Mathematica Pannonica
15/2 (2004), 275–282

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE D'UNE FAMILLE DE SYSTÈMES INTÉGRABLES

A. **Lesfari**

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Chouaïb Doukkali, B.P. 20, El-Jadida, Maroc

A. **Elachab**

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Chouaïb Doukkali, B.P. 20, El-Jadida, Maroc

Received: August 2004

MSC 2000: 70 H 06, 14 H 55, 14 K 20, 14 H 40.

Keywords: Integrable systems, Riemann surfaces, Jacobian varieties.

Abstract: In this paper, we consider a hierarchy of hamiltonian systems. Usually, this system is nonintegrable, but we give two integrable cases in the sens of Liouville. In the first case, we show that the system is linearized in the jacobian variety of a smooth hyperelliptic Riemann surface. For the second case, we describe a connection with the system of two coupled nonlinear Schrödinger equations. We use this connection for deriving a Lax representation and a spectral curve for the system. The linearized flow can be realized on an elliptic curve.

Les équations canoniques de Hamilton s'écrivent sous la forme

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad \frac{dx_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_k}, \tag{1}$$

où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, sont des coordonnées dans l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}$. Ce sont $2n$ équations différentielles du premier

E-mail addresses: Lesfari@ucd.ac.ma, Lesfariahmed@yahoo.fr.

ordre qui sont connues lorsqu'on connait la fonction H appelée hamiltonien du système. Le système (1) est Liouville intégrable lorsqu'il possède n intégrales premières $H_1 \equiv H, H_2, \ldots, H_n$ en involution (c'est-à-dire que les crochets de Poisson

$$\{H_i, H_j\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_k} \frac{\partial H_j}{\partial y_k} - \frac{\partial H_i}{\partial y_k} \frac{\partial H_j}{\partial x_k} \right), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

s'annulent deux à deux) et qu'en outre les gradients grad H_i sont linéairements indépendants. Pour des constantes génériques $c = (c_1, \ldots, c_n)$, l'ensemble de niveau commun aux intégrales $H_1, \ldots, H_n$:

$$M_c = \left\{ x \equiv (y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{2n} : H_1(x) = c_1, ..., H_n(x) = c_n \right\},$$

forme une variété de dimension n. D'après le théorème d'Arnold–Liouville [9], si la variété M_c est compacte et connexe, alors elle est difféomorphe à un tore de dimension n :

$$T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \bmod 2\pi\},$$

sur lequel le problème se linéarise. En outre, on démontre l'existence d'une transformation canonique vers de nouvelles coordonnées, dites variables action-angle, les coordonnées action étant des constantes du mouvement et les coordonnées angle des fonctions linéaires dans le temps. Le point

$$(y_1(t), \ldots, y_n(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

représentant la solution du système (1) a un mouvement quasi-périodique, c'est-à-dire en coordonnées angulaires $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, on a

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \omega = \omega(c) = \text{constante}.$$

Donc, en principe, la transformation canonique fournit les positions et les moments en fonction du temps et le problème est résolu.

La résolution explicite de plusieurs équations des flots hamiltoniens associés aux fonctions $H_1, \ldots, H_n$ se fait à l'aide d'intégrales hyperelliptiques. Autrement dit pour une compactification appropriée, on a $\overline{M}_c \simeq$ $\simeq \text{Jac}(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est une surface de Riemann hyperelliptique à déteminer et le système en question se linéarise sur la variété jacobienne de $\mathcal{C}$ (voir par exemple [1] ou [4]).

Dans ce travail, on considère un système différentiel non-linéaire sur $\mathbb{R}^4$ défini par le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}\Big(x_1^2 + x_2^2 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k y_1^2 + \beta_k y_2^2)^k\Big), \tag{2}$$

dépendant de plusieurs paramètres α_k et β_k. Dans ce cas, le système différentiel est

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= x_1, & \frac{dx_1}{dt} &= -\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k(\alpha_k y_1^2 + \beta_k y_2^2)^{k-1} y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= -\sum_{k=1}^{n} k\beta_k(\alpha_k y_1^2 + \beta_k y_2^2)^{k-1} y_2. \end{aligned} \tag{3}$$

En général, ce système n'est pas intégrable. Cependant, pour des valeurs particulières, celui-ci est Liouville intégrable et la linéarisation s'effectue sur une sous-variété de la variété jacobienne d'une surface de Riemann de genre $[\frac{n}{2}]$. En particulier, pour $n = 2$ ou 3 (resp. 4 ou 5), la linéarisation s'effectue sur une courbe elliptique (resp. variété jacobienne d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre 2). Pour d'autres valeurs des paramètres, les solutions du système différentiel en question sont liées à celles des équations couplées non-linéaires de Schrödinger. Dans ce cas, le problème admet une représentation de Lax en termes de matrices d'ordre 2 et la linéarisation s'effectue à l'aide de la méthode de la courbe spectrale ou déformation isospectrale sur une courbe elliptique.

