МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
62, 2 (2010), 155–167
June 2010

оригинални научни рад
article de recherche

# STRUCTURES DE JACOBI SUR UNE VARIÉTÉ DES POINTS PROCHES

**Basile Guy Richard Bossoto**

**Abstract.** We consider a local algebra $A$ (in the sense of André Weil), a smooth paracompact manifold $M$ and the manifold $M^A$ of infinitely near points on $M$ of kind $A$. In this paper, we define and study the notions of $A$-Jacobi structures on $M^A$.

## 1. Introduction

On considère une algèbre locale $A$ (au sens d'André Weil), c'est-à-dire une algèbre réelle $A$ commutative unitaire de dimension finie sur $\mathbb{R}$, ayant un idéal maximal unique de codimension 1 sur $\mathbb{R}$, $M$ une variété lisse paracompacte et $M^A$ la variété des points proches de $M$ d'espèce $A$ [11].

L'ensemble, $C^\infty(M^A, A)$, des fonctions sur $M^A$ à valeurs dans $A$ est une algèbre commutative unitaire sur $A$. En notant, $C^\infty(M)$, l'algèbre des fonctions numériques de classe $C^\infty$ sur $M$, alors pour $f \in C^\infty(M)$, l'application

$$f^A : M^A \longrightarrow A, \quad \xi \longmapsto \xi(f),$$

est de classe $C^\infty$ et l'application

$$C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \quad f \longmapsto f^A,$$

est un homomorphisme d'algèbres réelles.

Il y a équivalence entre les assertions suivantes [1]:

1. $X : C^\infty(M^A) \longrightarrow C^\infty(M^A)$ est un champ de vecteurs sur $M^A$;
2. $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$ est une application linéaire vérifiant

$$X(fg) = X(f) \cdot g^A + f^A \cdot X(g)$$

pour tous $f$ et $g$ dans $C^\infty(M)$.

---

*2010 AMS Subject Classification*: 58A20, 58A32, 11F50.

*Keywords and phrases*: Infinitely near point; local algebra, Lie-Rinehart algebra, Jacobi algebra.

Ainsi l'ensemble, $\mathcal{X}(M^A)$, des champs de vecteurs sur $M^A$ est un $C^\infty(M^A, A)$-module [1].

Lorsque $X$ est un champ de vecteurs sur $M^A$, considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, alors il existe une dérivation et une seule [1]

$$\widetilde{X} : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

telle que:

1. $\widetilde{X}$ est $A$-linéaire;
2. $\widetilde{X}\left[C^\infty(M^A)\right] \subset C^\infty(M^A)$;
3. $\widetilde{X}(f^A) = X(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.

Lorsque $R$ est un anneau commutatif unitaire, d'élément unité $1_R$, et lorsque $E$ est un $R$-module, une application linéaire $\delta : R \longrightarrow E$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq 1$ si, pour tous $a$ et $b$ dans $R$,

$$\delta(ab) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b) - ab \cdot \delta(1_R).$$

Lorsque $\delta(1_R) = 0$, on a la notion usuelle de dérivation de $R$ dans $E$.

Ainsi une application linéaire $\delta : R \longrightarrow E$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq 1$ si et seulement si l'application

$$R \longrightarrow E, \quad a \mapsto \delta(a) - a \cdot \delta(1_R),$$

est une dérivation.

Dans toute la suite, $A$ désigne une algèbre locale (au sens d'André Weil), $M$ une variété lisse paracompacte, $M^A$ la variété des points proches de $M$ d'espèce $A$, $C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions numériques de classe $C^\infty$ sur $M$ et d'élément-unité $1_{C^\infty(M)}$, $\mathcal{X}(M)$ l'algèbre de Lie réelle des champs de vecteurs sur $M$ et $\mathcal{D}(M)$ l'algèbre de Lie réelle des opérateurs différentiels d'ordre $\leq 1$ de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$. Le terme "opérateur différentiel" signifiera "opérateur différentiel d'odre $\leq 1$".

## 2. Structure de $A$-algèbre de Lie-Rinehart sur $\mathcal{D}(M^A)$

PROPOSITION 1. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $X : C^\infty(M^A) \longrightarrow C^\infty(M^A)$ *est un opérateur différentiel;*
2. $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$ *est une application* $\mathbb{R}$*-linéaire vérifiant*

$$X(fg) = X(f) \cdot g^A + f^A \cdot X(g) - f^A \cdot g^A \cdot X(1_{C^\infty(M)})$$

*pour tous* $f, g \in C^\infty(M)$.

*Démonstration.* Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ une base de $A$ et soit $(a^*_\alpha)_{\alpha\in I}$ la base duale de la base $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$.

$\Longrightarrow$. Comme $X$ est un opérateur différentiel, alors l'application

$$C^\infty(M^A) \longrightarrow C^\infty(M^A), \quad \varphi \mapsto X(\varphi) - \varphi \cdot X(1_{C^\infty(M^A)})$$

est une dérivation, donc un champ de vecteurs sur $M^A$. Compte tenu de [1], l'application

$$Y : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \quad f \longmapsto \left(\sum_{\alpha\in I} \left[X(a_\alpha^* \circ f^A)\right] \cdot a_\alpha\right) - f^A \cdot X(1_{C^\infty(M^A)})$$

vérifie

$$Y(fg) = Y(f) \cdot g^A + f^A \cdot Y(g).$$

On vérifie que l'application

$$C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \quad f \longmapsto Y(f) + f^A \cdot X(1_{C^\infty(M^A)})$$

répond à la question.

