

EINE GEOMETRISCHE METHODE BEI DER APPROXIMATION DURCH KETTENBRÜCHE NACH DEM NÄCHSTEN GANZEN

Hans Günther **Kopetzky**

*Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuni-
versität, A-8700 Leoben, Österreich*

Franz Josef **Schnitzer**

*Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuni-
versität, A-8700 Leoben, Österreich*

Herrn Professor H. Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet

Received November 1994

MSC 1991: 11 J 70

Keywords: Kettenbrüche nach dem nächsten Ganzen, Satz von Borel.

Abstract: Using geometric methods and the theory of nearest integer continued fractions results of Borel-type from the area of Diophantine Approximations are derived.

1. Einleitung

Ein klassisches Resultat aus den Anfängen der Theorie der Diophantischen Approximationen ist der *Satz von Hurwitz*:

Satz H. Für beliebiges irrationales α besitzt die Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

unendlich viele Lösungen mit ganzen, teilerfremden Zahlen p und q .

Für diesen Satz, der auch mehrere Verallgemeinerungen erfahren hat, wurden und werden bis heute verschiedene Beweise angegeben.

Ein überaus nützliches Hilfsmittel bei derartigen Approximationsproblemen ist die Theorie der Kettenbrüche; dafür sei vor allem auf das Buch von Perron [3] verwiesen. Die am häufigsten verwendete Form der Kettenbrüche sind die *regelmäßigen Kettenbrüche*. Besitzt dann die reelle Zahl α die Entwicklung

$$\alpha = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}} = [b_0, b_1, b_2, \dots]$$

und bezeichnet $A_n/B_n = [b_0, b_1, \dots, b_n]$ den n -ten Näherungsbruch, so gilt mit der Bezeichnung

$$\left| \alpha - \frac{A_n}{B_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n B_n^2}$$

der *Satz von Borel*:

Satz B. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und für $n \geq 1$ besteht die Ungleichung

$$\max(\lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}) > \sqrt{5}.$$

Aus diesem Satz folgt offensichtlich der Satz von Hurwitz. Für den Satz von Borel wurden ebenfalls verschiedene Beweise, auch in letzter Zeit, erbracht. Zum Beispiel haben die Autoren in [2] eine geometrische Betrachtungsweise eingeführt, die zu einem sehr einfachen Beweis führt und darüberhinaus eine sehr anschauliche Darstellung der Zusammenhänge liefert.

Um Vergleichsmöglichkeiten zur Approximation mit gewissen halbregelmäßigen Kettenbrüchen, die das eigentliche Thema dieser Note sind, zu haben, soll diese Methode kurz skizziert werden.

2. Regelmäßige Kettenbrüche

Für die oben angeführte lokale Approximationskonstante λ_n der reellen Zahl α , die wir im weiteren als irrational voraussetzen wollen, gilt die elementare aber fundamentale Beziehung

$$\lambda_n = b_{n+1} + [0, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1] + [0, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots].$$

Für diesen Ausdruck schreiben wir $\lambda_n = b_{n+1} + x_n + y_n$ wobei x_n den rationalen Term bezeichnen soll; y_n ist dann, nach Voraussetzung, irrational, wodurch $0 < y_n < 1$ gilt.

Der Fall $x_n = 1$ ist trivial, wir setzen daher $x_n < 1$ voraus. Zur Relation $\lambda_n = b_{n+1} + x_n + y_n$ ergeben sich aus der Definition der regelmäßigen Kettenbrüche dann folgende zusätzliche Beziehungen:

$$\lambda_{n-1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{b_{n+1} + y_n} \quad \text{und} \quad \lambda_{n+1} = \frac{1}{y_n} + \frac{1}{b_{n+1} + x_n}$$

Man definiert nun drei Bereiche in der Ebene

$$\begin{aligned} B_0 &= B_0(\lambda, k) = \{(x, y) \mid k + x + y \geq \lambda\}, \\ B_{-1} &= B_{-1}(\lambda, k) = \{(x, y) \mid x^{-1} + (k + y)^{-1} \geq \lambda\}, \\ B_1 &= B_1(\lambda, k) = \{(x, y) \mid y^{-1} + (k + x)^{-1} \geq \lambda\}. \end{aligned}$$

$C_i = C_i(\lambda, k)$, $i = -1, 0, 1$ seien die Randkurven dieser Bereiche.

