

# EIN KUGELPROBLEM IM EUKLIDISCHEN RAUM

Hans Sachs

*Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuniversität, Franz-Josef-Straße 18, A-8700 Leoben, Österreich*

Meinem verehrten Freund und Kollegen,  
Herrn o. Univ.-Prof. Dr. H. Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet

Received October 1994

MSC 1991: 53 A 04, 53 A 40

*Keywords:* Abstandsfläche zweier Drehzylinder, Zykliken des pseudoisotropen Raumes.

**Abstract:** Given 4 cylinders of revolution  $\Phi_1, \dots, \Phi_4$  in three-dimensional euclidean space  $E_3$ . To find all spheres touching to  $\Phi_1, \dots, \Phi_4$ . It is shown that in general case over the field  $\mathbb{C}$  of complex numbers 512 spheres of this kind exist. All points with the same distance from  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  are located on 2 cyclides of order 4 in a pseudo-isotropic space  $I_3^{(1)*}$ . Distinguishing 3 types of these cyclides some geometrical results are deduced. Furthermore the congruence of all spheres which touch  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  is investigated.

## 1. Einleitung

Den folgenden Betrachtungen liegt der dreidimensionale euklidische Raum  $E_3$  zugrunde, den wir stets auf ein kartesisches Rechtssystem  $\{U; x, y, z\}$  beziehen. Im Mittelpunkt unserer Untersuchungen steht die folgende Fragestellung: Gegeben sind 4 Drehzylinder  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  mit den Achsen  $g_1, g_2, g_3, g_4$  und den Radien  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . Man bestimme alle Kugeln, die  $\Phi_1, \dots, \Phi_4$  berühren. Die Lösung dieser Fragestellung erfolgt in § 2, wobei vor allem jene Fläche untersucht wird, deren Punkte von 2 Drehzylindern gleichen Abstand besitzen. Diese Fläche besteht aus 2 Zykliken eines pseudoisotropen Raumes. In § 3 wird schließlich jene Kugelkongruenz untersucht, die aus allen Kugeln besteht, die zwei Drehzylinder  $\Phi_1, \Phi_2$  berühren. Hierbei werden bei al-

len Betrachtungen 2 Berührungstypen unterschieden, die gesondert behandelt werden müssen. Der Sonderfall  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0$ , d.h. die Frage nach allen Kugeln, die 4 (paarweise windschiefe) Geraden des  $E_3$  berühren wurde in [3] bzw. [12] behandelt. Dieses spezielle Kugelberührproblem wurde im einfach isotropen Raum von F. Mészáros und H. Sachs (vgl. [9]), im Flaggenraum von F. Mészáros untersucht (vgl. [10]).

## 2. Behandlung des Hauptproblems

Zur Lösung des Hauptproblems bestimmen wir zunächst die Abstandsfläche zweier Drehzylinder  $\Phi_1, \Phi_2$  mit den Radien  $R_1, R_2$  und den

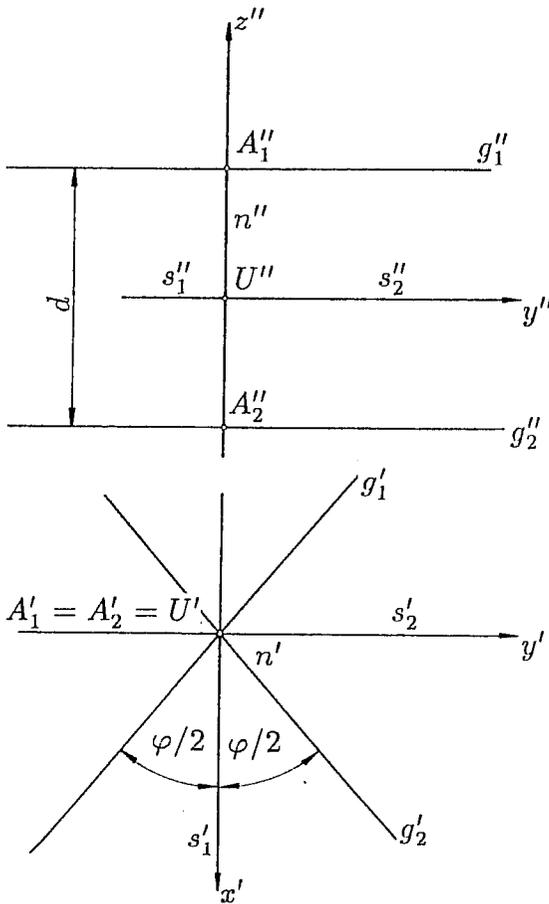


Abbildung 1

Achsen  $g_1$  und  $g_2$ . Hierbei setzen wir die Geraden  $g_1, g_2$  als windschief voraus, und behandeln den Fall schneidender Achsen als Sonderfall mit. Bezeichnet  $n$  die Gemeinnormale von  $g_1$  und  $g_2$  (vgl. [2,23]) und bedeuten  $A_1$  bzw.  $A_2$  die Schnittpunkte von  $n$  mit  $g_1$  bzw.  $g_2$ , so wählen wir den Mittelpunkt  $U$  der Strecke  $\overline{A_1A_2}$  als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit  $n$  als  $z$ -Achse (vgl. Abbildung 1). Verschiebt man die Geraden  $g_1, g_2$  parallel durch den Punkt  $U$ , so erhält man zwei Geraden  $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ , deren Winkelsymmetralen  $s_1, s_2$  man als räumliche Winkelsymmetralen (Bisektoren) von  $g_1$  und  $g_2$  bezeichnet (vgl. [1,51]). Wählt man diese Geraden als  $x$ - bzw.  $y$ -Achse des zu-

grundegelegten Koordinatensystems, dann besitzen  $g_1$  und  $g_2$  die Darstellungen

$$(2.1 \text{ a,b}) \quad \begin{aligned} g_1 \dots \vec{x} &= (0, 0, \frac{1}{2}d) + \lambda(\cos \frac{\varphi}{2}, -\sin \frac{\varphi}{2}, 0) \\ g_2 \dots \vec{x} &= (0, 0, -\frac{1}{2}d) + \lambda(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2}, 0), \end{aligned}$$

wobei  $\overline{A_1 A_2} =: d$  gesetzt wurde und  $\varphi$  den Winkel der beiden windschiefen Geraden  $g_1, g_2$  bezeichnet;  $d$  ist der Abstand der beiden windschiefen Geraden. Ein Punkt  $P(x, y, z)$  besitzt dann von  $g_1$  bzw.  $g_2$  die Abstände  $l_1 = \overline{P g_1}$  bzw.  $l_2 = \overline{P g_2}$ , die nach [3] durch

$$(2.2 \text{ a,b}) \quad \begin{aligned} l_1^2 &= (x \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2})^2 + (z - \frac{1}{2}d)^2 \\ l_2^2 &= (x \sin \frac{\varphi}{2} - y \cos \frac{\varphi}{2})^2 + (z + \frac{1}{2}d)^2 \end{aligned}$$

gegeben sind. Insbesondere werden die Drehzylinder  $\Phi_1$  bzw.  $\Phi_2$  beschrieben durch

$$(2.3 \text{ a,b}) \quad \begin{aligned} R_1^2 &= (x \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2})^2 + (z - \frac{1}{2}d)^2 \quad \text{bzw.} \\ R_2^2 &= (x \sin \frac{\varphi}{2} - y \cos \frac{\varphi}{2})^2 + (z + \frac{1}{2}d)^2. \end{aligned}$$

Für die Berührung einer Kugel  $\kappa$  mit einem Drehzylinder  $\Phi$  gibt es 2 Typen, wie die Abbildung 2 a,b zeigt.