$\Longleftarrow$. Soit $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$ une application $\mathbb{R}$-linéaire vérifiant

$$X(fg) = X(f) \cdot g^A + f^A \cdot X(g) - f^A \cdot g^A \cdot X(1_{C^\infty(M)})$$

pour tous $f, g \in C^\infty(M)$. L'application

$$Z : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), f \longmapsto X(f) - f^A \cdot X(1_{C^\infty(M)})$$

est un champ de vecteurs sur $M^A$ considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$. Compte tenu de [1], il existe une dérivation et une seule

$$\overline{Z} : C^\infty(M^A) \longrightarrow C^\infty(M^A)$$

telle que $Z(f) = \sum_{\alpha\in I} \overline{Z}(a_\alpha^* \circ f^A) \cdot a_\alpha$. L'application

$$C^\infty(M^A) \longrightarrow C^\infty(M^A), \varphi \longmapsto \overline{Z}(\varphi) + \varphi \cdot X(1_{C^\infty(M)}),$$

est un opérateur différentiel. ■

L'ensemble, $\mathcal{D}(M^A)$, des opérateurs différentiels de $C^\infty(M^A)$ dans $C^\infty(M^A)$ considérés comme opérateurs différentiels de $C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$ est un $C^\infty(M^A, A)$-module.

Proposition 2. *Si $X \in \mathcal{D}(M^A)$, considéré comme opérateur différentiel de $C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$, alors il existe un opérateur différentiel et un seul*

$$\widetilde{X} : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

*tel que :*

1. *$\widetilde{X}$ est $A$-linéaire;*
2. *Pour tout $\varphi \in C^\infty(M^A)$, $\left[\widetilde{X}(\varphi) - \varphi \cdot X(1_{C^\infty(M)})\right] \in C^\infty(M^A)$;*
3. *$\widetilde{X}(f^A) = X(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.*

*Démonstration.* Comme $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$ est un opérateur différentiel, alors l'application

$$Y : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \quad f \longmapsto X(f) - f^A \cdot X(1_{C^\infty(M)}),$$

est une dérivation. Compte tenu de [1], il existe une dérivation et une seule

$$\widetilde{Y} : C^{\infty}(M^A, A) \longrightarrow C^{\infty}(M^A, A)$$

telle que:

1 – $\widetilde{Y}$ est $A$-linéaire;

2 – $\widetilde{Y}(\sigma) \in C^{\infty}(M^A)$ pour tout $\sigma \in C^{\infty}(M^A)$;

3 – $\widetilde{Y}(f^A) = Y(f)$ pour tout $f \in C^{\infty}(M)$.

L'application

$$\widetilde{X} : C^{\infty}(M^A, A) \longrightarrow C^{\infty}(M^A, A), \quad \varphi \longmapsto \widetilde{Y}(\varphi) + \varphi \cdot X(1_{C^{\infty}(M)}),$$

est telle que :

1 – $\widetilde{X}$ est $A$-linéaire;

2 – Pour tout $\varphi \in C^{\infty}(M^A)$, $\left[\widetilde{X}(\varphi) - \varphi \cdot X(1_{C^{\infty}(M)})\right] \in C^{\infty}(M^A)$;

3 – $\widetilde{X}(f^A) = X(f)$ pour tout $f \in C^{\infty}(M)$.

Ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 3. *Pour $\varphi \in C^{\infty}(M^A, A)$ et pour $X \in \mathcal{D}(M^A)$, on a*

$$\widetilde{\varphi \cdot X} = \varphi \cdot \widetilde{X}.$$

Theoreme 4. *L'application*

$$[\ ,\ ] : \mathcal{D}(M^A) \times \mathcal{D}(M^A) \longrightarrow \mathcal{D}(M^A), \quad (X, Y) \longmapsto \widetilde{X} \circ Y - \widetilde{Y} \circ X,$$

*est $A$-bilinéaire alternée et définit une structure de $A$-algèbre de Lie sur $\mathcal{D}(M^A)$.*

*De plus, pour $\varphi \in C^{\infty}(M^A, A)$ et pour $X, Y \in \mathcal{D}(M^A)$, on a*

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$$

*et*

$$[X, \varphi \cdot Y] = \left[\widetilde{X}(\varphi) - \varphi \cdot \widetilde{X}(1_{C^{\infty}(M^A, A)})\right] \cdot Y + \varphi \cdot [X, Y]\,.$$

*Démonstration.* Pour $X, Y \in \mathcal{D}(M^A)$, l'application

$$[\ ,\ ] : \mathcal{D}(M^A) \times \mathcal{D}(M^A) \longrightarrow \mathcal{D}(M^A), \quad (X, Y) \longmapsto \widetilde{X} \circ Y - \widetilde{Y} \circ X,$$

est manifestement $\mathbb{R}$-bilinéaire alternée. Pour $f$ et $g$ appartenant à $C^{\infty}(M)$, on vérifie que

$$[X, Y]\,(fg) = [X, Y]\,(f) \cdot g^A + f^A \cdot [X, Y]\,(g) - f^A \cdot g^A \cdot [X, Y]\,(1_{C^{\infty}(M)})$$

Ainsi $[X, Y] \in \mathcal{D}(M^A)$.