Wenn $k = a_{n+1}$ ist, gilt $\lambda_n \geq \lambda$ genau dann, wenn der Punkt (x_n, y_n) in $B_0(\lambda, k)$ liegt. Analoges gilt für λ_{n-1} bzw. λ_{n+1} .

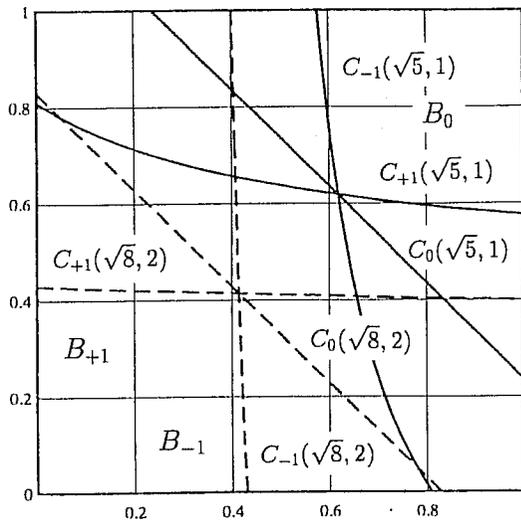


Abb. 1.

Satz B ist nun bewiesen, wenn gezeigt ist, daß jeweils die drei Bereiche $B_i(\sqrt{5}, 1)$, $i = -1, 0, 1$ und $B_i(\sqrt{5}, 2)$, $i = -1, 0, 1$ das Einheitsquadrat $0 < x, y < 1$ überdecken, da für $k \geq 3$ das Quadrat offensichtlich

von $B_0(\sqrt{5}, k)$ überdeckt wird. (Genauer gelten solche Überdeckungen sogar für $B_i(\sqrt{k^2 + 4}, k)$, $i = -1, 0, 1$; das liefert eine bekannte Verallgemeinerung des Satzes von Borel. Wir verweisen wegen dieser und weiterer damit zusammenhängender Fragen auf [2]). Auf Grund der Symmetrie findet man sofort, daß sich die drei Randkurven der Bereiche $B_i(\sqrt{5}, 1)$, $i = -1, 0, 1$ im Punkt $x = y = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ und jene von $B_i(\sqrt{8}, 2)$, $i = -1, 0, 1$ im Punkt $x = y = -1 + \sqrt{2}$ schneiden. Einsetzen geeigneter Punkte zeigt die gewünschte Überdeckung; man vergleiche Abbildung 1. Der erste Schnittpunkt hat irrationale Koordinaten, x müßte also rational sein; daher kann im Satz kein Gleichheitszeichen auftreten.

Bemerkung. H. Jager und C. Kraaikamp [1] haben solche Resultate mit Überdeckungsmethoden unter Verwendung der Beziehungen

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_{n-1} + b_{n+1}\sqrt{1 - 4\theta_{n-1}\theta_n} - b_{n+1}^2\theta_n, \\ \theta_{n-1} &= \theta_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{1 - 4\theta_n\theta_{n+1}} - b_{n+1}^2\theta_n,\end{aligned}$$

für $n \geq 1$ bewiesen, wobei bei ihnen $\theta_n = 1/\lambda_n$ ist.

3. Kettenbrüche nach dem nächsten Ganzen

In derselben Arbeit [1] haben Jager und Kraaikamp ähnliche Untersuchungen mit Hilfe von Kettenbrüchen nach dem nächsten Ganzen, mit einer zum regelmäßigen Fall analogen Überdeckungsmethode, durchgeführt.

