät M. Wenn G nicht vielfachheitenfrei operiert, so sind die Vielfachheiten nicht beschränkt.

Beweis. Nach einem Satz von Hadziev und Grosshans (vgl. [10, Thm. III.3.2, S. 190]) ist der Ring der N-Invarianten $\mathbf{C}[M]^N$ endlich erzeugt, d.h. es existiert ein algebraischer Quotient $M//N$, dessen Koordinatenring isomorph ist zu den Vektoren mit höchstem Gewicht in $\mathbf{C}[M]$. Sei λ ein nichttriviales dominantes Gewicht von G, welches im Spektrum von M liegt und mind. die Vielfachheit zwei hat sowie v_λ, w_λ zwei linear unabhängige Funktionen in $\mathbf{C}[M]^N$ vom Gewicht λ. Diese beiden Funktionen sind sogar algebraisch unabhängig, denn sollte ein Polynom f mit $f(v_\lambda, w_\lambda) = 0$ existieren, so müßte dieses wegen der Graduierung durch die Potenzen von λ eine Summe von homogenen Polynomen f_k sein, für die dann bereits $f_k(v_\lambda, w_\lambda) = 0$ gelten würde. Ein homogenes Polynom in zwei Variablen kann man nun aber als ein Polynom in einer Variablen auffassen und in Linearfaktoren zerlegen, was die algebraische Unabhängigkeit beweist. Für willkürlich großes n sind die $n+1$ Vektoren $v_\lambda^k w_\lambda^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$ damit alle linear unabhängig, es ist also

$$\dim \mathbf{C}[M]^N(n\lambda) \;\geq\; n+1,$$

was den Beweis beendet. ■

Bemerkung 4.3. In Satz 4.1 kann man ψ_G auch durch seine Einschränkung auf den Quotienten des Abschlusses des Bildes der Momentabbildung

$$\psi_G: \quad T^*M//G \longrightarrow \overline{\psi(T^*M)}//G$$

ersetzen (vgl. mit den Bemerkungen zu Beginn von Abschnitt 6 in [8]).

Das folgende Korollar folgt sofort aus den Standardeigenschaften endlicher Morphismen.

Korollar 4.4. *Wenn G auf M unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes vielfachheitenfrei wirkt, dann ist die Abbildung $\psi_G : T^*M//G \longrightarrow \mathfrak{g}^*//G$ abgeschlossen und jedes $g \in \mathfrak{g}^*//G$ hat nur endlich viele Urbilder. Insbesondere ist die Momentabbildung ψ abgeschlossen auf den generischen G-Bahnen.*

Beispiel 4.5. Wir betrachten die zweidimensionale Standard-Darstellung der $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ auf dem $\mathbf{C}^2 = V$, von der wir wissen, daß sie vielfachheitenfrei und selbstdual ist. Somit können wir die Wirkung des Gruppenelements $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ auf dem Paar von Vektoren $(p,q) \in T^*M \cong V \times V$ des Kotangentialbündel realisieren als $g\,(q,p) = (g\,q,\, g\,p)$. Liegen zwei Paare von Vektoren in der gleichen Bahn, so schreiben wir hierfür $(p,q) \sim (p',q')$. Auf $V \times V$ gibt es genau eine G-invariante Funktion, nämlich die Determinante der von p und q gebildeten Matrix:

$$\det(q,p) \;:=\; \det\begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix} \;=\; q_1p_2 - q_2p_1\,.$$

Mit ihrer Hilfe kann man den Orbitraum parametrisieren.

Satz 4.6. (Parametrisierung des Orbitraums [10, Kap. I.4.])

1. *Gilt* $\det(q,p) =: \lambda \neq 0$, *so ist*

$$(q,p) \;\sim\; \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}\right);$$

2. *Es ist* $\det(q,p) = 0$ *genau dann, wenn p und q linear abhängig sind. In diesem Fall gibt es unendlich viele Bahnen, für die man als Repräsentanten wählen kann:*

$$\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ mit } \mu \in \mathbf{C}\,.$$ ■

Die Orbits durch Paare linear unabhängiger Vektoren (q, p) sind abgeschlossen, in allgemeiner Lage und werden von der Invariante $\det(q, p)$ getrennt. Der Abschluß eines „singulären Orbits" enthält immer den Nullpunkt, deswegen sind sie alle (bis auf den Nullpunkt selber) nicht abgeschlossen. Identifiziert man anhand der Killing-Form $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ mit $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^*$, so kann man die Momentabbildung in den Koordinaten von q und p ausdrücken:

$$\psi : \ V \times V \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}), \quad (q, p) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q_1p_2 + q_2p_1) & -q_1p_1 \\ q_2p_2 & -\frac{1}{2}(q_1p_2 + q_2p_1) \end{pmatrix}.$$

Für die Bilder der Bahn-Repräsentanten unter der Momentabbildung ergibt sich demnach folgendes Bild:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}\right) \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{pmatrix}\lambda/2 & 0\\ 0 & -\lambda/2\end{pmatrix}, \quad \left(\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{pmatrix}0 & -\mu\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right), \ \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die Repräsentanten der generischen Orbits werden auf halbeinfache Lie-Algebra-Elemente abgebildet, deren Bahnen in der Tat abgeschlossen sind, zwei singuläre Bahnen werden auf das Null-Element geschickt, die restlichen singuläre Bahnen haben nilpotentes Bild. Die Momentabbildung ist also abgeschlossen auf den generischen G-Bahnen. Allerdings ist sie dort nicht bijektiv: denn wegen

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda/2 & 0\\ 0 & -\lambda/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-\lambda/2 & 0\\ 0 & \lambda/2\end{pmatrix}$$

werden die in $V \times V$ disjunkten Bahnen zu $\det(q, p) = \lambda$ und $\det(q, p) = -\lambda$ auf ein- und dieselbe adjungierte Bahn in $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ abgebildet. Es ist also *falsch*, daß für eine vielfachheitenfreie Wirkung die Momentabbildung bijektiv auf den abgeschlossenen Orbits wäre, obwohl dies für Gelfand-Paare *richtig* ist ([3, Thm.1.3]). Dieses Bild bestätigt sich, wenn man die geometrische Konstruktion des Quotienten verwendet: der Invariantenring von $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ wird von der Determinante erzeugt

$$\det \begin{pmatrix}\lambda/2 & 0\\ 0 & -\lambda/2\end{pmatrix} = -\frac{\lambda^2}{4}.$$

Zieht man diese auf $V \times V \cong T^*M$ zurück, erhält man demzufolge

$$\psi^*(\det)(p, q) = -\frac{\det(p, q)^2}{4}.$$

Diese Funktion trennt wie gesehen nicht die generischen Orbits von $V \times V$, erzeugt also nicht $\mathbf{C}[V \times V]^G$. Wohl aber ist wegen

$$\mathbf{C}[\det(p, q)] = \mathbf{C}[\det(p, q)^2] \oplus \det(p, q) \cdot \mathbf{C}[\det(p, q)^2]$$

der Invariantenring von $V \times V$ als Modul endlich erzeugt über dem Invariantenring von $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, d.h. der Quotient der Momentabbildung ist endlich.

