

On Robin's criterion for the Riemann hypothesis

par YOUNGJU CHOIE, NICOLAS LICHARDOPOL, PIETER MOREE
et PATRICK SOLÉ

RÉSUMÉ. Le critère de Robin spécifie que l'hypothèse de Riemann (RH) est vraie si et seulement si l'inégalité de Robin $\sigma(n) := \sum_{d|n} d < e^\gamma n \log \log n$ est vérifiée pour $n \geq 5041$, avec γ la constante d'Euler(-Mascheroni). Nous montrons par des méthodes élémentaires que si $n \geq 37$ ne satisfait pas au critère de Robin il doit être pair et il n'est ni sans facteur carré ni non divisible exactement par un premier. Utilisant une borne de Rosser et Schoenfeld, nous montrons, en outre, que n doit être divisible par une puissance cinquième > 1 . Comme corollaire, nous obtenons que RH est vraie ssi chaque entier naturel divisible par une puissance cinquième > 1 vérifie l'inégalité de Robin.

ABSTRACT. Robin's criterion states that the Riemann Hypothesis (RH) is true if and only if Robin's inequality $\sigma(n) := \sum_{d|n} d < e^\gamma n \log \log n$ is satisfied for $n \geq 5041$, where γ denotes the Euler(-Mascheroni) constant. We show by elementary methods that if $n \geq 37$ does not satisfy Robin's criterion it must be even and is neither squarefree nor squarefull. Using a bound of Rosser and Schoenfeld we show, moreover, that n must be divisible by a fifth power > 1 . As consequence we obtain that RH holds true iff every natural number divisible by a fifth power > 1 satisfies Robin's inequality.

YoungJu CHOIE
Dept of Mathematics
POSTECH
Pohang, Korea 790-784
E-mail : yjc@postech.ac.kr
URL: <http://www.postech.ac.kr/department/math/people/choieyoungju.htm>

Nicolas LICHARDOPOL
ESSI
Route des Colles
06 903 Sophia Antipolis, France
E-mail : lichiard@essi.fr

Pieter MOREE
Max-Planck-Institut für Mathematik

Vivatsgasse 7
D-53111 Bonn, Germany
E-mail : moree@mpim-bonn.mpg.de
URL: <http://guests.mpim-bonn.mpg.de/moree/>

Patrick SOLÉ
CNRS-I3S
ESSI
Route des Colles
06 903 Sophia Antipolis, France
E-mail : sole@essi.fr
URL: <http://www.i3s.unice.fr/~sole/>