Pour $a \in A$ et pour $f \in C^\infty(M)$, on a:

$$\begin{aligned}[X, a \cdot Y](f) &= \widetilde{X}[a \cdot Y(f)] - \widetilde{a \cdot Y}[X(f)] \\ &= a \cdot \widetilde{X}[Y(f)] - a \cdot \widetilde{Y}[X(f)] = a \cdot [X, Y](f).\end{aligned}$$

Ainsi $[X, a \cdot Y] = a \cdot [X, Y]$. L'application

$$[,] : \mathcal{D}(M^A) \times \mathcal{D}(M^A) \longrightarrow \mathcal{D}(M^A), \quad (X, Y) \longmapsto \widetilde{X} \circ Y - \widetilde{Y} \circ X,$$

est donc $A$-bilinéaire alternée.

Pour $X, Y \in \mathcal{D}(M^A)$ et pour $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$, l'application

$$C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \varphi \longmapsto [\widetilde{X}, \quad \widetilde{Y}](\varphi) = \widetilde{X}\left[\widetilde{Y}(\varphi)\right] - \widetilde{Y}\left[\widetilde{X}(\varphi)\right]$$

est $A$-linéaire. Pour $\sigma \in C^\infty(M^A)$, on vérifie que

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](\sigma) - \sigma \cdot [X, Y](1_{C^\infty(M)})$$

appartient à $C^\infty(M^A)$ et que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](f^A) = [X, Y](f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$. On déduit que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$. Pour $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$ et pour $f \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}[X, \varphi \cdot Y](f) &= \widetilde{X}[\varphi \cdot Y(f)] - \widetilde{\varphi \cdot Y}[X(f)] \\ &= \widetilde{X}(\varphi) \cdot Y(f) + \varphi \cdot \widetilde{X}[Y(f)] - \varphi \cdot Y(f) \cdot \widetilde{X}(1_{C^\infty(M^A, A)}) - \varphi \cdot \widetilde{Y}[X(f)] \\ &= \widetilde{X}(\varphi) \cdot Y(f) - \varphi \cdot Y(f) \cdot \widetilde{X}(1_{C^\infty(M^A, A)}) + \varphi \cdot \widetilde{X}[Y(f)] - \varphi \cdot \widetilde{Y}[X(f)] \\ &= \widetilde{X}(\varphi) \cdot Y(f) - \varphi \cdot Y(f) \cdot \widetilde{X}(1_{C^\infty(M^A, A)}) + \varphi \cdot [X, Y](f) \\ &= \left[\widetilde{X}(\varphi) - \varphi \cdot \widetilde{X}(1_{C^\infty(M^A, A)})\right] \cdot Y(f) + \varphi \cdot [X, Y](f)\end{aligned}$$

Ainsi

$$[X, \varphi \cdot Y] = \left[\widetilde{X}(\varphi) - \varphi \cdot \widetilde{X}(1_{C^\infty(M^A, A)})\right] \cdot Y + \varphi \cdot [X, Y].$$

D'où l'assertion. ■

Lorsque $\mathcal{D}_A\left[C^\infty(M^A, A)\right]$ désigne le $C^\infty(M^A, A)$-module des opérateurs différentiels de $C^\infty(M^A, A)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ qui sont $A$-linéaires, l' application

$$\sim : \mathcal{D}(M^A) \longrightarrow \mathcal{D}_A\left[C^\infty(M^A, A)\right], \quad X \longmapsto \widetilde{X},$$

est $C^\infty(M^A, A)$-linéaire et est un morphisme de $A$-algèbres de Lie.

En suivant [7], on a:

Corollaire 5. *Le couple* $(\mathcal{D}(M^A), \sim)$ *est une* $A$*-algèbre de Lie-Rinehart.*

## 3. $A$-structures de Jacobi sur $M^A$

Une $A$-structure de Jacobi sur $M^A$ ou une structure de $A$-algèbre de Jacobi sur $C^\infty(M^A, A)$ est la donnée d'une structure de $A$-algèbre de Lie sur $C^\infty(M^A, A)$, de crochet $\{,\}$, telle l'application

$$ad(\varphi) : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \quad \psi \mapsto \{\varphi, \psi\},$$

soit un opérateur différentiel pour tout $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$.

On va, dans ce qui suit, construire trois $A$-structures de Jacobi sur $M^A$.