5. Die Frobenius-Zerlegung für reelle Formen

In der Praxis tritt häufig der Fall auf, daß die komplexe Situation durch Komplexifizierung einer reellen Gruppenwirkung entsteht. Deswegen wollen wir hier die Korrespondenz zwischen reeller und komplexer Frobenius-Zerlegung herstellen.

Definition 5.1. Völlig kanonisch läßt sich zu jeder reellen affinen Varietät $M_0 \subset \mathbf{R}^n$ deren Komplexifizierung $M_0(\mathbf{C}) =: M$ in $\mathbf{C}^n$ konstruieren als

$$M := \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{I}(M_0)\},$$

wobei $\mathcal{I}(M_0)$ das Verschwindungsideal von M_0 bezeichne. Eine *reelle Form* der komplexen affinen Varietät M soll nun eine reelle affine Varietät M_0 sein, deren Komplexifizierung $M_0(\mathbf{C})$ zu M isomorph ist. In diesem Fall liegt M_0 dicht in M; weil eine affine Varietät genau dann irreduzibel ist, wenn ihr Abschluß es ist, folgt damit, daß M_0 genau dann irreduzibel ist, wenn M es ist (vgl. [12, S.61-64]). Es existiert ein Vektorraum-Isomorphismus zwischen den komplexwertigen regulären Funktionen auf M_0 und den üblichen regulären Funktionen auf M

$$\mathbf{R}[M_0] \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \;\cong\; \mathbf{C}[M];$$

denn in die eine Richtung ist dies einfach die Einschränkung einer Funktion von M auf M_0; in der anderen Richtung impliziert die Dichtheit von M_0 in M, daß jede reguläre Funktion auf M_0 eine eindeutige reguläre Fortsetzung auf ganz M hat. Deswegen schreibt man oft $\mathbf{C}[M]$, wenn man $\mathbf{R}[M_0] \otimes \mathbf{C}$ meint.

Damit gilt insbesondere für eine glatte reelle affine Varietät M_0 mit Komplexifizierung M, daß $\mathcal{D}(M_0) \otimes \mathbf{C} \cong \mathcal{D}(M)$ (zunächst im Vektorraumsinne) gilt. In der Tat, ist $D_0 \in \mathcal{D}(M_0)$ ein Differentialoperator auf M_0, so läßt sich eine Fortsetzung D von D_0 auf ganz M eindeutig definieren durch die Forderung, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "D_0"'] & \mathbf{C}[M] \arrow[d, "D"] \\ \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \arrow[r, "\cong"] & \mathbf{C}[M] \end{tikzcd}$$

kommutieren möge, und es macht gleichzeitig klar, was unter der Einschränkung eines Operators $D \in \mathcal{D}(M)$ auf M_0 zu verstehen sei. Klarerweise ist die Fortsetzung / Einschränkung von Differentialoperatoren ein Algebrenisomorphismus. Weil wir uns im Reellen meist für komplexwertige reguläre Funktionen interessieren, macht es Sinn, von nun an die entsprechenden Differentialoperatoren $\mathcal{D}(M_0)_{\mathbf{C}}$ zu schreiben. Es folgt sofort, daß ein komplexer $\mathcal{D}(M_0)_{\mathbf{C}}$-Modul genau dann irreduzibel ist, wenn er als $\mathcal{D}(M)$-Modul irreduzibel ist.

Definition 5.2. Eine reelle algebraische Gruppe G_0 soll *reelle Form* der komplexen algebraischen Gruppe G genannt werden, wenn sie eine reelle Form im eben genannten Sinne affiner Varietäten ist und die identische Einbettung $G_0 \hookrightarrow G$ sich zu einen Gruppenisomorphismus $G_0(\mathbf{C}) \cong G$ fortsetzen läßt. Zum Beispiel ist, ähnlich wie bei Lie-Gruppen, die Fixpunktmenge eines beliebigen involutiven antiholomorphen Automorphismus einer komplexen zusammenhängenden Gruppe G eine reelle Form (vgl. [12, S.100-102]). Man beweist dann leicht folgendes Lemma:

Lemma 5.3. (Komplexe Darstellungen reeller Formen reduktiver Gruppen)
Sei $G_0 \subset G$ eine irreduzible reduktive reelle algebraische Gruppe und zudem eine reelle Form der (ebenfalls irreduziblen und reduktiven) komplexen algebraischen Gruppe G. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den komplexen irreduziblen regulären Darstellungen von G_0 und denen von G, welche durch Restriktion bzw. eindeutige Fortsetzung gegeben ist.

Beweis. Sei (ϱ_0, V) eine (reguläre endlich-dimensionale) irreduzible Darstellung von G_0 auf dem komplexen Vektorraum V, also ein Morphismus $G_0 \to \mathrm{GL}(V)$. Wähle nun eine Basis $e_1, \dots, e_n$ von V. Dann lassen sich die Funktionen

$$m_{ij}: \quad G_0 \longrightarrow G, \quad \varrho_0(g) \;=\; \sum m_{ij}(g) e_i$$

als Elemente von $\mathbf{R}[G_0]_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}[G]|_{G_0}$ eindeutig auf ganz G fortsetzen, weil G_0 in G dicht liegt. Diese definieren somit eine Darstellung von G auf V, die klarerweise irreduzibel ist. Umgekehrt ist die Restriktion einer irreduziblen Darstellung (ϱ, V) von G auf G_0 natürlich wieder eine G_0-Darstellung; einzig nicht trivial an diesem Lemma ist folglich der Nachweis, daß diese Einschränkung irreduzibel ist, wofür wir auf eine Idee von Želobenko (vgl. [21, Ch.VI, §42, Thm.2]) zurückgreifen wollen.

Sei $V_0 \neq \{0\}$ ein G_0-invarianter Unterraum von V. Angenommen, V_0 ist nicht G-invariant: wähle $g \in G$ und $v_0 \in V_0$ mit $\varrho(g)v_0 \notin V_0$. Sodann existiert ein lineares Funktional $f: V \to \mathbf{C}$ derart, daß $f|_{V_0} = 0$ und $f(\varrho(g)v_0) \neq 0$ gilt. Ein Dichtheitsargument zeigt, daß es ein solches nicht geben kann: denn ist $f: V \to \mathbf{C}$ ein beliebiges lineares Funktional, welches auf V_0 verschwindet, dann betrachte man zu jedem $v_0 \in V_0$ die – offensichtlich reguläre – Abbildung $f_{v_0}: G_0 \to \mathbf{C}$, $g_0 \mapsto f(\varrho(g_0)v_0) = 0$. Weil G_0 in G dicht ist, hat diese Abbildung nur die Nullabbildung als reguläre Fortsetzung auf ganz G; das heißt aber nichts anderes, als daß $f(\varrho(g)v_0) = 0$ ist für alle $g \in G$ und alle $v_0 \in V_0$, im Widerspruch zum weiter oben konstruierten Funktional. Also ist V_0 doch G-invariant, damit $V_0 = V$ und $(\varrho|_{G_0}, V)$ wie gewünscht G_0-irreduzibel. ∎

Definition 5.4. Sei (G, M) ein Paar bestehend aus einer komplexen algebraischen reduktiven zusammenhängenden Gruppe G, einer ebenfalls komplexen affinen glatten irreduziblen Varietät M, sowie einer regulären Wirkung von G auf M. Wir nennen ein Paar (G_0, M_0), bestehend aus einer reellen algebraischen Gruppe G_0 und einer affinen glatten reellen Varietät M_0, eine *reelle Form* von (G, M), wenn G bzw. M die Komplexifizierung von G_0 bzw. M_0 und die G-Wirkung auf M ebenfalls die Komplexifizierung der G_0-Wirkung auf M_0 ist.