Proposition 1. *Quand $\alpha_k = \beta_k$, le système* (3) *admet une intégrale première quadratique qui détermine avec $H(1)$ un système Liouville intégrable. En outre, la linéarisation c'est-à-dire la description des niveaux communs des intégrales et les flots dont ils sont pourvus se fait sur une sous-variété de la variété jacobienne d'une surface de Riemann de genre $[\frac{n}{2}]$. En particulier, pour $n = 2$ ou 3 (resp. 4 ou 5), la linéarisation s'effectue sur une courbe elliptique (resp. variété jacobienne d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre 2).*

Démonstration. Dans notre cas, l'existence d'une seconde intégrale première indépendante et en involution avec $H_1 \equiv H$, suffit pour que le système soit Liouville intégrable. Pour $\alpha_k = \beta_k$, le système différentiel (3) implique

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \sum_{k=1}^{n} k{\alpha_k}^k (y_1^2 + y_2^2)^{k-1} y_1 = 0,$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}+\sum_{k=1}^{n}k{\alpha_k}^k(y_1^2+y_2^2)^{k-1}y_2=0.$$

de sorte que la fonction (le moment)

$$H_2=x_1y_2-x_2y_1,$$

est une intégrale première. Les fonctions H_1 et H_2 sont en involution

$$\{H_1,H_2\}=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k}\frac{\partial H_2}{\partial y_k}-\frac{\partial H_1}{\partial y_k}\frac{\partial H_2}{\partial x_k}\right)=0.$$

Donc cette seconde intégrale première, détermine avec H_1 un système Liouville intégrable. Soit

$$M_c=\left\{x\equiv(y_1,y_2,x_1,x_2)\in\mathbb{R}^4:H_1(x)=c_1,H_2(x)=c_2\right\},$$

la surface invariante. En substituant

$$y_1=r\cos\theta,\qquad y_2=r\sin\theta,$$

dans les équations

$$H_1=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^k(y_1^2+y_2^2)^k\right)=c_1$$

$$H_2=x_1y_2-x_2y_1=c_2,$$

on obtient

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^kr^{2k}=2c_1,\quad r^2\frac{d\theta}{dt}=-c_2.$$

D'où

$$\left(r\frac{dr}{dt}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^kr^{2(k+1)}-2c_1r^2+c_2^2=0,$$

et par conséquent

$$w^2+P(z)=0,$$

où $w=r\frac{dr}{dt}$, $z=r^2$ et

$$P(z)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^kz^{(k+1)}-2c_1z+c_2^2.$$

La surface de Riemann

$$\mathcal{C}=\overline{\{(w,z):w^2+P(z)=0\}}$$

est lisse et hyperelliptique. Le polynôme $P(z)$ étant de degré $n+1$, la surface de Riemann $\mathcal{C}$ est de genre $g=[\frac{n}{2}]$. Pour $n=2$ ou 3, on a une seule différentielle holomorphe $\omega = \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}$, et la linéarisation s'effectue donc sur la courbe elliptique $\mathcal{C}$. Bien que la variété M_c est de dimension 2, on a ici une réduction de dimension 1. Pour $n = 4$ ou 5, la surface de Riemann $\mathcal{C}$ est hyperelliptique de genre 2 et on a deux différentielles holomorphes indépendantes

$$\omega_1 = \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad \omega_2 = \frac{zdz}{\sqrt{P(z)}}.$$