Dabei hat sich das überraschende Ergebnis ergeben, daß bei einem Analogon zum Satz von Borel die Konstante $\sqrt{5}$ im allgemeinen nicht stimmt, sondern durch einen kleineren Wert ersetzt werden muß. Weiters zeigt sich, daß Resultate vom Boreltyp mit der Konstante $\sqrt{5}$ selbst dann nicht möglich sind, wenn anstelle von drei Termen im Maximum beliebig viele Terme herangezogen werden. Dieses Resultat wurde auch von J. Tong mit einer anderen Methode bewiesen [4].

Dieser Fragenkreis soll nun mit der oben skizzierten Überdeckungsmethode untersucht werden. Da die Kettenbrüche nach dem nächsten Ganzen weniger bekannt sind als die regelmäßigen Kettenbrüche, werden nun einige wenige, aber grundlegende Fakten zitiert; für Einzelheiten sei wieder auf [3] oder auch auf [4] verwiesen.

Es bezeichne $[x]$ das größte Ganze der reellen Zahl x und $\langle x \rangle$ das nächste Ganze von x , definiert durch $\langle x \rangle = [x + \frac{1}{2}]$.

Die Kettenbruchentwicklung nach dem nächsten Ganzen von $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die Form

$$\alpha = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}} = [b_0, a_1/b_1, a_2/b_2, \dots]$$

mit $a_n \in \{-1, 1\}$, $b_0 \in \mathbb{Z}$, $b_n \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \dots$, wobei

$$b_n \geq 2 \quad \text{und} \quad b_n + a_{n+1} \geq 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

zu bestehen haben.

Diese Entwicklung ergibt sich aus $\alpha_0 = \alpha$, $b_0 = \langle \alpha_0 \rangle$, \dots , $\alpha_n^* = (\alpha_{n-1} - b_{n-1})^{-1}$, $a_n = \text{sign}(\alpha_n^*)$, $\alpha_n = |\alpha_n^*|$, $b_n = \langle \alpha_n \rangle$.

Wiederum sei $A_n/B_n = [b_0, a_1/b_1, \dots, a_n/b_n]$ der n -te Näherungsbruch. (Jeder dieser Näherungsbrüche ist übrigens auch ein Näherungsbruch in der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung).

Die lokale Approximationskonstante wird wieder mit λ_n bezeichnet

$$\left| \alpha - \frac{A_n}{B_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n B_n^2},$$

wobei nun gilt

$$\lambda_n = b_{n+1} + [0, a_{n+1}/b_n, a_n/b_{n-1}, \dots, a_2/b_1] + [0, a_{n+2}/b_{n+2}, a_{n+3}/b_{n+3}, \dots],$$

wofür wir wieder $\lambda_n = b_{n+1} + x_n + y_n$ setzen wollen. Man beachte jedoch die Indexverschiebung bei x_n , bei Teilzählern und Teilennern in der letzten Relation für λ_n , die bewirken kann, daß die ursprüngliche Bedingung $b_n + a_{n+1} \geq 2$ für diesen Kettenbruch verletzt ist und der Kettenbruch dann keiner nach dem nächsten Ganzen zu sein braucht. Eine Berechnung mit den üblichen Rekursionsformeln liefert natürlich das korrekte Ergebnis. Es gelten auch noch folgende Beziehungen $x_n = a_{n+1}B_{n-1}/B_n$ und $y_n = \alpha_{n+1} - b_{n+1}$.

Die Darstellungen für die drei aufeinanderfolgenden Approximationskonstanten ergeben sich wieder sofort aus der Definition und lauten neben der bereits angeführten Formel $\lambda_n = b_{n+1} + x_n + y_n$ nun

$$\lambda_{n-1} = a_{n+1} \left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{b_{n+1} + y_n} \right) \quad \text{und} \quad \lambda_{n+1} = a_{n+2} \left(\frac{1}{y_n} + \frac{1}{b_{n+1} + x_n} \right).$$

Wiederum werden drei Bereiche in der Ebene definiert

$$\begin{aligned} B_0 &= B_0(\lambda, k) &= \{(x, y) \mid k + x + y \geq \lambda\}, \\ B_{-1} &= B_{-1}(\lambda, \epsilon_1, k) &= \{(x, y) \mid \epsilon_1(x^{-1} + (k + y)^{-1}) \geq \lambda\}, \\ B_1 &= B_1(\lambda, \epsilon_2, k) &= \{(x, y) \mid \epsilon_2(y^{-1} + (k + x)^{-1}) \geq \lambda\}, \end{aligned}$$

die eine analoge Bedeutung wie im regelmäßigen Fall haben.

