МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
45 (1993), 43–48

UDC 517.982.2
оригинални научни рад
article de recherche

SUR LE g-ANGLE DANS UN ESPACE NORMÉ

P. M. Miličić

Résumé. En utilisant la fonctionelle g définie par (1), on définit ainsi dit le g-angle dans un espace normé réel. On démontre que cet angle remplit les conditions de Menger (Définition 1) dans un espace strictement convexe. Le g-angle et l'angle de Wilson sont égaux seulement dans un espace préhilbertien. L'orthogonalité laquelle est engendrée par le g-angle et ainsi disant la g-orthogonalité ([3]) sont égaux seulement dans un espace préhilbertien. On donne encore quelques caractérisation nouvelles d'espace préhilbertien.

Soit X un espace métrique. K. Menger [2] a défini la notion d'angle dans X.

DÉFINITION 1. ([2]) Soient $x, y, z \in X$, $x \neq y$, $x \neq z$. Nous disons que dans X a défini un angle s'il existe le nombre non négatif $\widehat{yxz}$, tel que: a) $\widehat{yxz} = \widehat{zxy}$; b) $\widehat{yxz} = 0$ si et seulement si on a $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$ ou $d(x,z) + d(y,z) = d(x,y)$; c) $\widehat{yxz} = \pi$ si et seulement si on a $d(x,y) + d(x,z) = d(y,z)$.

On dit que le nombre $\widehat{yxz}$ et l'angle avec le sommet x du triangle xyz. La définition suivante d'angle de Wilson est correcte au sens de la définition 1.

DÉFINITION 2. ([7]) Soient $x, y, z \in X$, $x \neq y$, $x \neq z$. Alors le nombre

$$(\widehat{yxz})_w := \arccos \frac{d^2(x,y) + d^2(x,z) - d^2(y,z)}{2d(x,y)d(x,z)}$$

nous disions l'angle de Wilson.

Dans un espace métrique on peut définir soi-disant un segment métrique $\overline{xy}$ d'extrémités x et y; et, aussi, un rayon $l(x,y)$ (une semidroite orientée) avec le début x et qui contien y $(x \neq y)$. A'savoir, on dit qu'un ensemble $Y \subset X$ est un segment métrique (un rayon) s'il est isometétrique avec un segment (semi-droite orientée) dans un espace euclidien. Si X est un espace normé, alors l'angle de Wilson on peut définir par

$$(\widehat{yxz})_w := \arccos \frac{\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2}{2\|x-y\|\|x-z\|},$$

et le segment métrique $\overline{xy}$ par $\overline{xy} := \{\, x(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1 \,\}$ oú $t \mapsto x(t)$ est une courbe continue qui a la languer $\|x-y\|$ et pour laquelle on a $x(0) = x$, $x(1) = y$. De

Wilson tire son origine la notion d'angle parmi des rayons $l_1 = l(x,y)$ et $l_2 = l(x,z)$ $(x \neq y,\ x \neq z)$.

DÉFINITION 3. ([7]) L'angle parmi des rayons $l_1 = l(x,y)$ et $l_2 = l(x,z)$ (s'il existe) est le nombre $\angle(l_1,l_2)_w := \lim_{y\to x,\, z\to x} (\widehat{yxz})_w$; $y \in l_1,\ z \in l_2$.

Valentine et Wayment (1971) notent le résultat suivant.

THÉORÈME 1. ([6]) *Soit X un espace de Banach et soit il existe $\angle(l(x,y),l(x,z))_w$ $x \neq y,\ x \neq z,\ x,y,z \in X$. Alors*

$$\angle(l(x,y),l(x,z)) = \arccos \frac{\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2}{2\|x-y\|\|x-z\|}.$$

Soit, maintenant, X un espace normé réal $(\dim X > 1)$ et $S(X) = \{\, x \in X : \|x\| = 1 \,\}$. Nous allons nous occuper, ici, avec un angle défine par la fonctionelle

$$g(x,y) := \frac{\|x\|}{2}(\tau_-(x,y) + \tau_+(x,y)), \tag{1}$$

oú

$$\tau_\pm := \lim_{t\to\pm 0} t^{-1}(\|x+ty\| - \|x\|), \tag{2}$$

laquelle existe toujours. Les propriétés essentielles de celle-ci fonctionelle sont:

$$g(x,x) = \|x\|^2 \quad (x \in X), \tag{3}$$
$$g(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta g(x,y) \quad (x,y \in X;\ \alpha,\beta \in \mathbf{R}), \tag{4}$$
$$g(x,x+y) = \|x\|^2 + g(x,y) \quad (x,y \in X), \tag{5}$$
$$|g(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\| \quad (x,y \in X). \tag{6}$$

Come on a, en vertu de (6),

$$-1 \leqslant \frac{g(x-y,x-z) + g(x-z,x-y)}{2\|x-y\|\|x-z\|} \leqslant 1 \quad (x \neq y, x \neq z),$$

la deéfinition suivante est correcte.

