Mathematica Pannonica
13/1 (2002), 23 – 30

RATIONALE APPROXIMATIONEN VON $(\mathrm{m}/\mathrm{n})\,\mathrm{e}^{1/\mathrm{q}}$

Hans Günther **Kopetzky**

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuniversität, A-8700 Leoben, Österreich

Franz Josef **Schnitzer**

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuniversität, A-8700 Leoben, Österreich

Herrn O. Prof. Dr. Hans Sachs zum 60. Geburtstag gewidmet

Received: November 2001

MSC 2000: 11 J 70

Keywords: Approximations to e, continued fractions.

Abstract: A result about asymptotic rational approximations of $(m/n)\ e^{1/q}$; $m, n, q \in \mathbb{N}$ is presented where the product mn belongs to a certain class of natural numbers.

1. Einleitung

Rationale Approximationen von e und den q-ten Wurzeln aus e und e^2 wurden bereits von mehreren Autoren untersucht (Davis [2], [3], Adams [1], in diesen Arbeiten finden sich auch weitere Literaturhinweise). Die Kettenbruchentwicklungen der q-ten Wurzeln aus e, die bereits auf Euler zurückgehen (siehe Perron [5]), und rationalen Vielfachen davon wurden von Matthews and Walters in [4] behandelt. Diese Untersuchungen, die

E-mail address: kopetzky@unileoben.ac.at

den Kettenbruchformalismus mit 2×2–Matrizen verwenden, basieren auf Ergebnissen von Hurwitz im Zusammenhang mit den nach ihm benannten Kettenbrüchen. Diese Resultate sind ausführlich in [5] dargestellt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein asymptotisches Resultat für eine Klasse von rationalen Vielfachen der q-ten Wurzeln aus e hergeleitet. Die Einschränkung auf eine Klasse von Vielfachen gibt die Möglichkeit, die im Resultat auftretende Approximationskonstante direkt anzugeben. Bei beliebigen rationalen Vielfachen ist die Bestimmung dieser Konstante schwierig und müsste für ein bestimmtes Vielfaches nach einem aufwendigeren Verfahren, das in [4] dargestellt ist, berechnet werden. Die Bedingung für den einfacheren Fall findet sich ebenfalls in [4].

Wir verwenden die Notationen aus [5] bzw. [4]. Betrachtet werden soll also die Approximation von

$$\xi = \frac{m}{n} e^{\frac{1}{q}} .$$

Weiters sei $d = mn$. Diese Bezeichnungen werden wir stets in dieser Weise verwenden.

2. Matrixdarstellung und Periode

Zur Formulierung der für uns erforderlichen Ergebnisse aus [4] verwenden wir die Kettenbruchdarstellung mit 2×2–Matrizen (vgl. [5], [4]). Besitzt die reelle Zahl α die Kettenbruchentwicklung $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$, und wird der ν-te Näherungsbruch von α mit A_ν / B_ν bezeichnet, so gilt

$$\begin{pmatrix} A_\nu & A_{\nu-1} \\ B_\nu & B_{\nu-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} a_\nu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Matrizen vom Typ wie die links auftretende wollen wir *Kettenbruchmatrizen* nennen. Die rechts stehenden Matrizen werden mit U_{a_i} bezeichnet. Wenn nun die Folge A_ν / B_ν für $\nu \to \infty$ gegen α konvergiert, so verwenden wir wie in [4] die Notation $\alpha \sim \prod_{i=0}^{\infty} U_{a_i}$.

In [4] wird gezeigt, daß folgende Darstellung gilt

$$\xi = \frac{m}{n} e^{\frac{1}{q}} = W \prod_{\mu=1}^{\infty} \prod_{t=1}^{d} Q_t(\mu) R_t . \tag{1}$$

W ist dabei eine Kettenbruchmatrix, die die Vorperiode von ξ repräsentiert. Ihre Gestalt im Detail ist für unsere Belange irrelevant; Einzelheiten finden sich wieder in [4].

Der nichtkonstante Teil der Perioden ergibt sich aus

$$Q_t(\mu) = U_k \quad \text{mit} \quad k = p_t^2(2q\mu - 1). \tag{2}$$

Die Berechnung der Zahlen p_t erfolgt nach dem erwähnten aufwendigeren Verfahren. Die zu formulierende Bedingung für den einfacheren Fall gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für $p_t = 1$, $t = 1, \ldots, d$.

