

Quand seule la sous-somme vide est nulle modulo p

par JEAN-MARC DESHOUILLERS*

RÉSUMÉ. Soit $c > 1$, p un nombre premier et \mathcal{A} une partie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de cardinal supérieur à $c\sqrt{p}$ telle que pour tout sous-ensemble non vide \mathcal{B} de \mathcal{A} , on a $\sum_{b \in \mathcal{B}} b \neq 0$. On montre qu'il existe s premier à p tel que l'ensemble $s\mathcal{A}$ est très concentré autour de l'origine et qu'il est presque entièrement composé d'éléments de partie fractionnaire positive. Plus précisément, on a

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \left\| \frac{sa}{p} \right\| < 1 + O(p^{-1/4} \ln p) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{a \in \mathcal{A}, \\ \{sa/p\} \geq 1/2}} \left\| \frac{sa}{p} \right\| = O(p^{-1/4} \ln p).$$

On montre également que les termes d'erreurs ne peuvent être remplacés par $o(p^{-1/2})$.

ABSTRACT. Let $c > 1$, p be a prime number and \mathcal{A} a subset of $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ with cardinality larger than $c\sqrt{p}$ and such that for any non empty subset \mathcal{B} of \mathcal{A} , one has $\sum_{b \in \mathcal{B}} b \neq 0$. We show that there exists s coprime with p such that the set $s\mathcal{A}$ is very concentrated around the origin, and that it is almost exclusively composed of elements with a positive fractional part. More precisely, one has

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \left\| \frac{sa}{p} \right\| < 1 + O(p^{-1/4} \ln p) \quad \text{and} \quad \sum_{\substack{a \in \mathcal{A}, \\ \{sa/p\} \geq 1/2}} \left\| \frac{sa}{p} \right\| = O(p^{-1/4} \ln p).$$

We also show that the error terms cannot be replaced by $o(p^{-1/2})$.

Jean-Marc DESHOUILLERS
Institut de Cognitique
Université Victor Segalen Bordeaux 2
33076 BORDEAUX Cedex (France)
et
A2X, UMR 5465
Université Bordeaux 1 et CNRS
33405 TALENCE Cedex (France)
E-mail : jean-marc.deshouillers@math.u-bordeaux1.fr

Manuscrit reçu le 15 janvier 2006.

* Supported by Université Victor Segalen Bordeaux 2 (EA 2961), Université Bordeaux1 and CNRS (UMR 5465).