**3.1. $A$-structure de Jacobi sur $M^A$ lorsque le couple $(\mathcal{D}(M^A), \sim)$ admet une structure de $A$-algèbre de Lie-Rinehart-Jacobi symplectique.**

On rappelle que le couple $(\mathcal{D}(M^A), \sim)$ admet une structure de $A$-algèbre de Lie-Rinehart-Jacobi symplectique s'il existe une 2-forme alternée et nondégénérée

$$\Omega : \mathcal{D}(M^A) \times \mathcal{D}(M^A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

telle que $\widetilde{d}\Omega = 0$, où $\widetilde{d}$ est la différentielle de degré $+1$ associée à la représentation $\sim$ [7].

Pour $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$, on note $X_\varphi$ l'unique élément de $\mathcal{D}(M^A)$ tel que

$$i_{X_\varphi}\Omega = \widetilde{d}\varphi.$$

Pour tout $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$, on vérifie que $\theta_{X_\varphi}\Omega = 0$ où $\theta_{X_\varphi}$ désigne la dérivée de Lie par rapport à l'opérateur différentiel $X_\varphi$. Pour $\varphi, \psi \in C^\infty(M^A, A)$, on pose

$$\{\varphi, \psi\} = -\Omega(X_\varphi, X_\psi).$$

Proposition 6. *Si $\varphi, \psi \in C^\infty(M^A, A)$, alors $\{\varphi, \psi\} = \widetilde{X_\varphi}(\psi)$ et*

$$[X_\varphi, X_\psi] = X_{\{\varphi,\psi\}}.$$

*Démonstration.* Pour $\varphi, \psi \in C^\infty(M^A, A)$, on a

$$\{\varphi, \psi\} = -\Omega(X_\varphi, X_\psi) = \Omega(X_\psi, X_\varphi) = (i_{X_\psi}\Omega)(X_\varphi) = \left[\widetilde{d}(\psi)\right](X_\varphi) = \widetilde{X_\varphi}(\psi)$$

et

$$\begin{aligned} i_{[X_\varphi, X_\psi]}\Omega &= [\theta_{X_\varphi}, i_{X_\psi}](\Omega) = \theta_{X_\varphi}(i_{X_\psi}\Omega) - i_{X_\psi}(\theta_{X_\varphi}\Omega) = \theta_{X_\varphi}\widetilde{d}\psi = \widetilde{d}[\theta_{X_\varphi}(\psi)] \\ &= \widetilde{d}[\widetilde{X_\varphi}(\psi)] = \widetilde{d}\{\varphi, \psi\} = i_{\{\varphi,\psi\}}\Omega. \end{aligned}$$

Comme $\Omega$ est nondégénérée, on déduit que $[X_\varphi, X_\psi] = X_{\{\varphi,\psi\}}$. D'où les deux assertions. ∎

Theoreme 7. *Si le couple $(\mathcal{D}(M^A), \sim)$ admet une structure de $A$-algèbre de Lie-Rinehart-Jacobi symplectique, alors l'application*

$$C^\infty(M^A, A) \times C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \quad (\varphi, \psi) \longmapsto \{\varphi, \psi\},$$

*définit une structure de $A$-algèbre de Jacobi sur $C^\infty(M^A, A)$.*

*Démonstration.* Comme, pour tous $\varphi, \psi \in C^\infty(M^A, A)$, on a

$$\{\varphi, \psi\} = -\Omega(X_\varphi, X_\psi) = \Omega(X_\psi, X_\varphi) = -\left[-\Omega(X_\psi, X_\varphi)\right] = -\{\psi, \varphi\}.$$

D'où $\{\varphi,\ \psi\} = -\{\psi, \varphi\}$. Pour tout $a \in A$,

$$\{\varphi, a \cdot \psi\} = \widetilde{X_\varphi}(a\psi) = a \cdot \{\varphi,\ \psi\}.$$

Ainsi $\{\varphi, a \cdot \psi\} = a \cdot \{\varphi,\ \psi\}$. Pour $\varphi, \psi, \nu \in C^\infty(M^A, A)$, on a

$$\begin{aligned}
\{\varphi, \{\psi, \nu\}\} &+ \{\psi, \{\ \nu, \varphi\}\} + \{\nu, \{\varphi, \psi\}\} \\
&= \{\varphi, \{\psi, \nu\}\} - \{\psi, \{\ \varphi, \nu\}\} - \{\{\varphi, \psi\}, \nu\} \\
&= \widetilde{X_\varphi}[\widetilde{X_\psi}(\nu)] - \widetilde{X_\psi}[\widetilde{X_\varphi}(\nu)] - \ \widetilde{X_{\{\varphi,\psi\}}}(\nu) \\
&= [\widetilde{X_\varphi}, \widetilde{X_\psi}](\nu) - [\widetilde{X_\varphi, X_\psi}](\nu) \\
&= \left([\widetilde{X_\varphi}, \widetilde{X_\psi}]\ - [\widetilde{X_\varphi, X_\psi}]\right)(\nu) = 0.
\end{aligned}$$

L'identité de Jacobi est ainsi démontrée.