DÉFINITION 4. Nous appellerons le g-angle, avec le sommet x du triangle xyz, le nombre

$$(\widehat{yxz})_g := \arccos \frac{g(x-y,x-z) + g(x-z,x-y)}{2\|x-y\|\|x-z\|} \quad (x \neq y, x \neq z).$$

Le cas $x = 0$ nous désignerons avec

$$\angle(y,z)_g := \arccos \frac{g(y,z) + g(z,y)}{2\|x\|\|y\|},$$

et nous disons que $\angle(x,y)_g$ est le g-angle entre des vecteurs x et y.

En particulier si $g(x,y) + g(x,x) = 0$, alors $\angle(x,y)_g = \pi/2$. Dans ce cas nous disions que x et y sont orthogonaux et le note $x \underset{g}{\perp} y$. A la difference de la g-orthogonalité [3] ($x \perp_g y \iff g(x,y) = 0$), celle-ci est symétrique. En outre $x \perp_g y \wedge y \perp_g x \implies x \underset{g}{\perp} y$. L'implication inverse n'est pas vrai dans le cas géneral. Par example, pour l'espace l^1 et pour $x = (1,1,1,0,0,\dots)$ et $y = (2,1,-3,0,\dots)$ nous avons $g(x,x) = 0$ ($x \perp_g y$) et $g(y,x) = 0$. Donc, $x \perp_g y$ n'entraîne pas $x \underset{g}{\perp} y$. Ajoutons ici que dans l'espace l^1 l'angle de Wilson et le g-angle ne sont pas égaux. (Pour $x = (1,0,0,\dots)$ et $y = (-1,-1,0,\dots)$ nous avons $\angle(x,y)_g = \arccos(-3/4)$, $\angle(x,y)_w = \pi$.)

THÉORÈME 2. *Si X est un espace strictement convexe, alors l'angle $(\widehat{yxz})_g$ remplit les condition a), b) et c) de la definition 1.*

Démonstration. Il est évident qu'on a l'égalité $(\widehat{yxz})_g = (\widehat{zxy})_g$ et l'inégalité $0 \leqslant (\widehat{yxz})_g \leqslant \pi$. Supposons maintenant qu'on a $d(x,z) + d(y,z) = d(x,z)$, c'est-à-dire $\|x-y\| + \|y-z\| = \|x-z\|$. Ceci signifie qu'on a $\|(x-y)+(y-z)\| = \|x-y\| + \|y-z\|$. Comme X est strictement convexe, il existe $t > 0$ tel que $y - z = t(x-y)$. D'où , d'arès des conditions (3) et (4), il s'ensuit que

$$(\widehat{yxz})_g = \arccos \frac{(1+t)\|x-y\|}{\|x-z\|} = \arccos 1 = 0.$$

La même chause on obtient dans le cas $d(x,z) + d(y,z) = d(x,y)$. Comme

$$(\widehat{yxz})_g = 0 \implies g(x-y,x-z) + g(x-z,x-y) = 2\|x-y\|\|x-z\|,$$

en vertu de la condition (6), on a

$$g(x-y,x-z) = g(x-z,x-y) = \|x-y\|\|x-z\|.$$

En posant $u = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$, $v = \dfrac{x-z}{\|x-z\|}$, on obtient $g(u,v) = g(v,u) = 1$, d'où $g(u,u-v) = 0$ et $g(v,v-u) = 0$, c'est-à-dire $u \perp_g (u-v)$ et $v \perp_g (v-u)$. Comme du théorème 3 [3], dans un espace strictement convexe on a l'impiquation $u \perp_g (u-v) \implies u = v$, nous avons

$$x - y = \frac{\|x-y\|}{\|x-z\|}(x-z).$$

Cette égalité implique l'égalite $\|x-y\| + \|y-z\| = \|x-z\|$. Donc, la condition b) est verifiée. Montrons maintenant que la condition c) est valable. Soit $d(x,y) + d(x,z) = d(y,z)$ c'est-à-dire $\|x-y\| + \|x-z\| = \|y-z\|$. Etant donné que X est un espace strictement convexe, il existe $t > 0$ tel que $x - y = t(z-x)$. D'où

$$(\widehat{yzx})_g = \arccos \frac{-t\|x-z\|}{\|x-y\|} = \arccos(-1) = \pi.$$

Au contraire, si $(\widehat{yzx})_g = \pi$, c'est-à-dire

$$g(x-y,x-z) + g(x-z,x-y) = -2\|x-y\|\|x-z\|,$$

d'après (6), on a $g(x-y,x-z)+g(x-z,x-y) = -\|x-y\|\|x-z\|$. Par conséquent la condition c) est verifiée. ∎