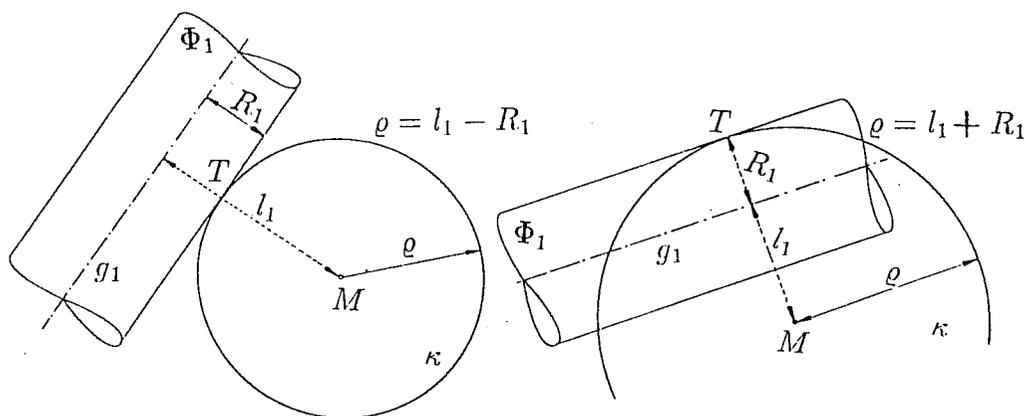


Abbildung 2 a,b

Bei einer Berührung von Außen besteht  $\Phi \cap \kappa$  über dem Körper

der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  nun aus dem Berührungspunkt  $T$ , während bei einer Berührung von Innen  $\Phi \cap \kappa$  aus einer reellen Raumkurve 4. Ordnung, 1. Art besteht. Bezeichnet  $\rho$  den Kugelradius,  $R$  den Zylinderradius und  $l$  den Abstand des Kugelmittelpunktes von der Zylinderachse, dann gilt im ersten Fall  $\rho = l - R$ , im zweiten Fall  $\rho = l + R$ . Für das folgende geben wir die

**Definition.** Eine Kugel berührt zwei Drehzylinder von *erster Art* (zweiter Art), wenn die Berührung *beidemale von Außen oder Innen* (einmal von Außen und einmal von Innen) erfolgt.

Für die Berührung 1. Art einer Kugel mit zwei Drehzylindern  $\Phi_1, \Phi_2$  mit den Radien  $R_1, R_2$  und den Abständen  $\overline{Mg}_1 = l_1, \overline{Mg}_2 = l_2$  ergibt sich dann unmittelbar

$$(2.4 \text{ a}) \quad l_1 - l_2 = \varepsilon_2 R_2 - \varepsilon_1 R_1$$

mit  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$  bzw.  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ . Für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$  erfolgt die Berührung beidemale von Außen, für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  beidemale von Innen. Für eine Berührung 2. Art ergibt sich

$$(2.4 \text{ b}) \quad l_1 - l_2 = \varepsilon_2 R_2 + \varepsilon_1 R_1,$$

wobei  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$  oder  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  gelten kann. Aus (2.4 a,b) ergibt sich durch Quadrieren

$$(2.5 \text{ a,b}) \quad 2l_1 l_2 = l_1^2 + l_2^2 - (R_1 \mp R_2)^2,$$

wobei das obere (untere) Vorzeichen für eine Berührung 1. Art (2. Art) gilt. Setzt man abkürzend

$$(2.6) \quad r_{12} := -\frac{1}{2}(R_1 \mp R_2)^2,$$

so erhält man aus (2.5 a,b) und (2.2 a,b) nach längerer Rechnung als Abstandsfläche die beiden algebraischen Flächen  $\Psi_{12}$  bzw.  $\bar{\Psi}_{12}$  4. Ordnung

$$(2.7) \quad (dz - xy \sin \varphi)^2 + 2r_{12}(x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + y^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + z^2) + \frac{1}{2}r_{12}(d^2 + 2r_{12}) = 0.$$

Die Fläche  $\Psi_{12}$  gehört hierbei zum Wert

$$(2.8) \quad r_1 =: r = -\frac{1}{2}(R_1 - R_2)^2,$$

während sich die Fläche  $\bar{\Psi}_{12}$  für

$$(2.9) \quad r_2 =: \bar{r} = -\frac{1}{2}(R_1 + R_2)^2$$

einstellt. Für  $R_1 \neq R_2$  gilt stets  $r_{12} < 0$  und es ist  $r \neq \bar{r}$ . Die Flächen  $\Psi_{12}$  und  $\bar{\Psi}_{12}$  sind somit verschieden. Werden i.f. die Flächen  $\Psi_{12}$  und  $\bar{\Psi}_{12}$  gemeinsam behandelt, dann schreiben wir an Stelle von  $r_{12}$  einfach  $r$ . Die Flächen (2.7) lassen sich auch in der Gestalt

$$(2.10) \quad z^2(d^2 + 2r) - 2d \sin \varphi xyz + x^2 y^2 \sin^2 \varphi + 2r(x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + y^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}) + \frac{1}{2}r(d^2 + 2r) = 0$$

schreiben. Für  $r \neq 0$  sind dies 2 Zykliden in einem pseudoisotropen Raum  $I_3^{(1)*}$ , wobei die absoluten Geraden dieses Raumes die Ferngeraden jener Ebenenstellungen sind, die durch  $n$  und die räumlichen Winkelsymmetralen von  $g_1$  und  $g_2$  festgelegt werden (vgl. [11,24f]). Flächen dieser Art wurden von M. Husty und O. Röschel in [4]–[6] betrachtet; eine umfassende Theorie wurde von F. Mészáros in [8] entwickelt. In ähnlichem Zusammenhang kommt diese bemerkenswerte Fläche auch in [7,343] vor. Besitzen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  gleiche Radien  $R_1 = R_2$ , dann ist  $\Psi_{12}$  ein hyperbolisches Paraboloid mit der Gleichung

