Mathematica Pannonica
1/1 (1990), 117 – 123

SU UN ASSIOMA INTERESSANTE LA TEORIA DEGLI "INTERVAL ORDERS"

Romano **Isler**

Dipartimento di Matematica Applicata "Bruno de Finetti", Università, I-34100 - TRIESTE, Piazzale Europa 1, Italia.

Received September 1988

AMS Subject Classification: 06 A 10, 05 A 15

Keywords: Interval order, representation theorem

Abstract: Given a set X with a strong order, satisfying the usual axioms $a \not\prec a \; \forall a$ and transitivity, if we add axiom: $(a_1 \prec a_2) \wedge (b_1 \prec b_2) \Rightarrow \Rightarrow (a_1 \prec b_2) \vee (b_1 \prec a_2)$ we obtain the so called "interval order" which was deeply studied first by P.C. Fishburn.

If we substitute such axiom with the following:
$(a_1 \prec a_2) \wedge (b_1 \prec b_2) \Rightarrow (a_1 \prec b_1) \vee (b_1 \prec a_1) \vee (a_2 \prec b_2) \vee (b_2 \prec a_2)$
we obtain a different order structure which implies the "interval order". Such order structure is analized and many results are obtained including a very simple proof of a theorem of representability, analogous to a fundamental theorem on interval orders due to Fishburn.

In un mio precedente lavoro avevo introdotto un assioma che indeboliva, in un certo senso nel modo più blando possibile, gli assiomi dell'ordine debole o concordante in un insieme E.

Precisamente, considerati gli assiomi usuali dell'ordine forte (o stretto)

(1) $a \not\prec a \quad \forall a$

(2) $a \prec b \Rightarrow b \not\prec a$

(3) $a \prec b,\ b \prec c \Rightarrow a \prec c$

posto l'assioma della negativa transitività:

(4) $a \not\prec b,\ b \not\prec c \Rightarrow a \not\prec c$

si aveva gli assiomi (2), (4) che individuavono l'ordine debole erano equivalenti agli assiomi (2), (3), (5) dove

(5) $a\ I\ b \Rightarrow (a \prec x \Rightarrow b \prec x) \wedge (x \prec a \Rightarrow x \prec b)$ con

$a\ I\ b \Leftrightarrow (a \not\prec b) \wedge (b \not\prec a)$.

L'assioma (5) definiva una relazione concordante e dunque gli assiomi (2), (3), (5) un ordine concordante in quanto, per parlare d'ordine, pretenderemo sempre verificate le (1), (2), (3).

Inoltre, introdotti gli assiomi

(4^*) $a \prec a' \Rightarrow (a \prec b) \vee (b \prec a') \quad \forall b \in E$

(4^*_*) $a_1 \prec a_2 \prec a_3 \Rightarrow (b \prec a_2) \vee (a_2 \prec b) \vee (a_1 \prec b \prec a_3) \quad \forall b \in E$

valevano le (4) $\Leftrightarrow$ (4^*) $\Leftrightarrow$ (4^*_*).

Assiomi che indeboliscano un ordine debole sono i seguenti

(4') $a_1 \prec a_2 \prec a_3 \Rightarrow (a_1 \prec b) \vee (b \prec a_3)$

(4") $(a_1 \prec a_2) \wedge (b_1 \prec b_2) \Rightarrow (a_1 \prec b_2) \vee (b_1 \prec a_2)$

(4"') $(a_1 \prec a_2) \wedge (b_1 \prec b_2) \Rightarrow (a_1 \prec b_1) \vee (b_1 \prec a_1) \vee (a_2 \prec b_2) \vee (b_2 \prec a_2)$

In una relazione d'ordine si ha (4"') $\Rightarrow$ (4"). Per il resto (4'), (4") e (4"') sono fra loro slegati.

