

## On the Galois group of generalized Laguerre polynomials

par FARSHID HAJIR

À Georges Gras, à l'occasion de son 60ème anniversaire

RÉSUMÉ. En utilisant la théorie des polygones de Newton, on obtient un critère simple pour montrer que le groupe de Galois d'un polynôme soit “grand.” Si on fixe  $\alpha \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}_{<0}$ , Filaseta et Lam ont montré que le Polynôme Généralisé de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n+\alpha}{n-j} (-x)^j / j!$  est irréductible quand le degré  $n$  est assez grand. On utilise notre critère afin de montrer que, sous ces hypothèses, le groupe de Galois de  $L_n^{(\alpha)}(x)$  est soit le groupe alterné, soit le groupe symétrique, de degré  $n$ , généralisant des résultats de Schur pour  $\alpha = 0, 1, \pm \frac{1}{2}, -1 - n$ .

ABSTRACT. Using the theory of Newton Polygons, we formulate a simple criterion for the Galois group of a polynomial to be “large.” For a fixed  $\alpha \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}_{<0}$ , Filaseta and Lam have shown that the  $n$ th degree Generalized Laguerre Polynomial  $L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n+\alpha}{n-j} (-x)^j / j!$  is irreducible for all large enough  $n$ . We use our criterion to show that, under these conditions, the Galois group of  $L_n^{(\alpha)}(x)$  is either the alternating or symmetric group on  $n$  letters, generalizing results of Schur for  $\alpha = 0, 1, \pm \frac{1}{2}, -1 - n$ .

Farshid HAJIR  
Department of Mathematics & Statistics  
University of Massachusetts  
Amherst, MA 01003-9318 USA  
E-mail : hajir@math.umass.edu

---

Manuscrit reçu le 23 juin 2004.

*Mots clefs.* Galois group, Generalized Laguerre Polynomial, Newton Polygon.

This work was supported by the National Science Foundation under Grant No. 0226869.