МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
57 (2005), 15–17

UDK 517.911
оригинални научни рад
научная работа

О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Юлка Кнежевич-Милянович

Абстракт. В статье рассматривается вопрос о необходимом условии существования периодических решений системы $X' = \varphi(t)P(X)+Q(t)$, где $\varphi(t)$, $Q_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ – непериодические функции определенных классов.

Рассмотрим систему

$$X' = \varphi(t)P(X) + Q(t), \tag{1}$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$, $P = (P_1, \dots, P_n)$, $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$; $\varphi(t)$ – скалярная функция. Правая часть системы (1) обеспечивает существование непрерывного решения в любой точке области $I \times G$, $I = (-\infty, +\infty)$, G – некоторая область пространства $(x_1, \dots, x_n)$.

Определение 1. Будем говорить, что вектор-функция $Q(t)$ принадлежит классу A_ω, если существует постоянный вектор $A = (a_1, \dots, a_n) \neq \Theta$, $\Theta = (0, \dots, 0)$, такой, что скалярное произведение $(A, Q(t)) \in C(I)$ и является ω-периодической функцией.

Определение 2. Скалярную функцию $\varphi(t)$, определенную в интервале I назовем функцией класса M_ω, если существует постоянная $M \neq 0$ такая, что $\varphi(t + \omega) = \varphi(t) + M$, для любого $t \in I$.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция $Q(t)$ принадлежит классу A_ω, а функция $\varphi(t)$ – классу M_ω. Для того чтобы система (1) имела периодическое решение с периодом, кратным ω, необходимо, чтобы*

$$\int_0^\omega (A, Q(t))\, dt = 0. \tag{2}$$

AMS Subject Classification: 34 C 25

Keywords and phrases: Periodic solution, differential system.

Поддержано Министерством науки, технологий и развитии Республики Сербии, проект «Структуры функционального анализа и дифференциальнных уравнений», №. 1856.

Доказательство. Пусть вектор-функция $X = \overline{X}(t)$ – T-периодическое решение системы (1), где $T = k\omega$, k – некоторое натуральное число. Из того, что вдоль этого решения правая часть системы (1) является T-периодической вектор-функцией, следует:

$$[\varphi(t+T) - \varphi(t)]P(\overline{X}(t)) + Q(t+T) - Q(t) = \Theta$$

для любого $t \in I$. Отсюда, в силу условия $\varphi(t) \in M_\omega$, будем имееть

$$kMP(\overline{X}(t)) + Q(t+T) - Q(t) = \Theta. \tag{3}$$

Умножая (3) скалярно на вектор A и учитывая условие $Q(t) \in A_\omega$, получим, что вдоль T-периодической интегральной кривой $X = \overline{X}(t)$

$$(P(\overline{X}(t)), A) = 0. \tag{4}$$

Из (1) в силу (4) следует $\dfrac{d}{dt}\Big[\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i(t)\Big] = (Q(t), A)$, откуда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i(0) + \int_0^t (Q(s), A)\, ds.$$

Полагая $t = k\omega$, в силу равенств $\bar{x}_i(0) = \bar{x}_i(\omega)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и ω-периодичности функции $(Q(s), A)$ получим $\int_0^\omega (Q(s), A)\, ds = 0$. Теорема доказана. ∎

В случае, если $Q(t)$ – ω-периодическая вектор-функция, теорему 1 можно уточнить.

Теорема 2. *Пусть $Q(t)$ – ω-периодическая вектор-функция, а функция $\varphi(t)$ принадлежит классу M_ω. Тогда, если хотя бы для одного $i = 1, \ldots, n$*

$$\int_0^\omega Q_i(t)\, dt \neq 0,$$

то система (1) не имеет периодических решений с периодом, кратным ω.

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению, существует T-периодическое решение системы (1), где $T = k\omega$, k – некоторое натуральное число. Тогда из (3) следует, что $P_i(\overline{X}(t)) = 0$, $(i = 1, \ldots, n)$ для любого $t \in I$. Потому из (1) получим

$$\bar{x}_i(t) = \bar{x}_i(0) + \int_0^t Q_i(s)\, ds \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Если теперь положить $t = T$, то в силу T-периодичности вектор-функции $X = \overline{X}(t)$ и ω-периодичности функций $Q_i(s)$ $(i = 1, \ldots, n)$ получим, что $\int_0^\omega Q_i(s)\, ds = 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Противоречие доказывает теорему. ∎

Пример. Пусть для системы (1): $n = 3$; $\varphi(t) = \int_0^t f(s)\, ds$; $f(s)$ – π-периодическая функция такая, что $\int_0^\pi f(s)\, ds \neq 0$; $Q(t) = (e^t + \cos^2 t - 2t, 2e^t, t)$; $P(x) = [P_1(x), P_2(x), P_3(x)]$ – некоторая вектор-функция. Легко проверить, что $\varphi(t) \in M_\pi$, где $M = \int_0^\pi f(s)\, ds$; $Q(t) \in A_\pi$, где $A = (-2, 1, -4)$. Поскольку

$$\int_0^\pi (Q(t), A)\, dt = -2\int_0^\pi \cos^2 t\, dt = -\pi \neq 0,$$

то рассматриваемая система не имеет $k\pi$-периодических решений (k – любое натуральное число).

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] Еругин, Н. П., *Курс обыкновенных дифференциальних уравнений*, Киев, 1984.

(поступило 11.02.2003, переработано 19.01.2005)

Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија и Црна Гора