Die R_t sind Kettenbruchmatrizen, welche auch U_0 als ersten Faktor enthalten können. Ihre Berechnung erfolgt rekursiv; für Einzelheiten wird wieder auf [4] verwiesen. Für unsere Zwecke ist lediglich wichtig, daß die Matrizen R_t von μ unabhängig sind. Es können daher maximal d verschiedene Matrizen R_t auftreten.

An Hand der Darstellung (1) erkennt man nun folgendes. Das Produkt im Inneren stellt eine Periode dar. Hier wird wie in [5] von einer Periode gesprochen, obwohl darin d nichtkonstante Terme auftreten. Die Gestalt von Q_t zeigt, daß sich korrespondierende Terme an derselben Stelle innerhalb einer Periode in der Abfolge der Perioden jeweils in einer arithmetischen Progression befinden.

Die Differenz bei nichtkonstanten Termen ist bei Gültigkeit der Bedingung $p_t = 1$ dann $2q$, was, wie bereits erwähnt, die geschlossene Formulierung unseres Hauptergebnisses ermöglicht.

Teile einer Periode, beginnend mit einem nichtkonstanten Glied, zusammen mit allen konstanten Gliedern bis zum nächsten nichtkonstanten Term, wollen wir als *Block* bezeichnen. Ein Block in einem Kettenbruch hat also die Gestalt

$$[\ldots, 2q\mu + b, a_{\nu_i+1}, a_{\nu_i+2}, \ldots, a_{\nu_{i+1}-1}, \ldots]$$

mit für jeden Block innerhalb der Periode konstantem $b \in \mathbb{Z}$. Die Zusatzglieder b entstehen durch die Möglichkeit des Auftretens eines Teilnenners 0 am Anfang eines Blocks und im Innern des Kettenbruchs durch Anwendung der Beziehung

$$[\ldots, a_{\nu-1}, a_\nu, 0, a_{\nu+2}, a_{\nu+3}, \ldots] = [\ldots, a_{\nu-1}, a_\nu + a_{\nu+2}, a_{\nu+3}, \ldots].$$

Formel (1) zeigt ferner, daß eine Periode genau aus $d = mn$ Blöcken besteht und damit genau mn Glieder aus nichtkonstanten arithmetischen Progressionen enthält.

3. Bedingung für m,n

Die genannte Bedingung von Matthews und Walters [4] für das ausschließliche Auftreten der Differenz $2q$ bei nichtkonstanten arithmetischen Progressionen läßt sich nun folgendermaßen formulieren.

Die Folge $\{K_t\}$ sei definiert durch die Rekursionsformel

$$K_t = (4t-2)qK_{t-1} + K_{t-2} \quad \text{für} \quad 2 \leq t \leq d, \tag{3}$$

mit den Anfangsgliedern $K_0 = 1$ und $K_1 = 2q-1+2r_{m,n}$. Die Zahlen $r_{m,n}$ erhält man dabei in folgender Weise. Man entwickelt den Bruch m/n in einen Kettenbruch mit ungerader Anzahl von Teilnennern und verwendet dazu die bekannte Beziehung

$$[\ldots, a_\kappa] = [\ldots, a_\kappa - 1, 1] \quad \text{für} \quad a_\kappa \geq 2. \tag{4}$$

ν sei der letzte Index in der Entwicklung von m/n. Dann ist also $\nu \equiv 0(2)$ und $m/n = A_\nu/B_\nu$ der ν-te Näherungsbruch. Daher gilt

$$r_{m,n} = -A_\nu B_{\nu-1} = 1 - A_{\nu-1}B_\nu\,.$$

Diese Berechnung der $r_{m,n}$ bedarf einer Begründung. In [4] wird bewiesen, daß sich $r = r_1 = r_{m,n}$ aus der Faktorisierung folgender Matrix in die Faktoren R_0 und C_1 ergibt. Es ist

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R_0 \cdot C_1 = R_0 \cdot \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit ganzzahligen Matrizen, $p_1, s_1 \geq 0$ und $p_1 s_1 = d$. R_0 ist eine Kettenbruchmatrix, bei welcher der erste Faktor auch U_0 sein kann. Mit diesen Voraussetzungen ist diese Faktorisierung eindeutig.