L'assioma (4") definisce quello che, in letteratura, è noto come *"interval order"* mentre gli assiomi (4')$\wedge$(4") il "semiorder". Non essendomi noto uno studio, nè tantomeno l'introduzione, dell'assioma (4"'), mi propongo di studiare la struttura d'ordine che esso induce, con particolare riguardo all'esistenza di funzioni di valutazione.

Poichè (4"') $\Rightarrow$ (4"), i risultati che otteremo comprenderanno anche quelli riguardanti gli interval orders.

Ci proponiamo dunque di studiare la struttura d'ordine nel caso dell'assioma (4"') che indebolisce l'ordine concordante in un certo senso meno dell'assioma (4") (toglie una confrontabilità, ossia una relazione di preferenza, contro le due dell'assioma (4")).

Sia E un insieme con una relazione $\prec$ per la quale valgano gli assiomi (2), (3), (4"'). Indicheremo con $|A|$ la cardinalità dell'insieme A. Con $a \rightarrow b$ la $a \prec b$.

Proposizione 1.1. *Sia C_α una catena massimale, $|C_\alpha| > 1$ e $b \notin C_\alpha$, b non isolato. Allora b è confrontabile con C_α ossia $\exists a \in C_\alpha : b \not I a$.*

Dim. Sia per esempio $b \to b_1$, $b_1 \notin C_\alpha$. Sia b inconfrontabile con ogni $a \in C_\alpha$. Poichè $|C_\alpha| > 1$ $\exists a_1 \in C_\alpha : (a_1 \to a) \vee (a \to a_1)$. Se $a_1 \to a$, poichè b è inconfrontabile con a_1 e con a, ne viene, per (4"), $a \to b_1$. Se invece $a \to a_1$ ne viene $a_1 \to b_1$ da cui $a \to b_1$. Ma allora $a \to b_1$ $\forall a \in C_\alpha$, ossia C_α non è massimale: impossible.

Proposizione 1.2. *Sia $b \notin C_\alpha$. $\exists \bar{a} \in C_\alpha : bI\bar{a}$*

Dim. Ovvia, stante la massimalità.

Proposizione 1.3. *Sia $b \notin C_\alpha$ non isolato. Se esiste $b_1 : b \to b_1$, l'intervallo di inconfrontabilità con b di C_α è superiormente limitato.*

Dim. Se $b_1 \in C_\alpha$ è ovvio. Sia $b_1 \notin C_\alpha$. Sia $a \in C_\alpha : b \ I \ a$. Se fosse $b \ I \ a_1$ $\forall a_1 \in C_\alpha : a \to a_1$, seguirebbe, per (4"), $a_1 \to b_1$ e quindi C_α non massimale.

Analoga proposizione vale se esiste $b_1 : b_1 \to b$. Allora l'intervallo di inconfrontabilità con b : $I(C_\alpha, b)$ è inferiormente limitato.

Proposizione 1.4. *Sia $b \notin C_\alpha$ non isolato. Se esiste $b_1 \notin C_\alpha : (b_1 \to$ $\to b) \vee (b \to b_1)$, allora $I(C_\alpha, b)$ è un singleton.*

Dim. Sia per esempio $b \to b_1$. Sia $a \in C_\alpha : a \ I \ b$. Sia $a_1 \in C_\alpha : a_1 \ I \ b$ e sia per assurdo $a_1 \neq a$; se $a \to a_1$ l'elemento $\bar{a}$ di inconfrontabilità con b_1 deve seguire $a : a \to \bar{a}$; infatti da (4") segue $a_1 \to b_1$ e se fosse $\bar{a} \overset{\to}{=} a$, poichè $a \to a_1 \to b_1$, seguirebbe $\bar{a} \to b_1$. Ma allora, da $a \to \bar{a}$, $b \to b_1$ si giunge ad un assurdo per (4"). Analogmente se $a_1 \to a$.

Corollario 1.5. *Nelle ipotesi precedenti, $I(C_\alpha, b) = I(C_\alpha, b_1)$.*

Dim. Pressochè ovvia.