Pour $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$, l'application

$$ad(\varphi) : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \psi \longmapsto \{\varphi, \psi\},$$

est un opérateur différentiel. En effet comme

$$\widetilde{X_\varphi} : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

est un opérateur différentiel, alors pour $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(M^A, A)$ on a:

$$\begin{aligned}
[ad(\varphi)](\psi_1 \cdot \psi_2) &= \{\varphi, \psi_1 \cdot \psi_2\} = \widetilde{X_\varphi}(\psi_1 \cdot \psi_2) \\
&= \widetilde{X_\varphi}(\psi_1) \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot \widetilde{X_\varphi}(\psi_2) - \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \widetilde{X_\varphi}(1_{C^\infty(M^A,A)}) \\
&= \{\varphi, \psi_1\} \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot \{\varphi, \psi_2\} - \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \{\varphi, 1_{C^\infty(M^A,A)}\} \\
&= [ad(\varphi)]\,(\psi_1) \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot [ad(\varphi)]\,(\psi_2) - \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot [ad(\varphi)]\,(1_{C^\infty(M^A,A)}).
\end{aligned}$$

On conclut que $C^\infty(M^A, A)$ est une $A$-algèbre de Jacobi c'est-à-dire que $M^A$ est une $A$-variété de Jacobi. ■

### 3.2. *A*-Structure de Jacobi sur $M^A$ lorsque $M$ est une variété de Jacobi.

On rappelle qu'une structure de variété de Jacobi sur une variété lisse $M$ est la donnée d'une structure d'algèbre de Lie réelle sur $C^\infty(M)$, de crochet, $\{\ ,\ \}$, telle que pour tout $f \in C^\infty(M)$, l'application

$$ad(f) : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad g \mapsto \{f, g\}\,,$$

soit un opérateur différentiel. Dans ce cas, on dit que $M$ est une variété de Jacobi et que $C^\infty(M)$ est une algèbre de Jacobi.

Dans ces conditions, pour tous $f, g \in C^\infty(M)$, on a

$$ad(fg) = f \cdot ad(g) + g \cdot ad(f) - f \cdot g \cdot ad(1_{C^\infty(M)}).$$

Lorsque $ad(1_{C^\infty(M)}) = 0$, on dit que $M$ est une variété de Poisson.

Pour tout $f \in C^{\infty}(M)$,

$$[ad(f)]^A : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M^A, A), \quad g \longmapsto \{f, g\}^A,$$

est un opérateur différentiel et

$$\widetilde{[ad(f)]^A} : C^{\infty}(M^A, A) \longrightarrow C^{\infty}(M^A, A)$$

est l'unique opérateur différentiel qui est $A$-linéaire et qui est tel que

$$\widetilde{[ad(f)]^A}(g^A) = [ad(f)]^A(g) = \{f, g\}^A$$

pour tout $g \in C^{\infty}(M)$.

Proposition 8. *Pour $\varphi \in C^{\infty}(M^A, A)$, l'application*

$$\tau_{\varphi} : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M^A, A), \quad f \longmapsto -\widetilde{[ad(f)]^A}(\varphi),$$

*est un opérateur différentiel.*

*Démonstration.* L'application $\tau_{\varphi}$ est manifestement linéaire. Pour $f, g \in C^{\infty}(M)$, on a

$$\begin{aligned}
\tau_{\varphi}(fg) &= -\widetilde{[ad(fg)]^A}(\varphi) \\
&= -\widetilde{[f \cdot ad(g) + g \cdot ad(f) - f \cdot g \cdot ad(1_{C^{\infty}(M)})]^A}(\varphi) \\
&= f^A \cdot \left(-\widetilde{[ad(g)]^A}\right)(\varphi) + g^A \cdot \left(-\widetilde{[ad(f)]^A}\right)(\varphi) \\
&\quad - f^A \cdot g^A \cdot \left(-\widetilde{\left[ad(1_{C^{\infty}(M)})\right]^A}\right)(\varphi) \\
&= \left(-\widetilde{[ad(f)]^A}\right)(\varphi) \cdot g^A + f^A \cdot \left(-\widetilde{[ad(g)]^A}\right)(\varphi) \\
&\quad - f^A \cdot g^A \cdot \left(-\widetilde{\left[ad(1_{C^{\infty}(M)})\right]^A}\right)(\varphi) \\
&= \tau_{\varphi}(f) \cdot g^A + f^A \cdot \tau_{\varphi}(g) - f^A \cdot g^A \cdot \tau_{\varphi}(1_{C^{\infty}(M)}).
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. ∎

Pour $\varphi \in C^{\infty}(M^A, A)$, l'application

$$\widetilde{\tau_{\varphi}} : C^{\infty}(M^A, A) \longrightarrow C^{\infty}(M^A, A)$$

est l'unique opérateur différentiel qui est $A$-linéaire et qui est tel que

$$\widetilde{\tau_{\varphi}}(f^A) = \tau_{\varphi}(f)$$

pour tout $f \in C^{\infty}(M)$.

Theoreme 9. *Si $M$ est une variété de Jacobi, de crochet $\{\ ,\ \}$, alors l'application*

$$\{\ ,\ \}_A : C^{\infty}(M^A, A) \times C^{\infty}(M^A, A) \longrightarrow C^{\infty}(M^A, A), \quad (\varphi, \psi) \longmapsto \widetilde{\tau_{\varphi}}(\psi),$$

*définit une $A$-structure de Jacobi sur $M^A$.*

*Démonstration.* Les techniques de démonstration sont identiques à celles utilisées dans [2]. ■

On dit que la $A$-structure de Jacobi sur $M^A$ définie par $\{,\}_A$ est le prolongement à $M^A$ de la structure de Jacobi sur $M$ définie par $\{,\}$.