$$(2.11) \quad z = \frac{\sin \varphi}{d} xy,$$

wie es nach [3] sein muß. Aus den Berührungskugeln von  $g_1$  und  $g_2$  entstehen ja durch Veränderung des Radius um  $\pm R_1$  dann die gesuchten Zylinderberührungskugeln. Zur Untersuchung der Zykliden (2.10) bestimmen wir die Hauptachsenfläche  $\Sigma^*$  (vgl. [4] – [6], [8]) durch partielle Ableitung von (2.10) nach  $z$ . Man gelangt dann zu folgender Fallunterscheidung: FALL I:  $d^2 + 2r \neq 0$ ,  $d \neq 0$ . Die Zylinderachsen sind windschief und es gilt  $d \neq |R_1 - R_2|$ . In diesem Fall ist  $\Sigma^*$  die parabolische Sphäre

$$(2.12) \quad \Sigma^* \dots z = \frac{d \sin \varphi}{d^2 + 2r} xy.$$

FALL II:  $d^2 + 2r \neq 0$ ,  $d = 0$ . Die Zylinderachsen schneiden sich, aber es ist  $R_1 \neq R_2$ . In diesem Fall vereinfacht sich (2.10) zu

$$(2.13) \quad 2rz^2 + (2x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + r)(2y^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + r) = 0$$

und man findet für  $\Sigma^*$  die doppelt zu zählende nichtisotrope Ebene  $z = 0$ .

FALL III:  $d^2 + 2r = 0$ ,  $d \neq 0$ . Die Zylinderachsen sind windschief und es gilt  $d = |R_1 - R_2|$ , d.h. die Drehzylinder  $\Phi_1, \Phi_2$  berühren sich innerlich. Die Flächengleichung lautet jetzt

$$(2.14) \quad 2d \sin \varphi xyz - x^2 y^2 \sin^2 \varphi + d^2 (x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + y^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}) = 0$$

und  $\Sigma^*$  besteht aus den beiden vollisotropen Ebenen  $x = 0$  und  $y = 0$ . Gilt schließlich  $d = 0$  und  $R_1 = R_2$ , dann besteht die Abstandsfläche aus den beiden Symmetrieebenen von  $g_1$  und  $g_2$ . Wir haben damit den

**Satz 1.** *Sind  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  zwei Drehzylinder mit verschiedenen Radien  $R_1, R_2$ , dann liegen die Mittelpunkte aller  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  berührenden Kugeln auf zwei Zykliden 4. Ordnung (2.10) eines pseudoisotropen Raumes  $I_3^{(1)*}$ , wobei die absoluten Geraden von  $I_3^{(1)*}$  die Ferngeraden jener Ebenenstellungen sind, die durch die Gemeinnormalen  $n$  der Zylinderachsen  $g_1, g_2$  und durch die räumlichen Winkelsymmetralen von  $g_1$  und  $g_2$  festgelegt werden. Sind  $g_1$  und  $g_2$  windschief und gilt  $d \neq |R_1 - R_2|$ , dann sind die Hauptachsenflächen von  $\Psi_{12}$  und  $\bar{\Psi}_{12}$  zwei parabolische Sphären (2.12) des  $I_3^{(1)*}$ . Schneiden sich die Zylinderachsen  $g_1$  und  $g_2$ , dann besitzen die Zykliden  $\Psi_{12}$  und  $\bar{\Psi}_{12}$  die doppelt zu zählende Ebene  $z = 0$  als Hauptachsenfläche. Berühren sich die Zylinder  $\Phi_1, \Phi_2$  innerlich und sind die Achsen von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  windschief, dann ist die Abstandsfläche eine Zyklide mit der Gleichung (2.14). Die Hauptachsenfläche besteht in diesem Fall aus den beiden vollisotropen Ebenen durch die Gemeinnormale von  $g_1$  und  $g_2$ .*

Der Satz 1 liefert den Schlüssel zur Lösung des Hauptproblems. Bestimmt man zu 4 vorgegebenen Zylindern  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  die Abstandsflächen  $\Psi_{12}, \Psi_{23}, \Psi_{34}$  bzw.  $\bar{\Psi}_{12}, \bar{\Psi}_{23}, \bar{\Psi}_{34}$  und bringt je 3 dieser Flächen zum Schnitt, so gewinnt man je 64 Punkte über dem Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen, falls die Zylinder allgemein liegen. Dies soll bedeuten, daß die Abstandszykliden keine Fernpunkte gemeinsam haben. Auf diese Weise erhält man  $8^3 = 512$  Lösungskugeln über  $\mathbb{C}$ .

**Satz 2.** *Sind  $\Phi_1, \dots, \Phi_4$  vier Drehzylinder mit paarweise verschiedenen Radien allgemeiner Lage, dann existieren im algebraischen Sinn über dem Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen 512 Kugeln, die  $\Phi_1, \dots, \Phi_4$  berühren. Die Mittelpunkte dieser Kugeln erhält man als Schnittpunkte von je drei algebraischen Flächen 4. Ordnung, die man als Zykliden in je einem pseudoisotropen Raum deuten kann.*

Wir untersuchen als nächstes die charakteristische Kurve  $c$  der drei Typen von Zykliden (2.10), (2.13) und (2.14), d.h. die Schnittkurve der Zyklide mit  $\Sigma^*$ .

FALL I: Wird (2.12) in (2.10) eingesetzt, so erhält man für den Grundriß

von  $c$  nach einiger Rechnung

$$(2.15) \quad x^2 y^2 + \frac{d^2 + 2r}{\sin^2 \varphi} \left( x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + y^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{4} \frac{(d^2 + 2r)^2}{\sin^2 \varphi} = 0.$$

Diese Gleichung gestattet die Faktorzerlegung

$$(2.16) \quad \left( x^2 + \frac{d^2 + 2r}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right) \left( y^2 + \frac{d^2 + 2r}{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right) = 0.$$

Der Grundriß von  $c$  besteht somit für die Zyklide  $\Psi_{12}$  bzw.  $\bar{\Psi}_{12}$  aus je vier Geraden

$$(2.17) \quad x = \pm \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{-(d^2 + 2r)}, \quad y = \pm \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \sqrt{-(d^2 + 2r)},$$

die für  $d^2 < (R_1 \mp R_2)^2$ , d.h.  $d < |R_1 \mp R_2|$  reell sind. Führt man die Abkürzungen

$$(2.18 \text{ a,b}) \quad c_0 := +\sqrt{-(d^2 + 2r)}, \quad \bar{c}_0 := +\sqrt{-(d^2 + 2\bar{r})}$$

ein, so erhält man aus (2.17) und (2.12) als charakteristische Kurve  $c$  bzw.  $\bar{c}$  auf  $\Psi_{12}$  bzw.  $\bar{\Psi}_{12}$  je 4 Geraden  $f_1, \dots, f_4$  bzw.  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_4$  mit den Darstellungen

$$(2.19 \text{ a-d}) \quad \begin{aligned} f_1 & \dots \dots \left\{ x = \frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, z = -\frac{d}{c_0} \cos \frac{\varphi}{2} y \right\} \\ f_2 & \dots \dots \left\{ x = -\frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, z = \frac{d}{c_0} \cos \frac{\varphi}{2} y \right\} \\ f_3 & \dots \dots \left\{ y = \frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, z = -\frac{d}{c_0} \sin \frac{\varphi}{2} x \right\} \\ f_4 & \dots \dots \left\{ y = -\frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, z = \frac{d}{c_0} \sin \frac{\varphi}{2} x \right\} \end{aligned}$$

bzw.