Corollario 1.6. *Dette C_α e C_β due catene massimali diverse, $C_\alpha - C_\beta$ e $C_\beta - C_\alpha$ sono due intervalli di mutua indifferenza di cui almeno uno un singleton.*

Dim. In base alla 1.4, se C_α e C_β differiscono per più di un elemento, per esempio $|C_\beta - C_\alpha| > 1$, $b \in C_\beta - C_\alpha$, allora $C_\alpha - C_\beta = I(C_\alpha, b) =$

$= \{a\}$ e $C_\beta - C_\alpha = I(C_\beta, a)$. Se $|C_\alpha - C_\beta| = |C_\beta - C_\alpha| = 1$, allora $I(C_\alpha, b) = \{a\}$ e $I(C_\beta, a) = \{b\}$.

Proposizione 1.7. *Sia $b \notin C_\alpha$ non isolato. Se b è massimale, l'insieme $I(C_\alpha, b)$ è una semiretta positiva.*

Dim. Pressochè evidente, atteso che $\exists a \in C_\alpha : a\ I\ b$.

Definizione 1.8. Diremo che *due catene massimali sono equivalenti* e scriveremo $C_\alpha \approx C_\beta$ se, $\forall a \in C_\alpha$, $\forall b \in C_\beta$, $|I(C_\alpha, b)| = |I(C_\beta, a)| = 1$.

Proposizione 1.9. *Se vale* (4"), *allora $\approx$ è una equivalenza.*

Dim. Le proprietà riflessiva e simmetrica sono ovvie. Siano ora $C_\alpha \approx$ $\approx C_\beta$, $C_\beta \approx C_\gamma$ e dimostriamo che $C_\alpha \approx C_\gamma$.

Sia $a \in C_\alpha$. O $a \in C_\beta$ e non c'è nulla da dimostrare oppure $a \notin C_\beta$. Allora $I(C_\beta, a) = \{b\} \neq \{a\}$. In tal caso C_α e C_β differiscono per i due punti a e b e, per 1.6, solo per tali due punti. Ma $|I(C_\gamma, b)| = 1$. Se $I(C_\gamma, b) = \{b\}$ o $= \{a\}$ siamo a posto. Altrimenti $I(C_\gamma, b) = \{c\}$ $(\neq \{a\}, \neq \{b\})$. Dimostriamo che $a\ I\ c$. Se fosse $c \to a$, preso $a_1 \in C_\alpha :$ $: a_1 \to a$, sarebbe $a_1 \to b$ e quindi, essendo $b\ I\ c$, $a_1 \to c$. Allora C_α non sarebbe massimale. Analogamente se fosse $a \to c$. Dunque $c \in I(C_\gamma, a)$. Se poi esistesse $c_1 \to c$, $c_1 \in I(C_\gamma, a)$, ne verrebbe $c_1 \to b$; inoltre $\forall b_1 \to b$, $b_1 \in C_\beta$, sarà anche $b_1 \in C_\alpha$, $b_1 \to a$ da cui ne segue $b_1 \to c_1$ $(\in I(C_\gamma, a))$. Allora $b_1 \to c_1 \to b$ e C_β non sarebbe massimale. Analogamente non può esistere c_1 tale che $c \to c_1$, $c_1 \in I(C_\gamma, a)$. Dunque $|I(C_\gamma, a)| = 1$. Analogamente $|I(C_\alpha, c)| = 1$.

Definizione 1.10. Diremo che $C_\alpha \prec C_\beta \Leftrightarrow |C_\beta - C_\alpha| > 1$.

Osservazione. Se $C_\alpha \prec C_\beta$, e se vale (4"), $|C_\alpha - C_\beta| = 1$ e quindi $C_\alpha \prec C_\beta \Rightarrow C_\beta \not\prec C_\alpha$.

Proprietà 1.11. *Per la relazione in* 1.10 *vale la proprietà transitiva:* $C_\alpha \prec C_\beta$, $C_\beta \prec C_\gamma \Rightarrow C_\alpha \prec C_\gamma$.