THÉORÈME 3. *Soit X est un espace strictement convexe et $l_1 = l(x,y)$ $(x \neq y)$, $l_2 = l(x,z)$ $(x \neq z)$ deux rayons dans X. Alors il existe l'angle $\angle(l_1,l_2)_g$ et on a $\angle(l_1,l_2)_g = \angle(x-y,x-z)_g$.*

Démonstration. Soient $y \in l_1$ $(x \neq y)$, $z \in l_2$ $(x \neq z)$. Il est bien connu que, dans un espace strictement convexe, on a $\overline{xy} = \{\,\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\,\}$ et $l(x,y) = \{\,\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \geqslant 0\,\}$. Soinet $y' = \lambda x + (1-\lambda)y$ $(\lambda \in [0,1])$ et $z' = tx + (1-t)z$ $(t \in [0,1])$. Alors

$$\lim_{\substack{y' \to x \\ z' \to x}} \frac{g(x-y',x-z') + g(x-z',x-y')}{2\|x-y'\|\|x-z'\|}$$

$$= \lim_{\substack{t \to 1 \\ \lambda \to 1}} \frac{2(1-\lambda)(1-t)[g(x-y,x-z)+g(x-z,x-y)]}{2(1-\lambda)(1-t)\|x-y\|\|x-z\|} = \cos\angle(x-y,x-z)_g.$$

Ainsi $\angle(l_1,l_2)_g = \angle(x-y,x-z)_g$. Remarquons que le théorème 3 et le théorème 1 sont semblables. Mais, le théorème e a été démnostré seulement sous l'hypothèse que X est strictement convexe, pourtant le théorème 1 s été démonstré sous les hypothèse: X est complet et l'angle $(l_1,l_2)_w$ existe. ∎

Le théorème 3 et le théorème 2 impliquent le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. *Soit X strictement convexe et x est parmi y et z $(x = \lambda y + (1-\lambda)z)$, $\lambda \in (0,1)$. Alors $\angle(l(x,y),l(x,z))_g = \pi$.*

Valentine et Wayment [6] citent le résultat correspondant comme le théorème particulier. Le théorème suivant démonstre que l'expression $g(x,y)$, dans un espace normé, non préhilbertien, ne peut pas avoir aucun de les propriétés essenciels de produit scalaire, à l'exception de les propriétés (3), (4), (5) et (6). Il répond, aussi, sur le demande quand on a $\angle(x,y)_w = \angle(x,y)_g$.

THÉORÈME 4. *Soit X un espace normé réel et* $\dim X > 1$. *Alors les assertions auivantes sont équivalentes:*

a) *Le norme de X est engendrée par un produit scalaire,*

b) $g(x,y) = g(y,x)$ $(x,y \in X)$,

c) $g(x+y,z) = g(x,z) + g(y,z)$ $(x,y,z \in X)$,

d) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\angle(x,y)_g$ $(x,y \in X)$,

e) $\angle(x,y)_w = \angle(x,y)_g$ $(x,y \in X)$.

Démonstration. Si la norme $\|\cdot\|$ est engendrée par la produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $(\|x\|^2 = \langle x,x\rangle,\ x \in X)$, alors, il est facil de voir que $g(x,y) = \langle x,y\rangle$ $(x,y \in X)$. Ainsi la condition a) implique les conditions b), c), d) et e). Démontrons, encore, les impliquations: b) $\Longrightarrow$ d), c) $\Longrightarrow$ d), e) $\Longrightarrow$ d), d) $\Longrightarrow$ a).

b) $\Longrightarrow$ d). En appliquant (5) nous obtenons $g(x+y,x) = g(x+y,x+y-y) = \|x+y\|^2 - g(x+y,y)$, c'est-à-dire on a $\|x+y\|^2 = g(x+y,z) + g(x+y,y)$. Cette égalité et b) donnent $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + g(x,y) + g(y,x)$ $(x, y \in X)$. Donc, on a

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos \angle(x,y)_g \quad (x, y \in X).$$

c) $\Longrightarrow$ d). Soit on a c). En posant, ici, $z = x + y$ on obtient d).

e) $\Longrightarrow$ d). Cette implication est évidente.

d) $\Longrightarrow$ a). D'aprés d) on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \cos \angle(x,y)_g \quad (x, y \in X). \tag{7}$$

L'égalité d) et (7) donnent l'identité du parallélogramme $\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. ∎

Corollaire 2. *La norme de X est endendrée par un produit scalaire si et seulement si on a "le theéorème de cosinus" (l'égalité d)).*

Théorème 5. *Soit* $\dim X \geqslant 3$. *Alors Xest un espace préhilbertien si et seulement si X est strictement convexe et s'il on a*

$$u \perp_g v \implies u \perp_g v \quad (u, v \in S(X)). \tag{8}$$

La démonstration s'appuie sur les lemmes suivants.