$$(2.20 \text{ a-d}) \quad \begin{aligned} \bar{f}_1 & \dots \dots \left\{ x = \frac{\bar{c}_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, z = -\frac{d}{\bar{c}_0} \cos \frac{\varphi}{2} y \right\} \\ \bar{f}_2 & \dots \dots \left\{ x = -\frac{\bar{c}_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, z = \frac{d}{\bar{c}_0} \cos \frac{\varphi}{2} y \right\} \\ \bar{f}_3 & \dots \dots \left\{ y = \frac{\bar{c}_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, z = -\frac{d}{\bar{c}_0} \sin \frac{\varphi}{2} x \right\} \\ \bar{f}_4 & \dots \dots \left\{ y = -\frac{\bar{c}_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, z = \frac{d}{\bar{c}_0} \sin \frac{\varphi}{2} x \right\}. \end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, daß die 4 Geraden  $f_1, \dots, f_4$  die Zylinderachsen  $g_1, g_2$  in den 4 Punkten  $S_1 = g_1 f_1, S_2 = g_2 f_1, S_3 = g_1 f_3, S_4 = g_2 f_2$  schneiden, wobei gilt

$$(2.21 \text{ a-d}) \quad S_1 \left( \frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, -\frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, \frac{d}{2} \right), \quad S_2 \left( \frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, -\frac{d}{2} \right), \\ S_3 \left( -\frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, \frac{d}{2} \right), \quad S_4 \left( -\frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, -\frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, -\frac{d}{2} \right).$$

Analoges gilt für die Fläche  $\bar{\Psi}_{12}$ , wobei für die Punkte  $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_4$  in (2.11 a-d)  $c_0$  durch  $\bar{c}_0$  zu ersetzen ist. Die Punkte  $S_1, \dots, S_4$  sind die 4 singulären Punkte der Zyklide  $\Psi_{12}$ . Die geometrische Situation zeigt das Blockdiagramm der Abbildung 3.

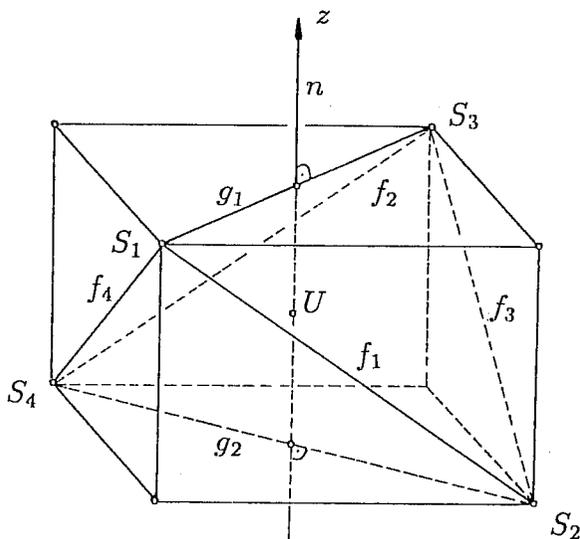


Abbildung 3

Für  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  sind die Punkte  $S_1, \dots, S_4$  die Ecken eines Würfels. Aus (2.19 a,b) und (2.20 a,b) folgt noch, daß die Geraden  $f_1, f_2, \bar{f}_1, \bar{f}_2$  auf dem hyperbolischen Paraboloid

$$(2.22) \quad dy = -2tg \frac{\varphi}{2} xz$$

liegen. Man bestätigt mittels (2.1 a,b) auch leicht, daß die Geraden  $g_1, g_2$  und  $n$  auf (2.22) liegen. Ebenso liegen  $f_3, f_4, \bar{f}_3, \bar{f}_4, g_1, g_2$  und  $n$  auf

dem hyperbolischen Paraboloid

$$(2.23) \quad dx = -2ctg \frac{\varphi}{2} yz.$$

FALL II: Spezialisiert man die Resultate aus (2.19 a-d) und (2.20 a-d) auf den Fall  $d = 0$ , so erhält man je 4 Geraden  $f_1, \dots, f_4$  bzw.  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_4$  in der Ebene  $z = 0$ . Für  $\Psi_{12}$  findet man

$$(2.24) \quad \begin{aligned} f_1 \dots \left\{ x = \frac{|R_1 - R_2|}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, z = 0 \right\}, f_2 \dots \left\{ x = -\frac{|R_1 - R_2|}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, z = 0 \right\}, \\ f_3 \dots \left\{ y = \frac{|R_1 - R_2|}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, z = 0 \right\}, f_4 \dots \left\{ y = -\frac{|R_1 - R_2|}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, z = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Für die Fläche  $\bar{\Psi}_{12}$  ist  $|R_1 - R_2|$  durch  $R_1 + R_2$  zu ersetzen.

FALL III: Aus (2.14) und  $x = 0$  bzw.  $y = 0$  ergibt sich  $c$  als Gemeinnormale  $n$  von  $g_1$  und  $g_2$ . Damit haben wir den

**Satz 3.** Die charakteristische Kurve  $c$  der Abstandszyklide  $\Psi_{12}$  ( $\bar{\Psi}_{12}$ ) zweier Drehzylinder mit den Achsen  $g_1, g_2$  und den Radien  $R_1 \neq R_2$  besteht aus 4 Geraden  $f_1, f_2, f_3, f_4$  ( $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4$ ). Die Geraden  $f_1, f_2, \bar{f}_1, \bar{f}_2, g_1, g_2$  und die Gemeinnormale  $n$  von  $g_1$  und  $g_2$  liegen auf einem hyperbolischen Paraboloid (2.22). Ebenso liegen  $f_3, f_4, \bar{f}_3, \bar{f}_4, g_1, g_2$  und  $n$  auf einem hyperbolischen Paraboloid (2.23). Die Geraden  $f_1, \dots, f_4$  ( $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_4$ ) bilden jenes windschiefe Erzeugendenvierseit auf der Hauptachsenfläche  $\Sigma^*$  ( $\bar{\Sigma}^*$ ), das die 4 singulären Punkte  $S_1, \dots, S_4$  von  $\Psi_{12}$  ( $\bar{\Psi}_{12}$ ) enthält. Hierbei sind  $S_1, S_3$  ( $\bar{S}_1, \bar{S}_3$ ) die Schnittpunkte von  $g_1$  mit  $\Psi_{12}$  ( $\bar{\Psi}_{12}$ ), während  $S_2, S_4$  ( $\bar{S}_2, \bar{S}_4$ ) die Schnittpunkte von  $g_2$  mit  $\Psi_{12}$  ( $\bar{\Psi}_{12}$ ) sind. Für zwei Drehzylinder mit schneidenden Achsen  $g_1, g_2$  und verschiedenen Radien besteht die charakteristische Kurve von  $\Psi_{12}$  und  $\bar{\Psi}_{12}$  aus je 4 Geraden  $f_1, \dots, f_4$  bzw.  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_4$  in der von  $g_1$  und  $g_2$  aufgespannten Ebene. Berühren sich zwei Zylinder mit verschiedenen Radien innerlich, dann besteht die charakteristische Kurve der Abstandszyklide  $\Psi_{12}$  aus der gemeinsamen Normalen  $n$  im Berührungspunkt der beiden Zylinder.