Dim. Sia $\{a\} = C_\alpha - C_\beta$; $\{b\} = C_\beta - C_\gamma$ e consideriamo $I(C_\beta, a) =$ $= C_\beta - C_\alpha$. Siano $b_1, b_2 \in C_\beta - C_\alpha$; per esempio $b_1 \to b_2$; siano $c_1, c_2 \in$ $\in C_\gamma - C_\beta$; per esempio $c_1 \to c_2$. Allora $b \in I(C_\beta, a)$. Se fosse $b \notin$ $\notin I(C_\beta, a)$, sarebbe ad esempio $b \to a$. Ma allora $b \to b_1$ e, siccome $b\ I\ c_1$, sarebbe $c_1 \to b_1$. Da $b \to a$, $c_1 \to b_1$ seguirebbe, per (4"),

$(b \not\to c_1) \vee (a \not\to b_1)$; imposssibile. Ora $c_1 \neq a$. Se fosse $c_1 = a$, da $c_1 \to c_2$, seguirebbe $b \to c_2$, impossibile. Analogamente $c_2 \neq a$. Inoltre $c_1 \notin C_\alpha$, altrimenti $(c_1 \to a) \vee (a \to c_1)$ da cui $(c_1 \to b) \vee (b \to c_1)$, impossibile. Analogamente $c_2 \notin C_\alpha$.

Proposizione 1.12. *La relazione $\approx$ è compatibile con la $\prec$.*

Dim. Sia $C'_\alpha \approx C''_\alpha \prec C_\beta$. Dimostriamo che $C'_\alpha \prec C_\beta$. Siano $b_1, b_2 \in$ $\in C_\beta$, inconfrontabili con $\bar{a} \in C''_\alpha$. Se $\bar{a} \in C'_\alpha$ siamo a posto. Altrimenti $\bar{a} = a'' = C''_\alpha - C'_\alpha$; sia $\{a'\} = C'_\alpha - C''_\alpha$. Potrebbe essere $b_1 \circ b_2 = a'$? Se fosse per esempio $b_2 = a'$, avremmo $b_1 \to a'$. Se $a' = \min C'_\alpha$, avremmo un assurdo (C'_α massimale). Altrimenti $\exists a \to a'$, $a \in C'_\alpha$. Allora $a \to a''$. $\forall a \to a'$, $a \in C'_\alpha$ avremmo $a \to a''$, $b_1 \to a' \Rightarrow a \to b_1$ (non può essere $b_1 \to a$, altrimenti $b_1 \to a''$). Ma allora C'_α non sarebbe massimale. Da ciò la tesi.

Proposizione 1.13. *Dati C_α, C_β è $(C_\alpha \prec C_\beta) \vee (C_\alpha \approx C_\beta) \vee (C_\alpha \succ$ $\succ C_\beta)$ e quindi $(E/\approx, \prec)$ è un ordine lineare.*

Dim. Evidente in base alle precendenti proprietà dimostrate.

Teorema 1.14. *Sia E senza punti isolati e poniamoci in $E/\approx$. Posto $C = \bigcup_\alpha C_\alpha - \bigcup_{\alpha\beta}(C_\alpha - C_\beta)$ con $|C_\alpha - C_\beta| = 1$, C_α famiglia delle catene massimali a 2 a 2 non equivalenti, C è una catena massimale.*

Dim. Siano $x_1, x_2 \in C$; $x_1 \neq x_2$. Allora $\exists \bar{\alpha} : \{x_1\} \cup \{x_2\} \in C_{\bar{\alpha}}$ da cui $(x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_1)$. Dunque C è una catena. Proviamo che è massimale. Sia C non massimale. Esiste allora una catena massimale $C_{\bar{\alpha}} \supset C$. Sia $y \in C_{\bar{\alpha}} - C$. Allora $\exists \beta_i, \alpha_i : \{y\} = C_{\beta_i} - C_{\alpha_i}$; ma allora y sarebbe inconfrontabile con i punti di $C_{\alpha_i} - C_{\beta_i}$ che sono più di uno. Ma y è confrontabile con ogni punto di C ed in C stanno i punti di ciascuna catena C_α escluso al più uno. Dalla contraddizione si ha la tesi.