Da hier eine Bedingung für $p_\mu = 1$, $\mu = 1, \ldots, d$ behandelt wird, kann $p_1 = 1$ (und damit $s_1 = d$) vorausgesetzt werden.

Multipliziert man die Gleichung (5) von rechts mit C_1^{-1}, so erhält man die Matrix

$$M \cdot C_1^{-1} = \begin{pmatrix} m & (1-r)/n \\ n & -r/m \end{pmatrix},$$

die eine Kettenbruchmatrix sein muß. Von den auf Grund der beiden Varianten in (4) möglichen Lösungen gibt es wegen der Eindeutigkeit genau eine, die auch das gesuchte $r_{m,n}$ liefert. Es wird aus $(1-r)/n = A_{\nu-1}$

und $-r/m = B_{\nu-1}$ bestimmt. Die Forderung $\nu \equiv 0(2)$ ergibt sich aus den Determinanten von M und C_1. Hierin ist auch der wichtige Spezialfall $n = 1$ enthalten, der mit $\nu = 0$ und $A_0 = m$, $B_0 = 1$, $A_{-1} = 1$, $B_{-1} = 0$ dann $r_{m,1} = 0$ liefert. Für $m = 1$ ergibt sich wegen $1/n = [0, n-1, 1]$ sofort $r_{1,n} = 1 - n$.

Satz 1. (Matthews, Walters) *Die Differenz der auftretenden arithmetischen Progressionen, die nicht konstant sind, ist stets $2q$ (d.h. $p_t = 1$ in (2) für $t = 1, \ldots, d$) genau dann, wenn für die durch die Rekursionsformel (3) definierten Zahlen K_t gilt*

$$(K_t, d) = 1 \quad \textit{für} \quad t = 1, \ldots, d\,.$$

Die Menge aller Zahlen $d \in \mathbb{N}$, die diese Beziehung für den größten gemeinsamen Teiler erfüllen, werde mit $\mathcal{P}$ bezeichnet.

Gemäß den oben gemachten Bemerkungen werden im folgenden also nur jene Paare (m, n) behandelt, für die $d = mn \in \mathcal{P}$ gilt.

4. Resultate

Für den Beweis unseres Hauptresultats benötigen wir noch ein Lemma und betrachten dazu vorerst die Blöcke unabhängig von ihrer Zugehörigkeit zu den Perioden und stzen

$$\xi = [a_0, \ldots, a_{\rho_1 - 1} | a_{\rho_1}, \ldots, a_{\rho_2 - 1} | a_{\rho_2}, \ldots, a_{\rho_3 - 1} | a_{\rho_3}, \ldots]\,.$$

Die Striche deuten den Beginn eines Blocks an. Es sei $S_k = B_{\rho_k - 1}$. Damit hat man

Lemma 1. *Es gilt die asymptotische Äquivalenz*

$$\log S_k \sim k \log k\,.$$

Beweis. Die Rekursionsformel für Kettenbrüche $B_n = a_n B_{n-1} + B_{n-1}$ liefert für $n \geq 3$ sofort die Abschätzung

$$a_n B_{n-1} < B_n < (a_n + 1) B_{n-1}.$$

Eine Anwendung dieser Abschätzung auf S_k ergibt, da lediglich a_{λ_k} von k abhängt und die restlichen a_ν des Blocks von k unabhängig sind, die Abschätzung

$$c_1 k S_{k-1} < S_k < c_2 k S_{k-1}\,,$$

wobei c_1 und c_1 als Minimum bzw. Maximum über die Blöcke einer Periode unabhängig von k gewählt werden können.