Wir bezeichnen im FALL I die vollisotrope Ebene durch die Geraden  $f_1, \dots, f_4$  bzw.  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_4$  mit  $\eta_1, \dots, \eta_4$  bzw.  $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_4$  und untersuchen die Schnittellipsen mit den Zylindern  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ . Wir beschränken uns dabei auf die Zyklide  $\Psi_{12}$  und übertragen die Resultate auf  $\bar{\Psi}_{12}$  durch die Ersetzung  $c_0 \rightarrow \bar{c}_0$ . Da man die Geraden  $f_1, f_2$  nach (2.19 a,b) durch  $\left\{ x = \frac{\varepsilon c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, z = \frac{-\varepsilon d}{c_0} \cos \frac{\varphi}{2} y \right\}$  mit  $\varepsilon = \pm 1$  beschreiben kann, lautet die

Gleichung der Schnittellipse in der Ebene  $\eta_1$  bzw.  $\eta_2$  unter Beachtung von (2.3 a,b)

$$(2.25 \text{ a,b}) \quad \begin{aligned} R_1^2 &= \left(z - \frac{1}{2}d\right)^2 + \left(y \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{\varepsilon c_0}{2}\right)^2 && \text{bzw.} \\ R_2^2 &= \left(z + \frac{1}{2}d\right)^2 + \left(y \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{\varepsilon c_0}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Diese beiden Ellipsen besitzen gemeinsame konjugiert-komplexe Fernpunkte und somit über  $\mathbb{C}$  noch 2 Schnittpunkte im Endlichen bei algebraischer Zählung; ihre Achsen sind parallel. Elimination von  $y$  aus den Gleichungen (2.25 a,b) ergibt nach einiger Rechnung eine quadratische Gleichung mit der Doppelwurzel  $z = -\frac{d}{2} \frac{R_1+R_2}{R_1-R_2}$ . Setzt man  $z$  in die aus (2.25 a,b) fließende Gleichung  $R_1^2 - R_2^2 = -2dz + 2\varepsilon c_0 y \cos \frac{\varphi}{2}$  ein, so gewinnt man  $y = \frac{c_0}{2\varepsilon \cos \frac{\varphi}{2}} \frac{R_1+R_2}{R_1-R_2}$ . Mit einer analogen Rechnung für die Ebenen  $\eta_3, \eta_4$  erhält man insgesamt die 4 Punkte  $K_1, \dots, K_4$  in den Ebenen  $\eta_1, \dots, \eta_4$  zu

$$(2.27 \text{ a-d}) \quad \begin{aligned} K_1 &\left( \frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}, -\frac{d}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \right), \\ K_2 &\left( -\frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, -\frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}, -\frac{d}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \right), \\ K_3 &\left( \frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}, \frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, -\frac{d}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \right), \\ K_4 &\left( -\frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}, \frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, -\frac{d}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \right). \end{aligned}$$

Die aus  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  von den Ebenen  $\eta_i (i = 1, \dots, 4)$  herausgeschnittenen Ellipsen berühren sich in den Punkten  $K_i (i = 1, \dots, 4)$ , die alle in der Ebene  $\zeta \dots z = -\frac{d}{2} \frac{R_1+R_2}{R_1-R_2}$  liegen. Weiter erkennt man, daß die Punkte  $K_i$  auf den Geraden  $f_i (i = 1, \dots, 4)$  liegen, und die Strecken  $\overline{K_1 K_2}$  und  $\overline{K_3 K_4}$  sich im Punkt

$$(2.28) \quad H\left(0, 0, -\frac{d}{2} \frac{R_1+R_2}{R_1-R_2}\right)$$

schneiden;  $H$  ist der Mittelpunkt von  $\overline{K_1 K_2}$  bzw.  $\overline{K_3 K_4}$ . Somit bilden  $K_1, \dots, K_4$  die Ecken eines Parallelogramms, das die Ebene  $\zeta$  aus dem Viereck  $f_1, \dots, f_4$  ausschneidet. Für  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  ist  $K_1, \dots, K_4$  ein Rhombus. Analoges gilt für  $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_4$ . Damit haben wir

**Satz 4.** Die charakteristischen Ebenen  $\eta_1, \dots, \eta_4$  ( $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_4$ ) schneiden die Zylinder  $\Phi_1, \Phi_2$  mit den Radien  $R_1 \neq R_2$  im Fall windschiefer

Achsen nach Paaren von Ellipsen mit parallelen Achsen, die sich in den Punkten  $K_1, \dots, K_4$  ( $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_4$ ) berühren. Die Punkte  $K_1, \dots, K_4$  ( $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_4$ ) bilden ein Rechteck in der Ebene  $\zeta(z = -\frac{d}{2} \frac{R_1+R_2}{R_1-R_2})$ , dessen Ecken auf den Geraden  $f_1, \dots, f_4$  ( $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_4$ ) liegen.

Wir untersuchen noch, ob die Zykliken  $\Psi_{12}$  und  $\bar{\Psi}_{12}$  eine im Endlichen gelegene Schnittkurve besitzen. Dazu bilden wir die Differenz der mit  $r$  und  $\bar{r}$  angeschriebenen Gleichungen (2.10). Wegen  $r \neq \bar{r}$  findet man

$$(2.29) \quad x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + y^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + z^2 = \frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2) - \frac{1}{4}d^2.$$

Dies ist für  $R_1^2 + R_2^2 > \frac{1}{2}d^2$  ein Ellipsoid, für  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  sogar ein Drehellipsoid. Wird (2.29) in (2.10) eingesetzt, so findet man nach kurzer Rechnung die beiden hyperbolischen Paraboloid

$$(2.30 \text{ a,b}) \quad dz - xy \sin \varphi = \pm \frac{1}{2}(R_1^2 - R_2^2).$$