### 3.3. $A$-Structure de Jacobi sur $M^A$ lorsque $M$ est une variété localement conformément symplectique.

PROPOSITION 10. *Si $\omega : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ est une 2-forme différentielle nondégénérée, alors*

$$\omega^A : \mathcal{X}(M^A) \times \mathcal{X}(M^A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

*est nondégénérée.*

*Démonstration.* On va vérifier que l'application

$$\mathcal{X}(M^A) \longrightarrow \wedge^1 \left(M^A, A\right), \quad X \longmapsto i_X \omega^A,$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^A, A)$-modules. Pour cela, il suffit de montrer qu'en chaque point $\xi \in M^A$, l'application

$$T_\xi M^A \longrightarrow T_\xi^* M^A, \quad v \longmapsto i_v \omega^A (\xi),$$

est un isomorphisme de $A$-modules.

On note $\mathfrak{m}$ l'unique idéal maximal de $A$ et $h$ la hauteur de $A$: $h$ est l'entier naturel tel que $\mathfrak{m}^h \neq (0)$ et $\mathfrak{m}^{h+1} = (0)$. Il existe des sous-espaces vectoriels $V_0, V_1, \ldots, V_h$ de $A$ tels que

$$A = V_0 \oplus \cdots \oplus V_h$$

avec $V_i \subset \mathfrak{m}^i$ et $V_i \oplus \mathfrak{m}^{i+1} = \mathfrak{m}^i$ pour $i = 0, 1, \ldots, h$. Ainsi, $V_0 = \mathbb{R}$ et $V_h = \mathfrak{m}^h$.

Pour $k = 0, 1, \ldots, h$, on note $I_k$ l'ensemble des indices d'une base de $V_k$ et $(a_{\alpha_k})_{\alpha_k \in I_k}$ une base de $V_k$. Soit $\xi \in M^A$, $x_0 \in M$ l'origine de $\xi$ et $(U, \varphi)$ une carte locale de $M$ en $x_0$, de fonctions coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ où $n = \dim M$.

Injection : Soit $v \in T_\xi M^A$ tel que $\omega^A(\xi)(v, w) = 0$ pour tout $w \in T_\xi M^A$. L'espace tangent $T_\xi M^A$ est un $A$-module libre de rang $n$ dont une base est $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^A |_\xi, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^A |_\xi\right)$. En particulier, on a

$$\omega^A(\xi)(v, \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)^A |_\xi) = 0$$

pour $l = 1, 2, \ldots, n$. On a

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^A |_\xi$$

avec $v_j \in A$, pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Comme

$$v_j = \sum_{\alpha_k \in I_k, k=0,1,\ldots,h} v_{j,\alpha_k} \cdot a_{\alpha_k}$$

avec $v_{j,\alpha_k} \in \mathbb{R}$, alors

$$v = \sum_{j=1}^{n} \left[ \sum_{\alpha_k \in I_k, k=0,1,\ldots,h} v_{j,\alpha_k} \cdot a_{\alpha_k} \right] \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^A |_{\xi}.$$

L'équation

$$\omega^A(\xi)\,(v, \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \right)^A |_{\xi}) = 0$$

signifie que

$$\sum_{\alpha_k \in I_k, k=0,1,\ldots,h} \left( \sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_k} \cdot \left[ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right]^A (\xi) \right) \cdot a_{\alpha_k} = 0$$

pour $l = 1, 2, \ldots, n$. Ainsi, on a

$$\sum_{\alpha_k \in I_k, k=0,1,\ldots,h} \left( \sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_k} \cdot \left[ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right] (x_0) \right) \cdot a_{\alpha_k} + \sum_{\alpha_k \in I_k, k=0,1,\ldots,h} \left( \sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_k} \cdot \theta_{jl}(\xi) \right) \cdot a_{\alpha_k} = 0$$

avec $\theta_{jl}(\xi) \in \mathfrak{m}$. Il s'ensuit que $\sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_0} \cdot \left[ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right] (x_0) = 0$ pour $l = 1, 2, \ldots, n$. Comme $\omega$ est nondégénérée, on déduit que $v_{j,\alpha_0} = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$.