Lemme 1. [5] *Soit* $\dim X \geqslant 3$. *Si, pour tous $u, v \in S(X)$ on a*

$$\tau_+(u,v) \geqslant 0 \implies \tau_+(v,u) \geqslant 0, \tag{9}$$

alors $(X, \|\cdot\|)$ est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ $(x \in X)$.

Lemme 2. [1] *Un espace X est strictement convexe si et seulement si, pour tout $x \in X \setminus \{0\}$ et $y \in X$, il existe unique $\alpha \in \mathbf{R}$, tel que $\|\alpha x + y\| = \min_\lambda \|\lambda x + y\|$.*

Démonstration du théorème 5. Un espace préhilbertien est un espace strictement convexe. On vérifie immédiatement que dans tel espace on a l'impliquation (8). Supposons maintenant que X est un espace strictement convexe et qu'on a (8). On vérifie sans peine que l'impliquation (8) antraî ne l'impliquation suivante

$$g(u,v) = 0 \implies g(v,u) \quad (u, v \in S(X)). \tag{10}$$

D'après le lemme 1, il suffit de prouver que l'impliquation (10) antraîne l'impliquation (9). Supposons le contraire: l'assertion (10) est vraiemais l'assertion (9) n'est pas vraie, c'est-à-dire, il existe $u, v \in S(X)$ tel que on a (10) et $\tau_+(u,v) \geqslant 0$ et $\tau_+(u,v) \geqslant 0$. Comme on peut démontrer qu'on a $\tau_-(v,u) \leqslant \tau_+(v,u)$ $(u, v \in S(X))$, il s'ensuit que

$$g(v,u) < 0. \tag{11}$$

Soit $t = -g(v,u)$. Alors $u+tv \neq 0$ et $g(v, u+tv) = 0$. Puisque $g\left(v, \dfrac{u+tv}{\|u+tv\|}\right) = 0$. D'où, d'après (10), il s'ensuit que $g(u+tv, v) = 0$. En utilisant, ici, les propriétés des fonctionelles g et τ_+ nous obtenons que

$$\begin{aligned} g(u+tv) = 0 &\iff g(u+tv, tv) = 0 \iff g(u+tv, u+tv-u) = 0 \\ &\iff \|u+tv\|^2 - g(u+tv, u) = 0 \iff \|u+tv\|^2 = g(u+tv, u) \\ &\implies \|u+tv\|^2 \leqslant \|u+tv\| \implies \|u+tv\| \leqslant 1. \end{aligned}$$

Si $\|u+tv\| < 1$ alors $\dfrac{\|u+tv\| - \|u\|}{t} < 0$. Étant donné que

$$\tau_+(u,v) \leqslant \frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t},$$

on obtient $\tau_+(u,v) < 0$, ce qui n'est pas possible, parce que $\tau_+(u,v) \geqslant 0$. Soit $\|u+tv\| = 1$. Alors l'égalité $g(u+tv, v) = 0$ on obtient $\|u\| = \|u+tv\| \leqslant \|u+(t+\lambda)v\|$ $(\lambda \in \mathbf{R})$. Par conséquent $\min_\lambda \|u+(t+\lambda)v\| = \|u\| + \|u+tv\|$. D'après du lemme 2 ceci entraîne $t = 0$, ce qui n'est pas possible parce que $t = -g(v,u) > 0$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[**1**] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces – Selected Topics*, Springer-Verlag, 1975.

[**2**] K. Menger, *New foundations of Euclidean geometry.* Amer. J. Math. **53** (1931), 721–745.

[**3**] P. M. Miličić, *Sur la g-orthogonalité dans des espaces normés*, Mat. Vesnik **39** (1987), 325–334.

[**4**] P. M. Miličić, *La fonctionelle g et quelques problémes des meilleures approximations dans des espaces normés*, Publ. de l'Inst. Math. **48(62)** (1990), 110–118.

[**5**] P. L. Papini, *Inner products and norm derivatives*, J. Math. Anal. Appl. **91** (1983), 592–598.

[**6**] J. E. Valentin and S. G. Wayment, *Wilson angles in linear normed spaces*, Pacific J. Math. **31** (1971), 239–243.

[**7**] W. A. Wilson, *On angles in certain metric spaces*, Bul. Amer. Math. Soc. **38** (1932), 580–588.

(received 08.03.1993)

Matematički fakultet, Studentski trg 16, 11000 Beograd, YUGOSLAVIA