Nach diesen Vorbereitungen soll nun der *Satz von Borel* für Kettenbrüche nach dem nächsten Ganzen bewiesen werden.

Satz 1. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit der Entwicklung $\alpha = [b_0, a_1/b_1, \dots]$ in einen Kettenbruch nach dem nächsten Ganzen und den obigen Bezeichnungen gilt für $n \geq 1$

$$\max(\lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}) > (11 + 5\sqrt{5})/10.$$

Diese Konstante ist bestmöglich und kann nicht durch eine größere ersetzt werden. Sie hat den numerischen Wert $2.21803\dots < \sqrt{5} = 2.23606\dots$

Beweis. Aus den Bedingungen für die Kettenbrüche nach dem nächsten Ganzen ergeben sich die schon auf Hurwitz zurückgehende Abschätzungen [3, Satz 5.18]

$$\frac{B_{n-1}}{B_n} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6170\dots, \quad \frac{B_{n-1}}{B_n} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,3819\dots, \quad b_n \geq 3,$$

die hier für $|x_n| = B_{n-1}/B_n$ verwendet werden. Da die Entwicklung von y_n von der Form $y_n = [0, \dots]$ ist, muß gelten $|y_n| < 1/2$, da $b_0 = \langle y_n \rangle$ ist. Aus dem gleichen Grund gilt auch die Abschätzung $-1/2 \leq x_n < 1/2$. Damit die Bedingung $b_n + a_{n+1} \geq 2$ in der Entwicklung von α erfüllt ist, darf in der Entwicklung von x_n nicht die Kombination $(a_{n+1}, b_n) = (-1, 2)$ auftreten. Daher ist für $x_n < 0$ dann $b_n \geq 3$. Zusammengefaßt haben wir also die Abschätzungen

$$-w < x_n < 1/2, \quad -1/2 < y_n < 1/2,$$

wobei $w = (3 - \sqrt{5})/2 = [0, 1/3, \overline{-1/3}]$ gesetzt wurde. Der darübergesetzte Strich bedeutet wie üblich eine Periode.

Ist $b_{n+1} > 4$, dann gilt $\lambda_n = b_{n+1} + x_n + y_n > 4 - w - 1/2 = 3.118\dots$, sodaß wir im weiteren $b_n \in \{2, 3\}$ voraussetzen können.

Die drei zu untersuchenden Bereiche werden durch das Tripel

$$T = (a_{n+1}, a_{n+2}, b_{n+1})$$

bestimmt. Im Grunde haben wir daher acht Fälle zu unterscheiden, wobei sich aber nur $T = (-1, -1, 3)$ als interessant herausstellen wird.

Die Fälle $T = (\pm 1, -1, 2)$ können wegen $b_{n+1} + a_{n+2} \geq 2$ nicht auftreten.

Die Randkurven der Bereiche B_i , $i = -1, 0, 1$ $C_0 : \lambda = k + x + y$, $C_{-1} : \epsilon_1 \lambda = x^{-1} + (k + y)^{-1}$, $C_{+1} : \epsilon_2 \lambda = y^{-1} + (k + x)^{-1}$ sind als Funktionen von x im Bereich $|x| \leq 1$ streng monoton fallend, wobei C_{-1} jeweils einen Pol bei $x = \pm 1/\lambda$ in diesem Bereich hat.

Wir wollen nun die Überdeckung des entsprechenden Rechtecks am Beispiel $T = (1, -1, 3)$ darlegen. Die restlichen Fälle, außer $T = (-1, -1, 3)$, verlaufen analog. Details dazu können der Tabelle 1 entnommen werden. Abbildung 2 beschreibt die Situation für $\lambda = \sqrt{5}$. Man erkennt, daß das zu überdeckende Quadrat, aufgespannt von den Ecken $(0, 0)$ und $(-1/2, -1/2)$ von B_0 für sich allein, aber auch von B_{-1} für sich allein, überdeckt wird.