Die im Endlichen gelegene Schnittkurve von  $\Psi_{12}$  und  $\bar{\Psi}_{12}$  besteht somit aus zwei Raumkurven 4. Ordnung, 1. Art, die durch Schnitt von (2.29) mit (2.30 a,b) erzeugt werden können. Zur näheren Beschreibung dieser Kurven betrachten wir zunächst die durch den Schnitt von (2.29) und (2.30 a) legbaren Kegel. Mit den Abkürzungen  $k_1 := \frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2) - \frac{1}{4}d^2$  und  $k_2 := \frac{1}{2}(R_1^2 - R_2^2)$  ist auf das Flächenbüschel 2. Ordnung

$$(2.31) \quad \lambda(x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + y^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + z^2 - k_1) + \mu(dz - xy \sin \varphi - k_2) = 0$$

die Kegelbedingung

$$(2.32) \quad \begin{vmatrix} \lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2} & -\frac{1}{2}\mu \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\mu \sin \varphi & \lambda \cos^2 \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \frac{1}{2}d\mu \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}d\mu & -\lambda k_1 - \mu k_2 \end{vmatrix} = 0$$

anzuwenden. Diese Gleichung besitzt die Lösungen

$$(2.33 \text{ a-d}) \quad \lambda = \pm\mu, \quad d\mu^2 + 4\lambda\mu k_2 + 4k_1\lambda^2 = 0.$$

Von Interesse sind vor allem die Lösungen  $\lambda = \pm\mu$ . Wird  $\lambda = \mu$  in (2.31) eingesetzt, so erhält man den Drehzylinder

$$(2.34) \quad (x \sin \frac{\varphi}{2} - y \cos \frac{\varphi}{2})^2 + (z + \frac{1}{2}d)^2 = R_1^2.$$

Ein Vergleich mit (2.2 b) zeigt, daß dies ein Drehzylinder mit der Achse  $g_2$  vom Radius  $R_1$  ist. Die Lösung  $\lambda = -\mu$  liefert den Drehzylinder

$$(2.35) \quad \left(x \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}d\right)^2 = R_2^2$$

vom Radius  $R_2$  und der Drehachse  $g_1$ . Analog erhält man für die durch (2.29) und (2.30 b) festgelegte Raumkurve 4. Ordnung die beiden Zylinder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  (2.3 a,b). Die erste Lösung liefert in der Tat zwei einparametrische Kugelscharen vom Radius  $|R_2 - R_1|$  bzw.  $R_2 + R_1$ , die mit  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  eine Berührung 1. Art bzw. 2. Art besitzen. Die zweite Lösung ist trivial; sie ergibt Berührungskugeln vom Radius null.

Für zwei Drehzylinder mit schneidenden Achsen ( $d = 0$ ) und verschiedenen Radien verlaufen die Überlegungen analog. Wir vermerken den

**Satz 5.** Die Schnittkurve der beiden Abstandszykliden  $\Psi_{12}$  und  $\bar{\Psi}_{12}$  zweier Drehzylinder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  und den Achsen  $g_1$  und  $g_2$  besteht aus zwei Raumkurven 4. Ordnung, erster Art. Eine dieser Raumkurven ist die Schnittkurve der Zylinder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ . Die zweite Raumkurve ergibt sich als Schnittkurve eines Drehzylinders vom Radius  $R_1$  und der Achse  $g_2$  mit einem Drehzylinder vom Radius  $R_2$  und der Achse  $g_1$ . Zu dieser Schnittkurve gehören zwei einparametrische Scharen von Berührungskugeln vom Radius  $R_2 + R_1$  bzw.  $|R_2 - R_1|$ , die eine Berührung 1. Art bzw. 2. Art mit  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  ergeben.

### 3. Die Kugelkongruenz K

Alle Kugeln, die zwei Drehzylinder  $\Phi_1, \Phi_2$  mit den Achsen  $g_1, g_2$  und den Radien  $R_1, R_2$  von 1. Art (2. Art) berühren bilden eine Kugelkongruenz  $K$  ( $\bar{K}$ ). Die beiden Kugelkongruenzen schneiden sich einerseits in der Punktmenge  $\Phi_1 \cap \Phi_2$ , d.h. einer Schar von Kugeln vom Radius Null, andererseits nach den beiden einparametrischen Scharen von Berührungskugeln, die im Satz 5 erwähnt wurden. Wir geben i.f. nur einige Resultate für die Kugelkongruenz  $K$  an. Hierbei setzen wir den FALL I oder II voraus. Auf jeder Geraden parallel zur Gemeinnormalen  $n$  von  $g_1$  und  $g_2$  liegen über  $C$  die Mittelpunkte  $M, \hat{M}$  zweier Kongruenzkugeln. Für  $x = x_0, y = y_0$  sind diese durch die Nullstellen der Gleichung (2.10) bestimmt. Nach Vietà folgt für die Punkte  $M(x_0, y_0, z), \hat{M}(x_0, y_0, \hat{z})$  aus (2.10)

$$(3.1) \quad z + \hat{z} = \frac{2d \sin \varphi}{d^2 + 2r} x_0 y_0.$$

Der Mittelpunkt  $S[x_0, y_0, \frac{1}{2}(z + \hat{z})]$  dieser beiden Kugelmitten liegt nach (2.12) somit auf der Hauptachsenfläche  $\Sigma^*$ . Es gilt  $M = \hat{M} = S$  für Punkte auf  $\Psi_{12}$  und  $\Sigma^*$ , d.h. nach Satz 3 für die Punkte auf den charakteristischen Geraden  $f_1, \dots, f_4$ . Wir leiten als nächstes zwei interessante Abstandsformeln her. Es bezeichnen  $l_1 := \overline{Mg_1}$ ,  $\hat{l}_1 = \overline{\hat{M}g_1}$ ,  $l_2 := \overline{Mg_2}$ ,  $\hat{l}_2 := \overline{\hat{M}g_2}$ ,  $h_1 := \overline{Sg_1}$  und  $h_2 := \overline{Sg_2}$ . Dann berechnen wir nach (2.2 a,b)

$$(3.2 \text{ a,b}) \quad \begin{aligned} h_1^2 &= \left(x_0 \sin \frac{\varphi}{2} + y_0 \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{d \sin \varphi}{d^2 + 2r} x_0 y_0 - \frac{1}{2}d\right)^2 \\ h_2^2 &= \left(x_0 \sin \frac{\varphi}{2} - y_0 \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{d \sin \varphi}{d^2 + 2r} x_0 y_0 + \frac{1}{2}d\right)^2, \end{aligned}$$

woraus

$$(3.3) \quad h_1^2 - h_2^2 = \frac{4r \sin \varphi}{d^2 + 2r} x_0 y_0$$

folgt. Andererseits berechnet man nach (2.2 a,b)

$$(3.4) \quad l_1^2 - l_2^2 + \hat{l}_1^2 - \hat{l}_2^2 = \frac{8r \sin \varphi}{d^2 + 2r} x_0 y_0,$$

woraus sich mittels (3.3) die von  $g$  unabhängige Abstandsformel

$$(3.5) \quad l_1^2 - l_2^2 + \hat{l}_1^2 - \hat{l}_2^2 = 2(h_1^2 - h_2^2)$$

ergibt. Weiter folgt  $l_1^2 - \hat{l}_1^2 - l_2^2 + \hat{l}_2^2 = 2d(\hat{z} - z)$  und hieraus fließt, wenn man den Abstand der beiden Kugelmittelpunkte  $M$  und  $\hat{M}$  mit  $m := |\overline{M\hat{M}}|$  bezeichnet,