En raisonnant par récurrence, on suppose que $v_{j,\alpha_r} = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Montrons que $v_{j,\alpha_{r+1}} = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. L'équation devient

$$\sum_{\alpha_k \in I_k, k=r+1,\ldots,h} \left( \sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_k} \cdot \left[ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right]^A (\xi) \right) \cdot a_{\alpha_k} = 0$$

pour $l = 1, 2, \ldots, n$. Ainsi

$$0 = \sum_{\alpha_{r+1} \in I_{r+1}} \left( \sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_{r+1}} \cdot \left[ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right]^A (\xi) \right) \cdot a_{\alpha_{r+1}} + \sum_{\alpha_k \in I_k, k=r+2,\ldots,h} \left( \sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_k} \cdot \left[ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right]^A (\xi) \right) \cdot a_{\alpha_k}.$$

On a

$$0 = \sum_{\alpha_{r+1} \in I_{r+1}} \left( \sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_{r+1}} \cdot \left[ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right] (x_0) + \theta_{ij}(\xi) \right) \cdot a_{\alpha_{r+1}} + \sum_{\alpha_k \in I_k, k=r+2,\ldots,h} \left( \sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_k} \cdot \left[ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right]^A (\xi) \right) \cdot a_{\alpha_k},$$

avec $\theta_{ij}(\xi) \in \mathfrak{m}$. D'où

$$\sum_{\alpha_{r+1} \in I_{r+1}} \left( \sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_{r+1}} \cdot \left[ \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right] (x_0) \right) \cdot a_{\alpha_{r+1}} = 0.$$

Comme $a_{\alpha_{r+1}}$ est une base de $V_{r+1}$, on déduit

$$\sum_{j=1}^{n} v_{j,\alpha_{r+1}} \cdot \left[ \omega \left( \tfrac{\partial}{\partial x_j}, \tfrac{\partial}{\partial x_l} \right) \right] (x_0) = 0$$

pour $l = 1, 2, \ldots, n$. Comme $\omega$ est nondégénérée, alors $v_{j,\alpha_{r+1}} = 0$.

On conclut que $v = 0$.

Surjection: L'espace $T_\xi^* M^A$ est un $A$-module libre de rang $n = \dim M$. Une base est $\left( (dx_1)^A |_\xi, \ldots, (dx_n)^A |_\xi \right)$ où $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales au voisinage $U$ de l'origine $x_0$ de $\xi \in M^A$.

Soit $\eta \in T_\xi^* M^A$. On écrit

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \cdot (dx_k)^A |_\xi$$

avec $\eta_k \in A$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

Soit $\theta_k$ l'unique champ de vecteurs sur $U$ tel que $dx_k = i_{\theta_k} \omega|_U$. Alors $(dx_k)^A |_\xi = i_{\theta_k^A(\xi)} \cdot \omega^A(\xi)$. Ainsi, $\eta = i_v \omega^A(\xi)$ avec

$$v = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \cdot \theta_i^A(\xi) \in T_\xi M^A.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Dans toute la suite $(M, \alpha, \omega)$ désigne une variété localement conformément symplectique de 1-forme $\alpha$ et de 2-forme $\omega$. Dans ce cas, l'application

$$\rho_\alpha(\theta) : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad f \longmapsto \theta(f) + f \cdot \alpha(\theta),$$

est un opérateur différentiel pour tout $\theta \in \mathcal{X}(M)$.

De plus l'application

$$\rho_\alpha : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M), \quad \theta \longmapsto \rho_\alpha(\theta),$$

est une représentation et le triplet $(\mathcal{X}(M), \rho_\alpha, \omega)$ est une algèbre de Lie-Rinehart-Jacobi [7, 8]. L'opérateur de cohomologie associée à la représentation $\rho_\alpha$ est l'opérateur de cohomologie de Lichnerowicz $d_\alpha$ [3].

La variété différentielle $M$ est une variété de Jacobi où le crochet de deux fonctions $f$ et $g$ est donné par

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g),$$

$X_f$ étant l'unique champ de vecteurs sur $M$ tel que $i_{X_f} \omega = d_\alpha f$.

Pour $X \in \mathcal{X}(M^A)$, considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, l'application

$$\rho_{\alpha^A}(X) : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \quad \varphi \longmapsto \widetilde{X}(\varphi) + \varphi \cdot \alpha^A(X),$$

est un opérateur différentiel qui est $A$-linéaire et l'application

$$\rho_{\alpha^A} : \mathcal{X}(M^A) \longrightarrow \mathcal{D}_A \left[C^\infty(M^A, A)\right], \quad X \longmapsto \rho_{\alpha^A}(X),$$

est $C^\infty(M^A, A)$-linéaire et est un morphisme de $A$-algèbres de Lie.

Proposition 11. *Le couple $(\mathcal{X}(M^A), \rho_{\alpha^A})$ est une $A$-algèbre de Lie-Rinehart.*

La démonstration est une simple vérification.

Si $d_{\rho_{\alpha^A}}$ désigne l'opérateur de cohomologie associé à la représentation $\rho_{\alpha^A}$ et si $d^A$, [bos], est l'opérateur de cohomologie associé à la représentation

$$\mathcal{X}(M^A) \longrightarrow Der_A \left[C^\infty(M^A, A)\right], X \longmapsto \widetilde{X},$$

on vérifie que

$$d_{\rho_{\alpha^A}}\eta = d^A\eta + \alpha^A \Lambda \eta$$

pour tout $\eta \in \Lambda(M^A, A)$. Ainsi on conclut que $d_{\rho_{\alpha^A}} = d^A_{\alpha^A}$. On a immédiatement:

Proposition 12. *Si $(M, \alpha, \omega)$ est une variété localement conformément symplectique, alors le triplet $\left(\mathcal{X}(M^A), \rho_{\alpha^A}, \omega^A\right)$ est une $A$-algèbre de Lie-Rinehart-Jacobi symplectique.*