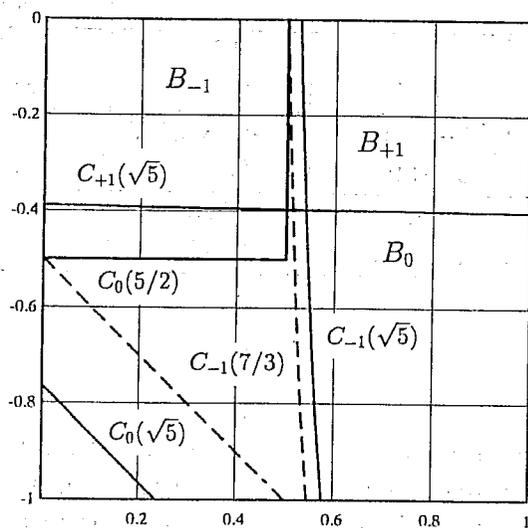


Abb. 2.

Das ergibt sich sofort durch Einsetzen von $(0, -1/2)$ in $\lambda_0(x, y)$, und liefert den Wert $\lambda_0 = 2.5 > \sqrt{5}$. Ebenso ist $\lambda_{-1}(1/2, 0) = 7/3 > \sqrt{5}$ zu bestimmen.

Gleichzeitig erkennt man, daß dieses Rechteck auch noch vom Bereich B_{-1} überdeckt wird, wenn dort $\lambda = \sqrt{5}$ durch $\lambda = 7/3$ ersetzt wird.

Auch in den restlichen Fällen zeigt sich, daß zu einer Überdeckung jeweils ein Bereich, für sich allein genommen, genügt. Die Vereinigung von zwei oder drei Bereichen bringt keine Verbesserung (wie etwa im Falle der regelmäßigen Kettenbrüche).

Die folgende Tabelle enthält nun alle Überdeckungen des entsprechenden Rechtecks mit $\lambda > \sqrt{5}$; angegeben ist jeweils der größtmögliche Wert von λ .

T	λ_0	λ_{-1}	λ_{+1}
(1, 1, 2)	—	$12/5$ 2.4000...	$12/5$ 2.4000...
(-1, 1, 2)	—	—	$5/2$ 2.5000...
(1, 1, 3)	3 3.0000...	$16/7$ 2.2857...	$16/7$ 2.2857...
(-1, 1, 3)	$(3 + \sqrt{5})/2$ 2.6180...	$(7 + 3\sqrt{5})/6$ 2.2847...	$7/3$ 2.3333...
(1, -1, 3)	$5/2$ 2.5000...	$7/3$ 2.3333...	—

Tab. 1.

Im noch verbliebenen Fall $T = (-1, -1, 3)$ schneiden sich für $\lambda = \sqrt{5}$ alle Kurven im Punkt $(-w, -w)$. Der Bereich links von C_{-1} und unterhalb von C_{+1} wird nicht überdeckt und damit bleibt auch ein schmaler Streifen im Rechteck unüberbedeckt. Das ist in Abbildung 3 zur besseren Veranschaulichung mit unterschiedlichen Achsmaßstäben dargestellt. Dieser Streifen kann nur durch eine Verkleinerung von λ überdeckt werden. Der dafür notwendige Wert errechnet sich sofort aus

$$\lambda_{-1}(-w, -1/2) = (11 + 5\sqrt{5})/10.$$

Offensichtlich kann diese Konstante nicht vergrößert werden. \diamond

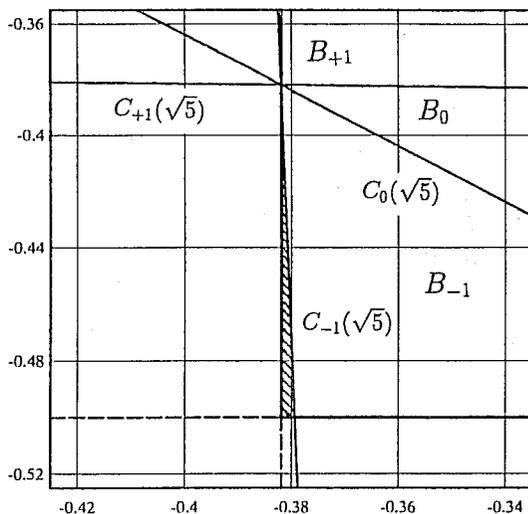


Abb. 3.