Sei nun (G_0, M_0) eine reelle Form von (G, M), und weiterhin

$$r: \; \mathbf{C}[M] \;\xrightarrow{\cong}\; \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$$

der Algebren-Isomorphismus zwischen den (üblichen) regulären Funktionen auf M und den komplexwertigen regulären Funktionen auf M_0, der durch Restriktion bzw. eindeutige Fortsetzung von Funktionen gegeben ist. In dieser Situation liefert Korollar 2.3 die Frobenius-Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$. Vergessen wir einen Augenblick die unterliegenden Varietäten und betrachten nur die Wirkung ϱ von G auf dem komplexen Vektorraum $\mathbf{C}[M]$. Nach Lemma 5.3 ist dann die isotypische Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$ unter G identisch mit der isotypischen Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$ unter der Wirkung von G_0, definiert als die Einschränkung der G-Wirkung hierauf, geschrieben ϱ_0. Die Einschränkung auf G_0 der komplexen G-Darstellung V^λ schreiben wir V_0^λ. Nun verwenden wir, daß $\mathbf{C}[M]$ mit der Abbildung r isomorph ist zu $\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$, die Einschränkung der G_0-Wirkung natürlich mit der Übertragung der G_0-Wirkung von $\mathbf{R}[M_0]$ auf $\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$ übereinstimmt und folglich Korollar 2.3 ebenfalls die isotypische Zerlegung von $\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$ unter G_0 liefert. Insgesamt haben wir also als G_0-Modul – zunächst vom abstrakten Standpunkt der Morphismen – die Zerlegung

$$\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \;\cong\; \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} \mathrm{Hom}_{G_0}(V_0^\lambda, \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}) \otimes V_0^\lambda\,,$$

welcher auf der Seite der Funktionen unter Verwendung des Isomorphismus r die Summe

$$\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \;\cong\; \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} r\left(\mathbf{C}[M]^N(\lambda)\right) \otimes V_0^\lambda$$

entspricht. Im allgemeinen ist dies die einzige Beschreibung der reellen Frobenius-Zerlegung in der Sprache des Transformationsverhaltens gewisser Funktionen. Eine intrinsische Charakterisierung der Vielfachheitenräume alleine aus der Struktur der reellen Gruppe G_0 ist nur in einem Ausnahmefall möglich, denn wir nun skizzieren wollen.

Sei die reelle Form G_0 definiert als die Fixpunktmenge des involutiven Antiautomorphismus σ, und $(\tilde{G}_0, \tau)$ eine damit verträgliche reelle kompakte Form von G, d.h. es gelte $\sigma\tau = \tau\sigma$. Dann ist $\theta := \sigma\tau$ die Cartan-Involution von G_0, die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_0$ zerlegt sich in die Eigenräume zum Eigenwert $+1$ und -1

$$\mathfrak{g}_0 \;=\; \mathfrak{g}_0(1) \oplus \mathfrak{g}_0(-1) \;=:\; \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

und es existieren immer Cartan-Unteralgebren von $\mathfrak{g}_0$, welche unter θ invariant ist. Sei fortan $\mathfrak{h}_0$ eine solche, und H_0 eine Untergruppe von G_0 mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}_0$. Es ist H_0 eine reelle Form von H, der Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_0(\mathbf{C})$; deswegen liegt H_0 in H dicht. Ist nun $B = HN$ die Ergänzung von H zu einer Boreluntergruppe von G, die durch die Wurzelzerlegung bezüglich H definiert ist, so braucht N nicht unter σ invariant zu sein, deswegen bilden die Fixpunkte von N unter σ in G_0 im allgemeinen keine reelle Form von N. Weiß man aber, daß $\mathfrak{h}_0$ vollständig in $\mathfrak{p}$ enthalten ist, so ist $\mathfrak{h}_0$ gleichzeitig eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}_0$ und für alle $h \in \mathfrak{h}_0$ ist der Operator $\mathrm{ad}h$ reell diagonalisierbar. Daraus folgt, daß die Wurzelräume $\mathfrak{g}^\alpha$ der komplexen Lie-Algebra genau die Komplexifizierungen der – völlig analog definierten – reellen Wurzelräume $(\alpha \in \mathfrak{h}_0^*)$

$$\mathfrak{g}_0^\alpha \;:=\; \{x \in \mathfrak{g}_0 : \mathrm{ad}\, h(x) = \alpha(h)x\}$$

sind; bezeichne Δ_+ die positiven Wurzeln (von $\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{g}_0$, dies ist nun egal), so ist insbesondere

$$\mathfrak{n}_0 \;:=\; \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_0^\alpha$$

eine reelle Form von $\mathfrak{n}$, der Lie-Algebra von N. Die Fixpunkte N_0 von N unter σ liegen also dicht in N. Reelle Lie-Algebren, die eine vollständig in $\mathfrak{p}$ enthaltene Cartan-Unteralgebra besitzen, heißen *zerfallend* („split", „déployée"). Für die klassischen einfachen Lie-Algebren sind dies bekanntlich $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$ für $n \geq 2$, $\mathfrak{so}(k,k+1)$ für $k \geq 1$, $\mathfrak{so}(k,k)$ für $k \geq 3$ und $\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R})$ für $n \geq 2$.

Für die ursprünglich gestellte Aufgabe, die reelle Frobenius-Reziprozität alleine anhand der reellen Gruppe G_0 zu charakterisieren, sind wir nun in einer äußerst komfortablen Situation; denn jetzt hat jede Funktion in $\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$, die sich unter $B_0 := H_0N_0$ gemäß dem Gewicht λ transformiert, eine eindeutige Fortsetzung zu einer Funktion aus $\mathbf{C}[M]$ mit gleichen Transformationseigenschaften bzgl. B, und demnach ist

$$\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \;\cong\; \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}^{N_0}(\lambda)\otimes V_0^{\lambda}\,.$$

Dieses Resultat kann man sogar noch dahingehend verbessern, daß man sich auf reellwertige Funktionen beschränken kann: denn leicht überlegt man sich, daß für eine zerfallende Lie-Algebra $\mathfrak{g}_0$ die komplexen Darstellungen von $\mathfrak{g}_0(\mathbf{C}) =: \mathfrak{g}$ genau die Komplexifizierungen der reellen Darstellungen von $\mathfrak{g}_0$ sind. Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen:

Korollar 5.5. (Reelle Frobenius-Zerlegung)
Sei (G_0, M_0) eine reelle Form von (G, M) und $r : \mathbf{C}[M] \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$ der zugehörige Algebren-Isomorphismus. Dann gilt:

$$\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} \mathrm{Hom}_{G_0}(V_0^{\lambda},\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}})\otimes V_0^{\lambda} \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} r\left(\mathbf{C}[M]^N(\lambda)\right)\otimes V_0^{\lambda}$$

als G_0-Moduln, und, wenn G_0 zusätzlich zerfallend ist,

$$\mathbf{R}[M_0] \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} \mathbf{R}[M_0]^{N_0}(\lambda)\otimes V_0^{\lambda}\,.$$

Zudem sind die Vielfachheitenräume der V_0^{λ} als $\mathcal{D}^G(M)_{\mathbf{C}}$-Moduln irreduzibel, paarweise inäquivalent und haben zentralen Charakter. ■

6. Einige singuläre Beispiele

Die Glattheit der zugrunde liegenden Varietät M wurde im Beweis der allgemeinen Frobenius-Rezoprozität an genau zwei Stellen verwendet. Zum einen garantiert sie wegen Lemma 1.6 die Gültigkeit des Ergebnisses im Falle der trivialen Gruppenwirkung. Zum anderen braucht man eben diese Eigenschaft, um den Dichtheitssatz von Jacobson zur Darstellbarkeit von Endomorphismen endlich-dimensionaler Teilräume als Differentialoperatoren sowie das Lemma von Dixmier anwenden zu können (dieses wird jedoch erst beim Studium der zentralen Charaktere benützt).