Es gibt also eine nach unten und oben beschränkte Konstante γ_k mit $S_k = \gamma_k k S_{k-1}$. Logarithmieren ergibt

$$\log S_k = \log k + \log S_{k-1} + O(1)\,,$$

gleichmäßig in k. Damit erhält man

$$\log S_k = \sum_{j=2}^{k} \log j + O(k)\,.$$

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \log S_k &= \log(k\,!) + O(k) \\ &\sim k \log k \end{aligned}$$

die Behauptung des Lemmas. $\Diamond$

Wir benötigen nun ein bekanntes Resultat über die Approximation von reellen Zahlen durch Kettenbrüche (vgl. [5]). Wenn A_k/B_k den k-ten Näherungsbruch der reellen Zahl $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ bezeichnet, und wenn λ_k definiert ist durch

$$\left|\alpha - \frac{A_k}{B_k}\right| = \frac{1}{\lambda_k B_k^2}\,, \tag{6}$$

dann gilt

$$\lambda_k = a_{k+1} + [0, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots] + [0, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1]\,. \tag{7}$$

Nun hat man

Lemma 2. *Ist $mn \in \mathcal{P}$ mit $\mathcal{P}$ aus Satz 1., und sind $a_{\nu+1}, \ldots, a_{\nu+\kappa+1}$ die Teilnenner eines Blocks der μ-ten Periode von ξ, so gilt*

$$\lambda_\nu = 2q\mu + o(\mu) \quad \textit{und} \quad \lambda_{\nu+j} = o(\mu) \quad \textit{für} \quad j = 1, \ldots, \kappa\,.$$

Beweis. Dieser ergibt sich offensichtlich aus (6) und (7) und unter Beachtung, daß die Differenz von $a_{\nu+1}$ und $2q\mu$ konstant und unabhängig von μ sind. $\Diamond$

Unser Hauptergebnis ist der folgende

Satz 2. *Für natürliche Zahlen m und n mit $mn \in \mathcal{P}$ gegeben durch Satz 1. gilt die Beziehung*

$$\liminf_{B\to\infty} \frac{B^2 \log B}{\log\log B} \left| \frac{m}{n} e^{\frac{1}{q}} - \frac{A}{B} \right| = \frac{mn}{2q}, \qquad A, B \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir betrachten den Näherungsnenner am Ende des h-ten Blocks in der μ-ten Periode und verwenden die Bezeichnung S_k wie oben. Es sei also

$$S_{h+\mu d} = B_{h_1+\mu d_1}\,,$$

wobei d_1 die Länge einer Periode ist, während h_1 in leicht erkennbarer Weise durch h und die Längen der Blöcke bestimmt ist. Nun gilt nach Lemma 1.

$$\log S_{h+\mu d} \sim (h+\mu d)\log(h+\mu d) \sim \mu d \log \mu d\,. \tag{8}$$

Logarithmieren der ersten Äquivalenz und Multiplikation mit μd und Verwendung des ersten und dritten Terms in (8) liefert

$$\mu d \log\log S_{h+\mu d} \sim \mu d \log(h+\mu d) \sim \mu d \log \mu d \;\sim \log S_{h+\mu d}\,,$$

und weiter

$$\mu \sim \frac{1}{d}\frac{\log S_{h+\mu d}}{\log\log S_{h+\mu d}} \sim \frac{1}{d}\frac{\log B_{h_1+\mu d_1}}{\log\log B_{h_1+\mu d_1}}\,. \tag{9}$$

Auf Grund von Lemma 2. und (6) ergibt sich schließlich

$$\lim_{\mu\to\infty} 2q\mu B^2_{h_1+\mu d_1} \left| \xi - \frac{A_{h_1+\mu d_1}}{B_{h_1+\mu d_1}} \right| = 1\,.$$

Für die restlichen Folgen von Näherungsnennern (jeweils gleiche Position innerhalb der Perioden und konstante Teilnenner) ist der entsprechende Limes offensichtlich ∞. Mit (9) ergibt sich die Behauptung. $\Diamond$

Literatur

[1] ADAMS, W.W.: Asymptotic Diophantine approximations to e, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **55** (1966), 28–31.

[2] DAVIS, C.S.: Rational approximations to e, *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)* **25** (1978), 497–502.

[3] DAVIS, C.S.: A note on rational approximation, *Bull. Austral. Math. Soc.* **20** (1979), 407–410.

[4] MATTHEWS, K.R. and WALTERS, R.F.C.: Some properties of the continued fraction expansion of $(m/n)e^{1/q}$, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **67** (1970), 67–74.

[5] PERRON, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd.I, B.G.Teubner, Stuttgart 1954.

[6] WALTERS, R.F.C.: Alternative derivation of some regular continued fractions, *J. Austral. Math. Soc.* **8** (1968), 205–212.