Corollario 1.15. *Esiste in $(E/\approx, \prec)$ una catena massimale massima.*

Dim. $|C - C_\alpha| \neq 1$ $\forall \alpha$. Dunque C, nell'ordine $(E/\approx, \prec)$ è le massima catena massimale.

Sia allora C tale catena massimale. Ogni altro punto x di E o è isolato o è inconfrontabile con un intervallo di C. Se tale intervallo è un singleton $\{a\}$, allora $C \approx (C - \{a\}) \cup \{x\}$. Altrimenti è un intervallo $I(C, x)$. Si ha allora

Proposizione 1.16. $x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad [I(C, x_1) \subset I(C, x_2)] \vee [I(c, x_1) \supset \supset I(C, x_2)]$.

Dim. Se $I(C, x_1)$ o $I(C, x_2) = C$, la proposizione è vera. Siano allora diversi da C e supponiamo la tesi non valga. Esiste allora $a_1 \in I(C, x_1)$, $a_1 \notin I(C, x_2)$ e $a_2 \in I(C, x_2)$, $a_2 \notin I(C, x_1)$. Sia per esempio $a_1 \rightarrow \rightarrow a_2$. D'altra parte $x_1 \; I \; x_2$ perchè altrimenti C non sarebbe massimale. Allora dev'essere $x_1 \rightarrow a_2$ e $a_1 \rightarrow x_2$, da cui, per (4"'), dovrebbe seguire $(x_1 \not\curlyvee a_1) \vee (x_2 \not\curlyvee a_2)$, impossibile.

Corollario 1.17. *Data la catena C di* 3.15, *l'insieme degli intervalli di inconfrontabilità di C con gli $x \notin C$ è linearmente ordinato per inclusione.*

Dim. Ovvia.

Proposizione 1.18 (Theorema di Fishburn). *Se $E/\approx$ è numerabile, esistono due funzioni a valori reali $v(x)$ e $\sigma(x)$, con $\sigma(x) \geq 0$, tali che $x_1 \rightarrow x_2 \Leftrightarrow v(x_1) + \sigma(x_1) < v(x_2)$.*

Dim. Sia $\bar{v}(x)$ una qualunque funzione di valutazione su C con inf $\bar{v}(C) > -\infty$ e sup $\bar{v}(C) < +\infty$. Posto $v(x) = \bar{v}(x)$ e $\sigma(x) = 0 \; \forall x \in C$ e $v(x) = \inf \bar{v}(I(C, x))$, $\sigma(x) = \sup \bar{v}(I(C, x)) - \inf \bar{v}(I(C, x))$, si ha la tesi.

Nota. Si noti che l'assioma (4"') è più debole, ossia implica, l'assioma (4"). Dunque la dimostrazione del teorema avviene in una situazione assiomaticamente più semplice che nel teorema originale di Fishburn, dove ci si mette nel caso degli interval orders, ossia dell'assioma (4"). Tuttavia ritengo sia possibile usare tecniche analoghe, ancorchè più complesse, per dimostrare il teorema originale e mi riprometto di ritornare sull'argomento.

Bibliografia

[1] FISHBURN, P.C.: Utility theory for decision making, Wiley, New York. Reprinted by Krieger, Huntington, New York, 1979.

[2] FISHBURN, P.C.: Interval orders and interval graphs, Wiley interscience Series in Discret' Mathematics, New York, 1985.

[3] ISLER, R.: Su alcuni assiomi in teoria delle decisioni, *Quad. matem. Dip. mat. appl. "B. de Finetti"*, 4/88, Trieste.

[4] FRENCH, S.: Decision Theory, Ellis Horwood Series in Mathematics and its applications, 1986, Chichester, England.