Schlußendlich ist es zwar nicht für den Beweis, wohl aber konzeptionell und für das konkrete Rechnen störend, daß man eine Wahl treffen muß zwischen der Algebra aller Differentialoperatoren $\mathcal{D}(M)$ und denen, die nur von den Funktionen und den Derivationen von M erzeugt werden, $\mathcal{D}(M)^*$ in der Notation von

Abschnitt 1. Die erste Algebra läßt sich zwar definieren, aber nicht bestimmen, kann beliebig unanständige Eigenschaften haben und liefert keine Differentialoperatoren im Sinne der Analysis; die zweite Algebra ist handlicher und analytisch sinnvoll, aber meist zu „klein“.

Gegenstand dieses Abschnitts ist es deshalb, anhand einiger Beispiele diejenigen Effekte zu illustrieren, die bei reduktiven Gruppenwirkungen auf singulären affinen Varietäten auftreten können. Sie zeigen, daß allgemeine Sätze hier nicht zu erwarten sind. Die Algebra der Wahl ist dabei im Grunde immer $\mathcal{D}(M)^*$; über $\mathcal{D}(M)$ kann man nur verzeinzelt Aussagen machen, wenn man irgendwie durch eine günstige Wahl der Koordinaten Elemente hieraus „raten“ kann.

Beispiel 6.1. Wir betrachten den spitzen Doppelkegel im $\mathbf{R}^3$

$$X_0 \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}\,.$$

Er ist eine reelle Form des komplexen Kegels

$$X \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}\,,$$

und der singuläre Ort besteht in beiden Fällen genau aus dem Nullpunkt. Folglich können wir den Koordinatenring $\mathbf{C}[X]$ von X mit den komplexwertigen regulären Funktionen $\mathbf{R}[X_0]_{\mathbf{C}}$ auf X_0 identifizieren. Parametrisiert man X_0 mittels

$$x \;=\; u\cos\theta, \quad y \;=\; u\sin\theta, \quad z \;=\; u,$$

so wird nach einer komplexen Drehung der Ring $A := \mathbf{R}[X_0]_{\mathbf{C}}$ über $\mathbf{C}$ erzeugt von u, $ue^{i\theta}$ und $ue^{-i\theta}$

$$A \;:=\; \mathbf{R}[X_0]_{\mathbf{C}} \;\cong\; \mathbf{C}[u, ue^{i\theta}, ue^{-i\theta}]\,.$$

Zur Illustration, wie die Derivationen des Kegels auf seinen regulären Funktionen operieren, werden wir Abbildung 1 verwenden. Darin sind alle regulären Funktionen in einem rechteckigen Zeilen- und Spaltenmuster angeordnet; die positive x-Achse beschreibt die wachsenden u-Potenzen, die y-Achse die ganzzahligen Vielfachen von θ im Argument der Exponentialfunktion. Wie man sieht, wird von allen möglichen Besetzungsstellen nur ein (gedrehter) Quadrant tatsächlich belegt: dies liegt daran, daß z. B. zwar $ue^{i\theta}$ in A liegt, nicht aber $ue^{2i\theta}$. Wir bestimmen nun den Ring der Derivationen sowie die von ihm und $\mathbf{R}[X_0]_{\mathbf{C}}$ erzeugte Algebra $\mathcal{D}(X_0)^*$. Zunächst ist klar, daß zu den Koordinaten die Derivationen

$$u\partial_u \;=\; x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \quad \text{und} \quad \partial_\theta \;=\; x\partial_y - y\partial_x$$

gehören. Die Algebra $\operatorname{Der} X_0$ enthält aber noch weit mehr Elemente:

Lemma 6.2. (Derivationen des Kegels)
Durch folgende Kriterien ist $\operatorname{Der} X_0$ *vollständig bestimmt:*

1. *Ein Element der Gestalt* $q\partial_u$ *liegt genau dann in* $\operatorname{Der} X_0$*, wenn* $q \in u \cdot A$*;*

2. *Ein Element der Gestalt* $q\partial_\theta$ *liegt genau dann in* $\operatorname{Der} X_0$*, wenn* $q \in A$*;*

3. *Ein Element der Gestalt* $q_1\partial_u + q_2\partial_\theta$ *liegt genau dann in* $\operatorname{Der} X_0$*, wenn es Summe zweier Derivationen der gerade genannten Gestalt oder in der* A*-linearen Hülle der beiden Derivationen*

$$R \;:=\; ue^{i\theta}\partial_u + ie^{i\theta}\partial_\theta, \quad S \;:=\; ue^{-i\theta}\partial_u - ie^{-i\theta}\partial_\theta$$

enthalten ist.

Beweis. Zum Beweis verwenden wir das Kriterium aus Lemma 1.3. Wir setzen eine Derivation von X_0 an mit $D = q\partial_u$, $q \in \mathbf{R}(X_0)_{\mathbf{C}}$. Wegen der Derivationseigenschaft genügt es, wenn die Bilder der Koordinatenfunktionen unter D in A liegen, denn dann folgt sofort $D(A) \subset A$. Es müssen also

$$D(u) \;=\; q, \quad D(ue^{i\theta}) \;=\; qe^{i\theta}, \quad D(ue^{-i\theta}) \;=\; qe^{-i\theta}$$

Elemente von A sein, d.h. q liegt in A und, vermöge Multiplikation mit $ue^{-i\theta}$ der zweiten Bedingung, qu liegt ebenfalls in A. Schreibt man dann qu als Summe

$$qu \;=\; \sum \alpha\, u^n (ue^{i\theta})^m (ue^{-i\theta})^l$$

mit minimalem m und l, so implizieren die erste und die zweite Bedingung, daß in allen auftretenden Summanden m und l größer Eins sein müssen, d.h.