Daraus folgt leicht das

Korollar. *Es gilt der Satz von Hurwitz.*

Beweis. Würde nicht unendlich oft $\lambda_k > \sqrt{5}$ sein, so müßte ab einem gewissen Index nur mehr die Kombination $T = (-1, -1, 3)$ auftreten, α also im üblichen Sinne äquivalent zu $[0, 1/3, -1/3] = w$ sein. Für w gilt aber der Satz von Hurwitz, wie man direkt zeigen kann. \diamond

Satz B hat gleichfalls eine Anzahl verschiedener Ergänzungen erfahren; ähnliches ist hier auch möglich.

Satz 2. *Ist $(a_{n+1}, a_{n+2}, b_{n+2}) \neq (-1, -1, 3)$ für ein $n \geq 1$, so gilt die Ungleichung $\max(\lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}) > 12/5$. Ist dazu noch $(a_{n+1}, b_{n+1}) \neq (1, 2)$, so gilt sogar $\max(\lambda_{n+1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}) > 5/2$.*

Beweis. Unmittelbar aus der Tabelle ablesbar. \diamond

Mit Hilfe der vorangegangenen Überlegungen läßt sich nun das folgende, bereits erwähnte Ergebnis leicht bestätigen.

Satz 3. *Es existieren reelle Zahlen für die für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\max(\lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+k}) < \sqrt{5}.$$

Beweis. Der Ausdruck, den wir für λ_{n-1} verwendet haben, ergibt sich aus $\lambda_{n-1} = b_n + x_{n-1} + y_{n-1}$ durch Anwendung der Transformation

$$x_{n-1} = -b_n + \frac{a_{n+1}}{x_n} \quad \text{und} \quad y_{n-1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1} + y_n}.$$

Wiederholte Anwendung dieser Transformation (mit entsprechenden Indices) ergibt die Werte von $\lambda_{n-2}, \lambda_{n-3}, \dots$ für jenes α , daß durch x_n und y_n und b_{n+1} bestimmt ist. Wendet man diese Transformationen mit $(a_k, b_k) = (-1, 3)$, $k = n+1, n, n-1, \dots$ auf den Punkt $(-1, 1/2)$ an, so zeigt sich, daß $-w$ bezüglich der Transformation der x -Koordinate ein Fixpunkt ist, während die Transformation der y -Koordinate $y_{n-1} = -(3+y_n)^{-1}$ eine monoton von unten (alle y_k sind negativ) gegen $-w$ konvergierende Folge liefert. Das ist z.B. sofort aus den Näherungsbrüchen der Entwicklung von w in einen regelmäßigen Kettenbruch ersichtlich. Der Grenzwert der λ_k ist daher $\lambda_\infty = 3 - w - w = \sqrt{5}$. Daher sind alle $\lambda_k < \sqrt{5}$. Das ist aber die Behauptung. \diamond

Wie unschwer zu erkennen ist, würden sich mit der dargestellten Methode weitere Resultate in der Art von Satz 1 und Satz 2 gewinnen lassen.

Literatur

- [1] JAGER, H. and KRAAIKAMP, C.: On the approximation by continued fractions, *Indag. Math.* 92 (1989), 289-307.
- [2] KOPETZKY, H. G. and SCHNITZER, F. J.: A geometrical approach to approximations by continued fractions, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* 43 (1987), 176-186.
- [3] PERRON, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, B.G.Teubner, Stuttgart 1954.
- [4] TONG, J.: Approximation by nearest integer continued fractions, *Math. Scand.* 71 (1992), 161-166.