Considérons le système

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\sqrt{P(z_1)}}{z_1 - z_2}, \qquad \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{z_2\sqrt{P(z_1)}}{z_1 - z_2},$$
$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{\sqrt{P(z_2)}}{z_2 - z_1}, \qquad \frac{dz_2}{d\tau} = \frac{z_1\sqrt{P(z_2)}}{z_2 - z_1},$$

où $(t, \tau) \in \mathrm{Jac}(\mathcal{C})$. On note $S^2(\mathcal{C})$ l'ensemble des diviseurs positifs sur la surface de Riemann $\mathcal{C}$. L'application

$$M_c \longrightarrow S^2(\mathcal{C}), (x_1, x_2, y_1, y_2) \longmapsto (P_1, P_2),$$

où $P_1 = (z_1, \sqrt{P(z_1)}, P_2 = (z_2, \sqrt{P(z_2)}$ détermine une injection de la surface $M_c \hookrightarrow \mathrm{Jac}(\mathcal{C})$ via l'application d'Abel

$$S^2(\mathcal{C}) \to \mathrm{Jac}(\mathcal{C}), (P_1, P_2) \longmapsto (\zeta_1, \zeta_2),$$

avec

$$(4) \qquad \zeta_1 = \int_{P_0}^{P_1} \omega_1 + \int_{P_0}^{P_2} \omega_1, \quad \zeta_2 = \int_{P_0}^{P_1} \omega_2 + \int_{P_0}^{P_2} \omega_2,$$

le point P_0 étant fixé sur $\mathcal{C}$. On a

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{1}{\sqrt{P(z_1)}}\frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{\sqrt{P(z_2)}}\frac{dz_2}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\zeta_2}{dt} = \frac{z_1}{\sqrt{P(z_1)}}\frac{dz_1}{dt} + \frac{z_2}{\sqrt{P(z_2)}}\frac{dz_2}{dt} = 1,$$
$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{P(z_1)}}\frac{dz_1}{d\tau} + \frac{1}{\sqrt{P(z_2)}}\frac{dz_2}{d\tau} = -1,$$
$$\frac{d\zeta_2}{d\tau} = \frac{z_1}{\sqrt{P(z_1)}}\frac{dz_1}{d\tau} + \frac{z_2}{\sqrt{P(z_2)}}\frac{dz_2}{d\tau} = 0,$$

Donc le système se transforme, via l'application d'Abel, en un système linéaire à coefficients constants. Le problème de Jacobi permet d'inverser le changement de variables (4) et le système en question est complètement linéarisé sur la variété jacobienne de $\mathcal{C}$. $\diamondsuit$

Proposition 2. *Pour*

$$\alpha_1 = \beta_1 = a, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha_k = \beta_k = 0, \quad \forall k \geq 3,$$

le système différentiel (3) *admet une paire de Lax de sorte que la fonction*

$$H_2 = \frac{a}{2}(x_1^2 + x_2^2 + a(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)^2) + \frac{1}{4}(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2,$$

est une intégrale première quartique et la linéarisation s'effectue sur une courbe elliptique.

Démonstration. Nous allons utiliser la méthode de la courbe spectrale (voir [3,5,7,12]). Pour celà, considérons la forme de Lax

$$\frac{d}{dt}A_h = [B_h, A_h] \equiv B_h A_h - A_h B_h,$$

où A_h et B_h sont des matrices dépendant d'un paramètre complexe h (paramètre spectrale). Les coefficients du polynôme caratéristique $\det(A_h - \lambda I)$, ne dépendent pas du temps et ce sont des intégrales premières en involution. En outre, d'après la méthode de linéarisation de van Moerbeke–Mumford [11, 7] le flot se linéarise sur un tore algébrique complexe. Celui-ci étant engendré par le réseau définit par la matrice des périodes de la surface de Riemann (ou courbe spectrale), d'équation affine

$$P(h, \lambda) \equiv \det(A_h - \lambda I) = 0, \tag{5}$$

et cette équation décrit une déformation isospectrale. Dans le cas de notre système, on choisit

$$A_h = \begin{pmatrix} U_h & V_h \\ W_h & -U_h \end{pmatrix}, \qquad B_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ R_h & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$U_h = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{a+h}\right), \quad W_h = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{a+h}\right) - h + \frac{1}{2}(y_1^2 + y^2),$$

$$V_h = -1 - \frac{y_1^2 + y_2^2}{2(a+h)}, \qquad R_h = h - y_1^2 - y_2^2.$$

Explicitement, l'équation (5) fournit

$$w^2 = h^3 + 2ah^2 + (a^2 - H_1)h - H_2, \tag{6}$$

où

$$
\begin{aligned}
w &= \lambda(h+a),\\
H_1 &= \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+\frac{a}{2}(y_1^2+y_2^2)+\frac{1}{4}(y_1^2+y_2^2)^2,\\
H_2 &= \frac{a}{2}(x_1^2+x_2^2+a(y_1^2+y_2^2)+\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)^2)+\frac{1}{4}(x_1y_2-x_2y_1)^2=\\
&= aH_1+\frac{1}{4}(x_1y_2-x_2y_1)^2.
\end{aligned}
$$