$$qu \;=\; u^2 \sum \alpha u^n (ue^{i\theta})^{m-1} (ue^{-i\theta})^{l-1} \;=:\; u^2 \cdot a$$

mit einem $a \in A$; es folgt $q = ua$ und damit hat q die behauptete Gestalt. Alternativ kann man die Behauptung auch direkt aus Abbildung 1 ablesen. Analog beweist man den zweiten Teil des Lemmas. Für den letzten Teil machen wir den Ansatz $D = q_1\partial_u + q_2\partial_\theta$, was impliziert, daß

$$D(u) \;=\; q_1, \quad D(ue^{i\theta}) \;=\; e^{i\theta}(q_1 + iuq_2), \quad D(ue^{-i\theta}) \;=\; e^{-i\theta}(q_1 - iuq_2)$$

reguläre Funktionen sein sollen. Nun betrachtet man die u-Graduierung von A: wenn $\deg q_1 \neq \deg q_2 + 1$ ist, so haben die beiden Summanden in der ersten und zweiten Bedingung unterschiedlichen u-Grad, müssen also jeder für sich in A liegen, was einer Derivation der soeben beschriebenen Gestalt entspricht. Sei deswegen fortan $\deg q_1 = \deg q_2 + 1$. Insbesondere ist dann $\deg q_1 \geq 1$, ich kann also $q_1 = uq_1'$ setzen. Aus der zweiten Bedingung folgt mittels Multiplikation mit $ue^{i\theta}$, daß $u^2(q_1' + iq_2) \in A$ sein muß; aus der ersten Bedingung $q_1 = q_1'u \in A$ folgt aber $q_1'u^2 \in A$, also durch Subtraktion $u^2 q_2 \in A$. Man überlegt sich leicht, daß hieraus folgt, daß q_2 die Gestalt

$$q_2 \;=\; a_2 + b_2e^{i\theta} + b_2'e^{-i\theta} + c_2e^{2i\theta} + c_2'e^{-2i\theta},$$

haben muß, wobei a_2 in A ist und man die anderen Koeffizienten so wählen kann, daß sie zwar in A, aber b_2, b_2' nicht in $u \cdot A$ und c_2, c_2' nicht in $u^2 \cdot A$ liegen. In ähnlicher Weise kann man q_1' darstellen. Weil aber hier bereits uq_1' in A sein muß, verschwinden die beiden letzten Terme:

$$q_1 \;=\; a_1 + b_1e^{i\theta} + b_1'e^{-i\theta}.$$

Schreibt man nun das in der zweiten Bedingung vorkommende Element $ue^{i\theta}(q_1' + iq_2)$ in dieser Darstellung aus und subtrahiert alle Elemente, die trivialerweise in A liegen, so bleibt, daß $ue^{2i\theta}(b_1 + ib_2) + ic_2e^{i3\theta}u$ in A liegen muß, was nach Wahl der Koeffizienten nicht geht; deswegen ist $c_2 = 0$ und $b_1 + ib_2 = 0$. Ebenso zeigt man $c_2' = 0$ und $b_1' - ib_2' = 0$. Die „Minimallösungen“ $b_1 = 1$, $b_2 = i$ und $b_1' = 1$, $b_2' = -i$ entsprechen den Elementen R und S. Für diese berechnen wir für später noch die Produkte

$$RS \;=\; u^2\partial_u^2 + 2u\partial_u + \partial_\theta^2 - i\partial_\theta, \;\; SR \;=\; u^2\partial_u^2 + 2u\partial_u + \partial_\theta^2 + i\partial_\theta \qquad (4)$$

und aus ihnen den Kommutator $[R, S] = -2i\partial_\theta$. ■

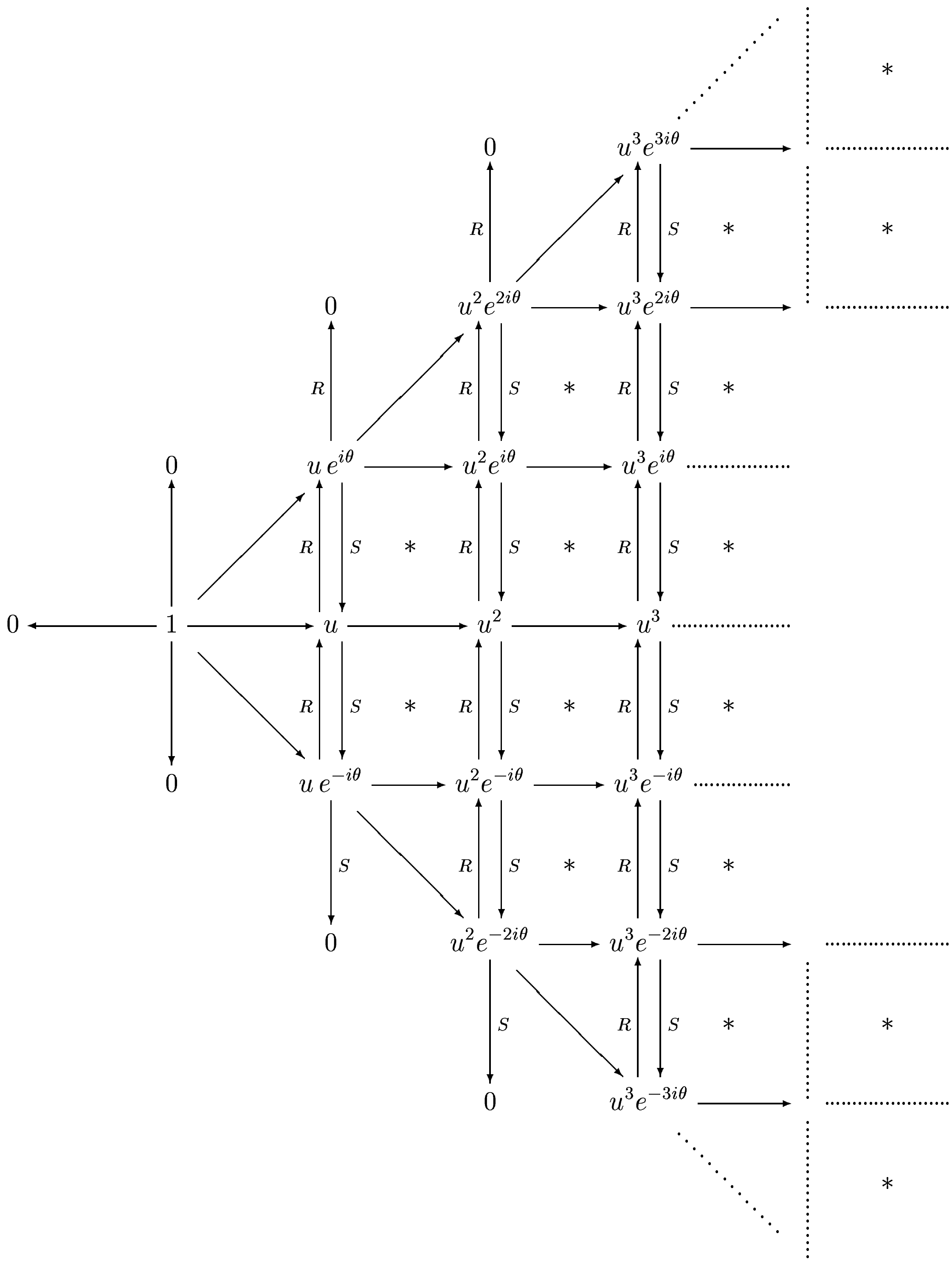

Abbildung 1: Koordinatenring des Doppelkegels $z^2 = x^2 + y^2$

Die von A und Der X_0 erzeugte Algebra $\mathcal{D}(X_0)^*$ enthält zunächst die Multiplikation mit allen Koordinatenfunktionen; beginnt man bei der konstanten Funktion Eins im linken Bildteil, so sind dies genau die drei nach rechts zeigenden Pfeile (zwei diagonal, einer horizontal). von jeder anderen Funktion gehen natürlich immer diese drei Pfeile aus; der Übersichtlichkeit halber haben wir sie nur am oberen und unteren Bildrand eingezeichnet, und ansonsten durch ein Sternchen angedeutet (jedes solche steht also für ein nach rechts zeigendes Pfeilkreuz). Interessant ist nun die Wirkung der Derivationen: $u\partial_u$ und ∂_θ sind Multiplikationen mit einer Konstanten und deswegen nicht eingezeichnet. Die einzig nichttrivialen Derivationen sind die Elemente R und S. Sie entsprechen (bis auf Vielfache, die hier nicht interessieren) einem „Auf-“ und einem „Absteiger“ bei fixiertem u-Grad.