$$(3.6) \quad m = \frac{1}{2d} |l_1^2 - \hat{l}_1^2 - l_2^2 + \hat{l}_2^2|.$$

Im FALL II ( $d = 0$ ) liegen nach (3.1) die Kugelmitten  $M$  und  $\hat{M}$  symmetrisch zur Ebene  $z = 0$  und es gilt  $l_1 = \hat{l}_1$ ,  $l_2 = \hat{l}_2$ . Aus (3.5) folgt dann

$$(3.7) \quad l_1^2 - l_2^2 = h_1^2 - h_2^2.$$

An die Stelle von (3.6) tritt mit  $\overline{gn} =: k$  die Formel

$$(3.8) \quad m^2 = 2(l_1^2 + l_2^2 - k^2).$$

Damit haben wir den

**Satz 6.** *Es bezeichne  $K$  die Kongruenz aller Kugeln, die zwei Drehzylinder mit den Achsen  $g_1, g_2$  von 1. Art berühren. Dann liegen auf jeder*

Geraden  $g$  parallel zur Gemeinnormalen  $n$  von  $g_1$  und  $g_2$  im FALL I oder II zwei Kugelmittelpunkte  $M, \hat{M}$  im algebraischen Sinn. Im FALL I liegen  $M$  und  $\hat{M}$  symmetrisch zum hyperbolischen Paraboloid (2.12), im FALL II symmetrisch zur Ebene  $z = 0$ . Genau für Punkte auf dem Erzeugendenvierseit  $f_1, f_2, f_3, f_4$  gilt  $M = \hat{M}$ . Es gelten die Abstandsformeln (3.5)–(3.8).

Wir untersuchen noch, ob in der Kugelkongruenz  $K$  einparametrische Kugelscharen liegen, deren Hüllfläche eine Drehfläche ist. Die Mittenkurve dieser Kugelhüllfläche muß somit eine Gerade sein. Zur Lösung dieser Fragestellung ist daher vorerst zu untersuchen, ob auf der Zyklide (2.10) außer  $f_1, f_2, f_3, f_4$  weitere Geraden liegen. Geraden dieser Art müssen entweder vollisotrop oder isotrop sein. Für eine vollisotrope Gerade  $x = x_0 = \text{konst.}$ ,  $y = y_0 = \text{konst.}$  auf  $\Psi_{12}$  müßte (2.10) für alle  $z$  erfüllt sein, woraus  $d^2 + 2r = 0$  folgen würde, was im FALL I oder II nicht möglich ist. Schneiden wir weiters (2.10) mit der vollisotropen Ebene  $x = x_0 = \text{konst.}$ , so erhält man die Kurve 2. Ordnung

$$(3.9) \quad z^2(d^2 + 2r) + a_{22}y^2 - 2d \sin \varphi x_0 y z + a_{00} = 0,$$

wobei  $a_{22} := x_0^2 \sin^2 \varphi + 2r \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $a_{00} := 2rx_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}r(d^2 + 2r)$  gesetzt wurde. (3.9) zerfällt genau dann in 2 Geraden, wenn

$$(3.10) \quad \begin{vmatrix} d^2 + 2r & -dx_0 \sin \varphi & 0 \\ -dx_0 \sin \varphi & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{00} \end{vmatrix} = 0$$

gilt. Eine einfache Rechnung zeigt, daß (3.10) nur für  $x_0 = \pm \frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$  erfüllt ist. Somit sind die Geraden  $f_1, f_2$  die einzigen Geraden, die in vollisotropen Ebenen  $x = x_0 = \text{konst.}$  liegen. Analog beweist man, daß in vollisotropen Ebenen  $y = y_0 = \text{konst.}$  nur die Flächengeraden  $f_3$  und  $f_4$  liegen. Da alle Überlegungen auch für  $d = 0$  gelten, hat man:

*Auf der Zyklide  $\Psi_{12}$  liegen im FALL I oder II nur die Flächengeraden  $f_1, \dots, f_4$ .*

Wir beschränken uns i.f. auf die Untersuchung jener Drehfläche, die zur Drehachse  $f_1$  gehört. Es sei  $M$  ein auf  $f_1$  laufender Punkt, den wir dann in der Gestalt

$$(3.11) \quad M\left(\frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, c_0 t, -dt \cos \frac{\varphi}{2}\right)$$

ansetzen können. Für die Abstände  $l_1 = \overline{Mg_1}$  und  $l_2 = \overline{Mg_2}$  berechnet

man

$$(3.12 \text{ a,b}) \quad l_1 = |R_1 - R_2| \left| t \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \right|, \quad l_2 = |R_1 - R_2| \left| t \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \right|.$$

Setzt man o.B.d.A.  $R_1 > R_2$  voraus und beschränkt man sich auf das Intervall  $t > \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}$ , dann können die Beträge in (3.12 a,b) wegfallen und man berechnet für den Radius  $\rho(t)$  der zu  $M$  gehörigen Berührungskugel von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$

$$(3.13) \quad \rho(t) = (R_1 - R_2)t \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(R_1 + R_2).$$

Die gesuchte Kugelschar ist somit durch

$$(3.14) \quad F \equiv \left(x - \frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2 + (y - c_0 t)^2 + (z + dt \cos \frac{\varphi}{2})^2 - \\ - \left[ (R_1 - R_2)t \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \right]^2 = 0$$

gegeben. Die Charakteristiken der Hüllfläche werden durch (3.14) und

$$(3.15) \quad \frac{\partial F}{\partial t} \equiv c_0(y - c_0) - (z + dt \cos \frac{\varphi}{2})d \cos \frac{\varphi}{2} + \\ + \left[ (R_1 - R_2)t \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \right] (R_1 - R_2) \cos \frac{\varphi}{2} = 0$$

festgelegt. Wir führen nun ein neues kartesisches Koordinatensystem  $\{\bar{U}; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$  ein, wobei  $\bar{U}$  den Schnittpunkt von  $f_1$  mit der alten  $x$ -Achse bezeichnet,  $x = \bar{x}$  gilt und die  $\bar{y}$ -Achse mit  $f_1$  zusammenfällt. Dann gilt für  $\mu := \bar{U}\bar{M}$  ersichtlich  $\mu^2 = \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = t^2(-d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2r)$ , d.h.

$$(3.16) \quad \mu = t \sqrt{-(2r + d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2})}$$

und aus (3.13) folgt

$$(3.17) \quad \rho(\mu) = A_0 \mu + B_0,$$

wobei abkürzend

$$(3.18 \text{ a,b}) \quad A_0 := \frac{(R_1 - R_2) \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-(2r + d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2})}}, \quad B_0 := -\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$$

gesetzt wurde. Die den Meridian der Drehfläche festlegende Kreisschar ist nun durch

$$(3.19) \quad G(\mu) \equiv (\bar{y} - \mu)^2 + \bar{z}^2 - (A_0 \mu + B_0)^2 = 0$$

gegeben. Man berechnet hieraus

$$(3.20) \quad \frac{\partial G}{\partial \mu} \equiv (\bar{y} - \mu) + (A_0 \mu + B_0) A_0 = 0$$

und findet schließlich aus (3.19) und (3.20) nach einiger Rechnung die Meridiankurve

$$(3.21) \quad \begin{cases} \bar{y} = \mu(1 - A_0^2) - A_0 B_0 \\ \bar{z} = \pm (A_0 \mu + B_0) \sqrt{1 - A_0^2}. \end{cases}$$