Les deux intégrales premières H_1 et H_2 sont évidemment en involution et le système en question est Liouville intégrable. Le flot est donc linéaire dans la variété jacobienne de la surface de Riemann d'équation affine (6). Le polynôme étant de degré 3, la surface de Riemann est de genre 1 et on a donc une linéarisation sur une courbe elliptique. $\Diamond$

Remarque 1. Sous les conditions de la proposition précédente, les solutions du système différentiel associé à la fonction $H(2)$ sont liées à celles des équations couplées non-linéaires de Schrödinger

$$i\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(|u|^2+|v|^2)u,\quad i\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(|u|^2+|v|^2)v.$$

En effet, posons

$$u(s,t)=\zeta(t)\exp(ias),\qquad v(s,t)=\eta(t)\exp(ias),$$

où $\zeta(t)$ et $\eta(t)$ sont deux fonctions réelles et a une constante arbitraire, ce qui implique comme conséquence qu'on aura

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+(a+\zeta^2+\eta^2)\zeta=0,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}+(a+\zeta^2+\eta^2)\eta=0.$$

En posant

$$y_1=\zeta,\quad y_2=\eta,\quad x_1=\frac{d\zeta}{dt},\quad x_2=\frac{d\eta}{dt},$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt}&=x_1, &\quad \frac{dx_1}{dt}&=-(a+y_1^2+y_2^2)y_1,\\
\frac{dy_2}{dt}&=x_2, &\quad \frac{dx_2}{dt}&=-(a+y_1^2+y_2^2)y_2.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Ces équations donnent un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^4$ et il apparait ainsi que la résolution du système se trouve ramenée à la recherche des solutions d'un système dynamique hamiltonien de la forme (3) avec $\alpha_1=\beta_1=a, \alpha_2=\beta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha_k=\beta_k=0, \forall k\geq 3$.

References

[1] ADLER, M. and VAN MOERBEKE, P.: Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory, *Adv. in Math.* **38** (1980), 318–379.

[2] ARNOLD, V. I.: Mathematical methods in classical mechanics, Springer-Verlag, 2nd edition, 1989.

[3] BELOKOLOS, A. I., BOBENKO, V. Z., ENOLSKII, V. Z., ITS, A. R. and MATVEEV, V. B.: Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations, Springer-Verlag, 1994.

[4] DUBROVIN, B. A.: Theta functions and non-linear equations, *Russian Math. Surveys* **36**/2 (1981), 11–92.

[5] EILBECK, J. C., ENOLSKII, V. Z., KUZNETSOV, V. B. and TSIGANOV, A. V.: Linear r-matrix algebra for classical separable systems, *J. Phys. A.: Math. Gen.* **27** (1994), 567–578.

[6] GRIFFITHS, P. A. and HARRIS, J.: Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978.

[7] LESFARI, A.: Completely integrable systems : Jacobi's heritage, *J. Geom. Phys.* **31** (1999), 265–286.

[8] LESFARI, A.: The problem of the motion of a solid in an ideal fluid. Integration of the Clebsch's case, *Nonlinear diff. equ. appl.* **8** (2001), 1–13.

[9] LESFARI, A.: Le théorème d'Arnold–Liouville et ses conséquences, *Elem. Math.* **58**/1 (2003), 6–20.

[10] LESFARI, A.: Le système différentiel de Hénon–Heiles et les variétés Prym, *Pacific J. Math.* **212**/1 (2003), 125–132.

[11] VAN MOERBEKE, P. and MUMFORD, D.: The spectrum of difference operators and algebraic curves, *Acta Math.* **143** (1979), 93–154.

[12] MOSER, J. K.: Various aspects of integrable Hamiltonian systems, *Progress in Math.* **8** (1980), 223–289.

[13] ZIGLIN, S. L.: Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II, *Funct. Anal. and its appl.* **17** (1983), 6–17.

[14] WOJCIECHOWSKI, S.: On a Lax-type representation and separability of the anisotropic harmonic oscillator in a radial quartic potential, *Lett. Nuovo Cimento* **41** (1984), 361–369.