Als mögliche Gruppenwirkungen auf X_0 bieten sich nun drei Kandidaten an. Die kanonische Wirkung der $\mathrm{SO}^0(2,1)$ ist relativ uninteressant, weil vielfachheitenfrei; ihre eindimensionalen Vielfachheitenräume sind wenig geeignet, um irgendwelche Effekte zu demonstrieren (es sei bemerkt, daß die Derivationen R und S eigentlich von dieser Gruppenwirkung stammen). Stattdessen betrachten wir die multiplikative Wirkung von $\mathbf{R}^*$ auf X_0 (von $\mathbf{C}^*$ auf X), sowie die Drehwirkung der $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ in jeder x-y-Ebene bei festgehaltener z-Koordinate. Diese Gruppenwirkungen haben genau die „Spalten“ bzw. die „Zeilen“ von A als Vielfachheitenräume. Es gilt:

Satz 6.3.

1. *Die Vielfachheitenräume der $\mathbf{R}^*$-Wirkung sind unter $\mathcal{D}^{\mathbf{R}^*}(X_0)^*$ irreduzibel, und die Algebra*
$$\mathcal{D}^{\mathbf{R}^*}(X_0)^* \;=\; \mathbf{C}[R,\, S,\, u\partial_u,\, \partial_\theta]$$
ist nicht abelsch;

2. *Die Vielfachheitenräume der $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$-Wirkung sind unter $\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)^*$ zwar nicht irreduzibel, aber auch nicht zerlegbar, keine zwei Vielfachheitenräume enthalten isomorphe Teildarstellungen und die Algebra*
$$\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)^* \;=\; \mathbf{C}[u,\, u\partial_u,\, \partial_\theta]$$
$\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)^*$ *ist nicht abelsch;*

3. *Die Vielfachheitenräume der $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$-Wirkung sind unter $\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)$ irreduzibel, und die Algebra $\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)$ ist nicht abelsch.*

Beweis. Mit Abbildung 1 bleibt hier fast nichts zu beweisen, da sie die Operation von $\mathcal{D}(X_0)^*$ auf A vollständig beschreibt. Betrachten wir zunächst die $\mathbf{R}^*$-Wirkung: weil es keine nicht-konstanten invarianten Funktionen gibt, sind die Vielfachheiten endlich, und die Irreduzibilität der „Spalten“ wird durch die invarianten Derivationen R und S bewerkstelligt. Invariante Differentialoperatoren höherer Ordnung als die von den genannten erzeugten kann es in $\mathcal{D}(X_0)^*$ nicht geben, weil es keine zur Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen „inversen“ Derivationen gibt (etwa der Form ∂_u); somit scheidet die Möglichkeit, in Abbildung 1 etwa erst nach rechts, dann mit R oder S herauf oder herunter und dann in die ursprüngliche Spalte zurück zugehen, aus. Wegen Gleichung 4 hätte man ∂_θ in der Liste der erzeugenden Elemente auch weglassen können.

Für die $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$-Wirkung ist u eine invariante Funktion, deswegen sind die Vielfachheiten unendlich. Die einzigen G-invarianten Derivationen sind Produkte aus u mit $u\partial_u$ und ∂_θ. Alle aus R, S und den Koordinatenfunktionen konstruierbaren „Pfade" in Abbildung 1, die in der gleichen Zeile anfangen und aufhören, lassen sich als Kombination einer Multiplikation mit einer u-Potenz und den Elementen $u\partial_u$, ∂_θ ausdrücken, deswegen liefern sie keine neuen G-invarianten Differentialoperatoren. Jeder Teilraum, der aus Elementen mit u-Grad größer gleich einer vorgegebenen natürlichen Zahl besteht, ist invariant; aus dem gleichen Grunde sind die Vielfachheitenräume nicht zerlegbar. Zwei solche können keine isomorphen Teildarstellungen haben, weil sich zwei Zeilen immer in ihrem ∂_θ-Eigenwert unterscheiden.

Wirklich zu beweisen gibt es nun etwas bei der letzten Aussage. Die Algebra $\mathcal{D}(X_0)$ aller algebraischer Differentialoperatoren des Kegels kann man nicht bestimmen; aber wir können einen $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$-invarianten Operator hinschreiben, mit dem die Vielfachheitenräume irreduzibel werden. Der Operator

$$D \;:=\; \frac{1}{u}(u\partial_u + i\partial_\theta)(u\partial_u - i\partial_\theta)$$

ist genau so gewählt, daß er den u-Grad um Eins absenkt, sofern er nicht auf ein Element der Gestalt $u^n e^{\pm in\theta}$ wirkt, welches er annuliert. Mit dem Kriterium aus Lemma 1.3 ist D ein zulässiger Differentialoperator zweiter Ordnung und offensichtlich invariant. In der Tat, in die Koordinaten x, y und z zurückübersetzt schreibt sich D als

$$D \;=\; z(\partial_x^2 + \partial_y^2)$$

und verdient damit den Namen „algebraisch". ■

Bemerkung 6.4. Durch Auflösen der Singularität kann man einsehen, daß sich dieses Beispiel noch mit einer anderen Technik behandeln läßt. Es ist nämlich X isomorph zu $\mathbf{C}^2/\{1_2, -1_2\}$. Wählt man auf $\mathbf{C}^2$ Koordinaten v, w, dann wird der Koordinatenring des Quotienten erzeugt von $a := v^2$, $b := vw$ und $c := w^2$ mit der Relation $ac = b^2$. Damit entspricht a dem Element $ue^{i\theta}$, b ist u und c ist $ue^{-i\theta}$. Nun folgt aus neueren Ergebnissen von G. Schwarz [16, 6.4], daß der Ring der Differentialoperatoren auf dem Quotienten nach einer endlichen Gruppe W, welche keine Pseudospiegelungen enthält, von den W-invarianten Differentialoperatoren erzeugt wird, hier also v^2, vw, w^2, $v\partial_v$, $w\partial_w$, $v\partial_w$, $w\partial_v$, ∂_v^2, ∂_w^2, $\partial_v\partial_w$. Die beiden betrachteten Gruppenwirkungen entsprechen dann der Wirkung von $\mathbf{C}^*$ auf $\mathbf{C}^2$ mit Gewichten $(1,1)$ bzw. $(1,-1)$, $\mathcal{D}^G(X)$ wird also von $v\partial_v$, $w\partial_w$, $w\partial_v$, $v\partial_w$ bzw. vw, $v\partial_v$, $w\partial_w$, $\partial_v\partial_w$ erzeugt.