Hierbei gilt

$$(3.22) \quad 1 - A_0^2 = \frac{(2r+d^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2r+d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Für  $d > R_1 - R_2$  stellt (3.21) zwei reelle Geraden dar, die zur  $\bar{y}$ -Achse symmetrisch liegen und sich im Punkt  $K_1$  ( $\bar{y} = -\frac{B_0}{A_0}$ ,  $\bar{z} = 0$ ) schneiden. Die Kugelhüllfläche ist daher ein Drehkegel  $\Gamma_1$  mit  $f_1$  als Achse und der Spitze  $K_1$ . Da zu  $K_1$  der Parameterwert  $\mu = -\frac{B_0}{A_0}$  gehört, gilt nach (3.16)  $t = \frac{R_1 + R_2}{2(R_1 - R_2) \cos \frac{\varphi}{2}}$  und man findet im alten Koordinatensystem

$$(3.23) \quad K_1 \left( \frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \frac{c_0}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}, -\frac{d}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \right),$$

was mit (2.27 a) übereinstimmt. Wir bestimmen als nächstes die Berührkurve der einparametrischen Kugelschar mit dem Zylinder  $\Phi_1$ . Da  $f_1$  die Zylinderachse  $g_1$  schneidet, sind die aus den Punkten  $M \in f_1$  auf  $g_1$  gelegten Normalen alle parallel. Der Einheitsvektor  $\vec{e}$  dieser Richtung lautet

$$(3.24) \quad \vec{e} = \left( \frac{c_0}{R_1 - R_2} \sin \frac{\varphi}{2}, \frac{c_0}{R_1 - R_2} \cos \frac{\varphi}{2}, -\frac{d}{R_1 - R_2} \right).$$

Trägt man von  $M$  aus in beiden Richtungen von  $\vec{e}$  den Abstand  $\rho(t)$  ab, d.h. bildet man  $\vec{x} = \vec{m}(t) \pm \rho(t)\vec{e}$ , so wird durch ein Vorzeichen die Berührkurve erfaßt. Nach längerer Rechnung gewinnt man

$$(3.25) \quad \begin{cases} x = \frac{c_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \pm c_0 \left( t \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \gamma_0 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ y = c_0 t \pm c_0 \left( t \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \gamma_0 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \\ z = -dt \cos \frac{\varphi}{2} \mp d \left( t \cos \frac{\varphi}{2} - \gamma_0 \right), \end{cases}$$

wobei

$$(3.26) \quad \gamma_0 := \frac{1}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}$$

gesetzt wurde. Die Gleichung (3.25) stellt 2 Geraden dar, wobei das

untere Vorzeichen eine Erzeugende des Zylinders  $\Phi_1$  liefert. Weiters zeigt man unschwer, daß für jedes  $t$  die Gleichung (3.25), unteres Vorzeichen, der Bedingung (3.15) genügt, d.h., daß der Berührungspunkt der entsprechenden Kugel mit  $\Phi_1$  auch auf der jeweiligen Charakteristik liegt. Analoge Überlegungen gelten auch bezüglich  $\Phi_2$ . Man zeigt mit derselben Methode, daß zu den Geraden  $f_2, f_3$  und  $f_4$  ebenfalls Drehkegel  $\Gamma_2, \Gamma_3$  und  $\Gamma_4$  gehören, welche die Punkte  $K_2, K_3$  und  $K_4$  aus (2.27 b-d) als Spitzen besitzen. Wir fassen zusammen im

**Satz 7.** *In der Kugelkongruenz  $\mathbf{K}$  liegen genau 4 einparametrische Kugelscharen, die je eine Drehfläche als Hüllfläche besitzen. Diese Drehflächen sind vier Drehkegel  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$  mit den Geraden  $f_1, \dots, f_4$  als Drehachsen und den Punkten  $K_1, \dots, K_4$  als Spitzen. Jeder dieser Drehkegel berührt die Zylinder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  längs einer Erzeugenden, wobei jeder Punkt dieser Erzeugenden auf einer Charakteristik der Kugelhüllfläche liegt.*

Besonders anschaulich wird die geometrische Situation im FALL II. Die Kegelspitzen  $K_1, \dots, K_4$  sind dann die Schnittpunkte der in  $z = 0$  gelegenen Zylindererzeugenden von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ .

## Literatur

- [1] BOTTEMA, O. and ROTH, B.: Theoretical Kinematics, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, New York, Oxford 1979.
- [2] BRAUNER, H.: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie, Springer-Verlag, Wien-New York, 1985.
- [3] HUSTY, M. und SACHS, H.: Abstandsprobleme zu windschiefen Geraden I, *Sitz.-Ber. Österr. Akad. Wiss. Wien* (1994, im Druck).
- [4] HUSTY, M. und RÖSCHEL, O.: Eine affin-kinematische Erzeugung gewisser Flächen vierter Ordnung mit zerfallendem Doppelkegelschnitt I, *Glasnik Mat.* **22** (42) (1987), 143–156.
- [5] HUSTY, M. und RÖSCHEL, O.: Eine affin-kinematische Erzeugung gewisser Flächen vierter Ordnung mit zerfallendem Doppelkegelschnitt II, *Glasnik Mat.* **22** (1987), 429–447.
- [6] HUSTY, M. and RÖSCHEL, O.: On a Particular Class of Cyclides in Isotropic, respectively, Pseudoisotropic Space, *Coll. Math. Soc. János Bolyai* (1984), 531–557.
- [7] LACKNER, A.: Über zwei Flächen vierter Ordnung und das orthogonale Hyperboloid, *Sitz.-Ber. Österr. Akad. Wiss. Wien* **121** (1912), 339–358.
- [8] MÉSZÁROS, F.: Allgemeine Theorie der Zykliden des Pseudoisotropen Raumes, Habilitationsschrift, Leoben-Budapest, 1994.

- [9] MÉSZÁROS, F. und SACHS, H.: Zur Kugelgeometrie des einfach isotropen Raumes, *Publ. Math. Debrecen* (1994, im Druck).
- [10] MÉSZÁROS, F.: Ein Kugelproblem im Flaggenraum, *Mathematica Pannonica* (im Druck)
- [11] SACHS, H.: Isotrope Geometrie des Raumes, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1987.
- [12] STACHEL, H.: Unendlich viele Kugeln durch vier Tangenten, *Mathematica Pannonica* 6/1 (1995), 55–66.