*Démonstration.* On a

$$d_{\rho_{\alpha^A}}\omega^A = d^A_{\alpha^A}\omega^A = d^A\omega^A + \alpha^A \Lambda \omega^A = (d\omega + \alpha\Lambda\omega)^A = 0.$$

Comme le couple $(\mathcal{X}(M^A), \rho_{\alpha^A})$ est une $A$-algèbre de Lie-Rinehart, comme $\omega^A$ est nondégénérée et comme $d^A_{\alpha^A}\omega^A = 0$, on conclut que le triplet $\left(\mathcal{X}(M^A), \rho_{\alpha^A}, \omega^A\right)$ est une $A$-algèbre de Lie-Rinehart-Jacobi symplectique. ∎

Pour $F \in C^\infty(M^A, A)$, on note $X_F$ l'unique élément de $\mathcal{X}(M^A)$ tel que

$$i_{X_F}\omega^A = d^A_{\alpha^A}F.$$

En s'inpirant des techniques de [7], page 1087, on déduit:

Proposition 13. *L'application*

$$\{,\}_{\omega^A} : C^\infty(M^A, A) \times C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), \quad (F, G) \longmapsto -\omega^A(X_F, X_G),$$

*définit une structure de $A$-algèbre de Jacobi sur $C^\infty(M^A, A)$.*

Proposition 14. *Pour $f \in C^\infty(M)$, $X_{f^A} = (X_f)^A$.*

*Démonstration.* On a

$$i_{X_{f^A}}\omega^A = d^A_{\alpha^A} f^A = d^A f^A + f^A \cdot \alpha^A = (d_\alpha f)^A = (i_{X_f}\omega)^A = i_{(X_f)^A}\omega^A.$$

Comme $\omega^A$ est nondégénérée, l'assertion s'ensuit. ∎

Proposition 15. *Si $\{\ ,\ \}$ est le crochet de Jacobi défini sur $C^\infty(M)$ par la structure de variété de Jacobi déduite de la variété localement conformément symplectique $(M,\alpha,\omega)$, alors pour $f,g\in C^\infty(M)$ on a*

$$\left\{f^A,g^A\right\}_{\omega^A}=\{f,g\}^A\,.$$

*Démonstration.* On a

$$\left\{f^A,g^A\right\}_{\omega^A}=-\omega^A(X_{f^A},X_{g^A})=-\omega^A((X_f)^A,(X_g)^A)=[-\omega(X_f,X_g)]^A=\{f,g\}^A\,.$$

D'où l'assertion. ■

La proposition précédente signifie que si $(M,\alpha,\omega)$ est une variété localement conformément symplectique, la $A$-structure d'algèbre de Jacobi sur $C^\infty(M^A,A)$ définie par la $A$-algèbre de Lie-Rinehart-Jacobi symplectique $\left(\mathcal{X}(M^A),\rho_{\alpha^A},\omega^A\right)$ coïncide avec le prolongement à $M^A$ de la structure de Jacobi sur $M$ définie par la variété localement conformément symplectique $(M,\alpha,\omega)$.

RÉFÉRENCES


[**1**] B.G.R. Bossoto, E. Okassa, *Champs de vecteurs et formes différentielles sur une variété des points proches*, Arch. Math. (Brno) **44** (2008), 159–171.

[**2**] B.G.R. Bossoto, E. Okassa, *A-Poisson structures*, A paraître.

[**3**] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées*, J. Math. Pures Appl. **51** (1978), 453–488.

[**4**] A. Morimoto, *Prolongations of connections to bundles of infinitely near points*, J. Diff. Geometry **11** (1976), 479–498.

[**5**] E. Okassa, *Prolongements des champs de vecteurs à une variété des points proches*, Annales Faculté Sciences Toulouse **8**, (1986-1987), 349–366.

[**6**] E. Okassa, *Relèvements des structures symplectiques et pseudo-riemanniennes à une variété des points proches*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 63–71.

[**7**] E. Okassa, *Algèbres de Jacobi et algèbres de Lie-Rinehart-Jacobi*, J. Pure Appl. Algebra **208** (2007), 1071–1089.

[**8**] E. Okassa, *On Lie-Rinehart-Jacobi algebras*, J. Algebra Appl. **7** (2008), 749–772.

[**9**] G. Rinehart, *Differential forms for general commutative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 195–222.

[**10**] I. Vaisman, *Locally conformal symplectic mainifolds*, Internat. J. Math. Sci. **8** (1985), 521–536.

[**11**] A. Weil, *Théorie des points proches sur les variétés différentiables*, Colloq. Géom. Diff. Strasbourg (1953), 111–117.

[**12**] K. Yano, S. Ishilara, *Differential geometry of tangent bunbles of order 2*, Kodai Math. Sem. Rep. **20** (1968), 318–354.


(received 24.04.2009; in revised form 11.08.2009)

Université Marien NGOUABI, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, B.P.69 – Brazzaville, Congo

*E-mail*: `bossotob@yahoo.fr`