Bemerkung 6.5. Ein kurzer Blick auf den (glatten !) unendlich langen Zylinder Z mit Koordinatenring $\mathbf{C}[u, e^{i\theta}, e^{-i\theta}]$ erklärt, warum hier für die S^1-Wirkung Irreduzibilität vorliegt: in dieser Situation ist nämlich ∂_u eine G-invariante Derivation.

Dieses Beispiel ist noch relativ gutmütig, und man könnte vermuten, daß Satz 2.3 vielleicht in einer schwächeren Version (etwa Unzerlegbarkeit statt Irreduzibilität) gilt. Das folgende Beispiel einer kubischen Regefläche wird zeigen, daß sich diese Hoffnung nicht erfüllt.

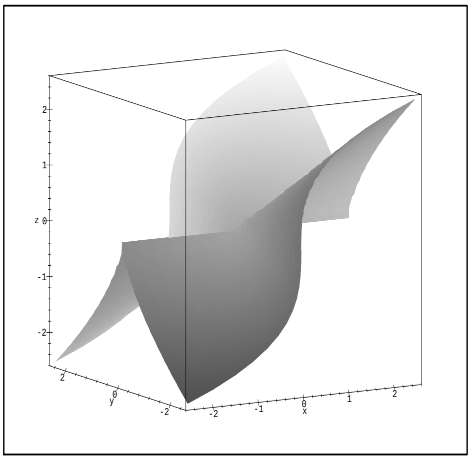

Abbildung 2: $z^3 = xy^2$

Beispiel 6.6. Wir betrachten die irreduzible kubische Regelfläche im $\mathbf{R}^3$ (Abb. 2)

$$Y_0 \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^3 = xy^2\}\,.$$

Sie ist eine reelle Form der komplexen Fläche

$$Y \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^3 = xy^2\}\,,$$

und der singuläre Ort besteht in beiden Fällen aus der x-Achse. Wir identifizieren deswegen wieder $\mathbf{C}[Y]$ mit $\mathbf{R}[Y_0]_{\mathbf{C}}$ und wählen für Y_0 die Parametrisierung

$$x \;=\; rs^2, \quad y \;=\; r/s, \quad z \;=\; r,$$

erhalten also als reguläre Funktionen

$$B \;:=\; \mathbf{R}[Y_0]_{\mathbf{C}} \;\cong\; \mathbf{C}[r, r/s, rs^2]\,,$$

die wir ebenfalls graphisch dargestellt haben (Abb. 3). Um die Wirkung der Algebra $\mathcal{D}(Y_0)^*$ hierauf zu beschreiben, bestimmen wir wieder die Derivationen $\operatorname{Der} Y_0$. Den Koordinaten entsprechen zunächst die Derivationen

$$r\partial_r \;=\; x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \quad \text{und} \quad s\partial_s \;=\; 2x\partial_x - y\partial_y\,.$$

Sodann bestimmen wir mit der gleichen Methode wie in Lemma 6.2 alle Derivationen von B, weswegen wir auf den Beweis verzichten:

Lemma 6.7. (Derivationen der Regelfläche $z^3 = xy^2$)

1. *Ein Element der Gestalt $q\partial_r$ liegt genau dann in* $\operatorname{Der} Y_0$, *wenn q keine Summanden der Gestalt $r^n s^m$ mit $2n = m$ oder $n = -m$ enthält;*

2. *Ein Element der Gestalt $q\partial_s$ liegt genau dann in* $\operatorname{Der} Y_0$, *wenn q von der unter 1. beschriebenen Gestalt ist oder in $s \cdot B$ liegt;*

3. *Ein Element der Gestalt* $q_1\partial_r + q_2\partial_s$ *liegt genau dann in* $\operatorname{Der} Y_0$, *wenn es Summe zweier Derivationen der unter 1. und 2. genannten Gestalt oder in der* B*-linearen Hülle der Derivation*

$$D \;:=\; \frac{r^2}{s^2}\partial_r + \frac{r}{s}\partial_s$$

enthalten ist.

■

Insbesondere gibt es weder den r- noch den s-Grad absenkende Derivationen, und nur die relativ uninteressanten Elemente $r\partial_r$ und $s\partial_s$ erhalten den Grad. Die Wirkung von D ist (bis auf von Null verschiedene Vielfache) in Abbildung 3 dargestellt; im Gegensatz zu zu den Elementen R und S, die beim Kegel aufgetreten waren, verändert D auch den "Spaltengrad". Wegen der geringeren Symmetrie haben wir als Gruppenwirkung hier nur die Wahl zwischen der multiplikativen $\mathbf{R}^*$-Wirkung oder der der s-Koordinate entsprechenden $\mathbf{R}^*$-Wirkung in jeder x-y-Ebene.

Satz 6.8.

1. *Die Vielfachheitenräume der multiplikativen* $\mathbf{R}^*$*-Wirkung zerfallen unter der Wirkung der abelschen Algebra*

$$\mathcal{D}^{\mathbf{R}^*}(Y_0)^* \;=\; \mathbf{C}[r\partial_r,\, s\partial_s]$$

in eindimensionale irreduzible Darstellungen;

2. *Die Vielfachheitenräume der* s*-Wirkung sind unter* $\mathcal{D}^s(Y_0)^*$ *weder irreduzibel noch zerlegbar, und keine zwei Vielfachheitenräume enthalten isomorphe Teildarstellungen der Algebra*

$$\mathcal{D}^s(Y_0)^* \;=\; \mathbf{C}[r,\, r\partial_r,\, s\partial_s]\,.$$

Beweis. Die beiden Behauptungen überlegt man sich leicht anhand von Abbildung 3 und dem vorangegangenen Lemma. Wir bemerken kurz, daß man hier nach dem gleichen Schema wie für den Kegel invariante Differentialoperatoren hinschreiben kann, die nicht in $\mathcal{D}(Y_0)^*$ liegen; zum Beispiel ist

$$T \;:=\; \frac{1}{s}(2r\partial_r - s\partial_s)(r\partial_r + s\partial_s) \;=\; 9z^2\partial^2_{xy} + 3y^2\partial^2_{yz} + 6xy\partial^2_{xz} + 2y\partial_y + 2zy\partial^2_{zz}$$

ein Operator, welcher unter der skalaren $\mathbf{R}^*$-Wirkung invariant ist, den s-Grad um Eins absenkt und die „Lücken“ im Koordinatenring gerade auf Null abbildet.

■

Die erste Aussage ist ein Gegenbeispiel zu Satz 2.5 im singulären Fall: die Algebra $\mathcal{D}^G(M)^*$ ist hier abelsch, obwohl die Wirkung *nicht* vielfachheitenfrei ist.

Danksagung. Mein herzlichster Dank gilt jenen, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit mit wertvollen Hinweisen, Diskussionen oder auch nur ihrer Geduld begleitet haben: dies sind Thomas Friedrich (Humboldt-Universität zu Berlin), Roe Goodman (Rutgers University) und Karl-Hermann Neeb (TU Darmstadt). Weiterhin danke ich dem Referenten für wertvolle Hinweise bei der Vereinfachung der Beweise der Sätze 2.2 und 3.3 sowie die Bemerkung am Ende von Beispiel 6.1 und D. Panyushev (Moskau) für seine Hilfe beim Beweis von Lemma 4.2.

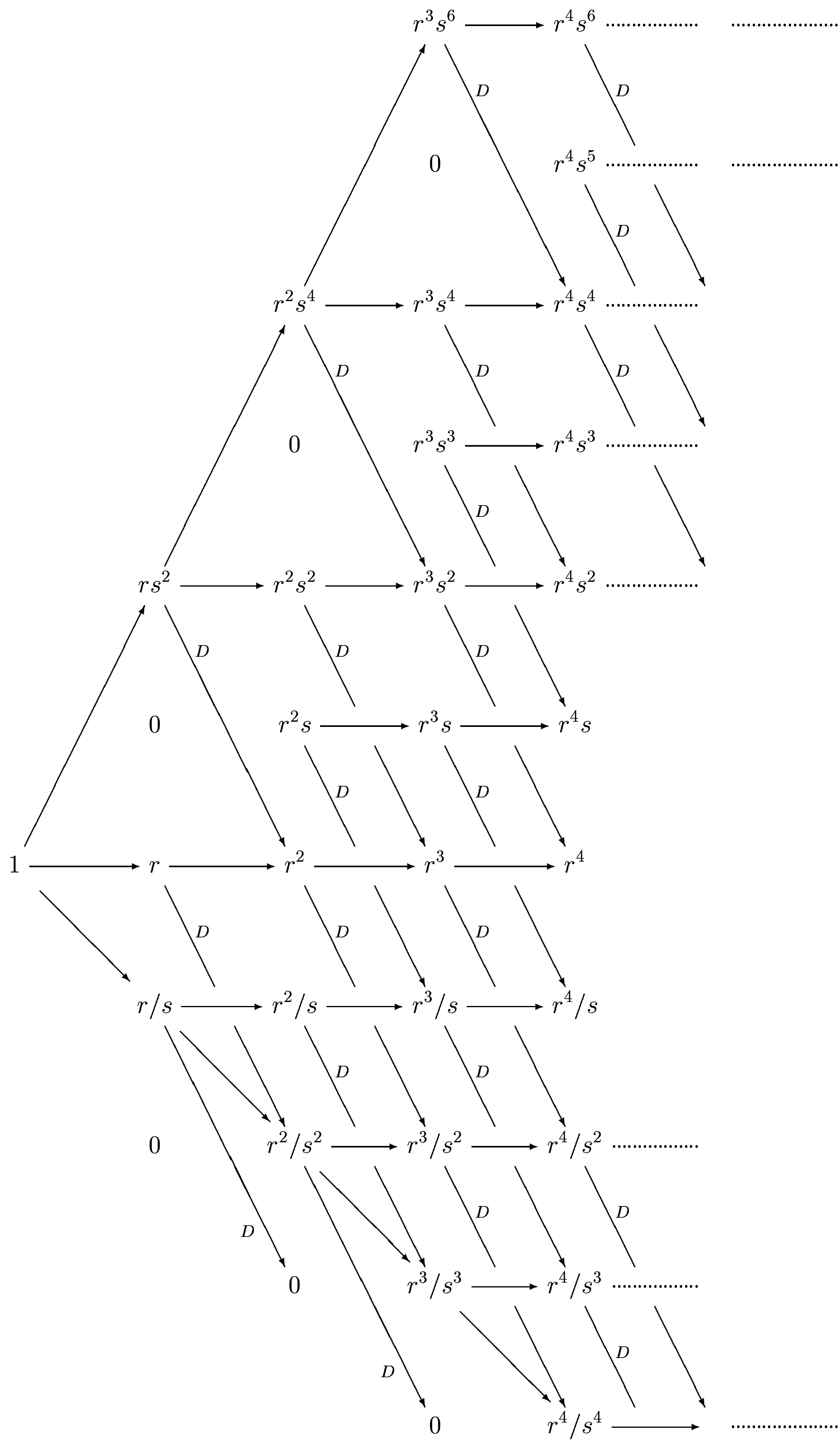

Abbildung 3: Koordinatenring der Regelfläche $z^3 = xy^2$

Literatur

[1] Agricola, I., *Die Frobenius-Zerlegung auf algebraischen G-Mannigfaltigkeiten*, Dissertation, Humboldt-Universität zu Berlin, 2000.

[2] Bien, F., *Orbits, multiplicities and differential operators*, "Representation theory of groups and algebras" (J. Adams et.al., ed.), Contemp. Math., Amer. Math. Soc. vol. **145**, 1993, 199–227.

[3] Benson, C., J. Jenkins, R. L. Lipsman, and G. Ratcliff, *A geometric criterion for Gelfand pairs associated with the Heisenberg group*, Pac. J. Math. **178** (1997), 1–36.

[4] Chevalley, C., *Invariants of finite groups generated by reflections*, Amer. J. Math. **77** (1955), 778–782.

[5] Dixmier, J., "Enveloping algebras," First ed. 1977, Graduate Studies in Mathematics, vol. **11**, Amer. Math. Soc. 1996.

[6] Goodman, R., and N. R. Wallach, "Representations and invariants of the classical groups," Encyclopedia of Mathematics and its Appl., vol. **68**, Cambridge Univ. Press, 1997.

[7] Howe, R., and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[8] Knop, F., *Weylgruppe und Momentabbildung*, Invent. Math. **99** (1990), 1–23.

[9] —, *A Harish-Chandra homomorphism for reductive group actions*, Ann. of Math. **140** (1994), 253–288.

[10] Kraft, H., „Geometrische Methoden in der Invariantentheorie", Vieweg, Braunschweig, 1985.

[11] McConnell, J., and J. Robson, "Noncommutative Noetherian rings," Pure and Applied Mathematics, Wiley Inc., New York, 1987.

[12] Onishchik, A. L., and E. B. Vinberg, "Lie groups and algebraic groups," Series in Soviet Mathematics, Springer, New York et al., 1990.

[13] Pierce, R. S., "Associative algebras," Graduate Texts in Mathematics, vol. **88**, Springer, New York et al., 1982.

[14] Panyushev, D., *Complexity and rank of homogeneous spaces*, Geom. Dedicata **34** (1990), 248–269.

[15] Popov, V. L., T. A. Springer, and E. B. Vinberg, "Algebraic geometry IV – linear algebraic groups, invariant theory," Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 55, Springer, New York et al., 1994.

[16] Schwarz, G. W., *Lifting differential operators from orbit spaces*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **28** (1995), 253–305.

[17] Shepard, G. C., and J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274–304.

[18] Vinberg, E. B., and B. N. Kimel'fel'd, *Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups*, Funct. Anal. and Appl. **12** (1978), 168–174, transl. from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, vol. **12**, 12–19.

[19] Wallach, N.R., "Real reductive groups I," Pure and Applied Mathematics, vol. **132**, Acad. Press, Boston, 1988.

[20] —, *Invariant differential operators on a reductive Lie algebra and Weyl group representations*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 779–816.

[21] Želobenko, D. P., "Compact Lie groups and their representations," 2nd ed. 1978, Transl. of Math. Monographs, vol. **40**, Amer. Math. Soc., Providence, 1973.

Ilka Agricola
Mathematisches Institut der
Humboldt-Universität zu Berlin
D-10099 Berlin
agricola@mathematik.hu-berlin.de

Received June 12, 1999
and in final form May 2, 2000