

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ НАД ТИХОНОВСКИМ ПОЛУПОЛЕМ

Слободан Ч. Нешич

Резюме. Доказана теорема которая обобщает некоторые теоремы о неподвижных точках функции действующих в метрическом пространстве над тихоновским полуполем.

1. Понятие метрического пространства над полуполем, было введено в работе М. Я. Антоновского, В. Г. Болтянского и Т. А. Сарымсакова [1].

Пусть Δ – произвольное непустое множество. Кольцо всех действительных функций на Δ в тихоновской топологии называется тихоновским полуполем и обозначается через \mathbf{R}^Δ . Обозначим через K^Δ множество всех строго положительных элементов $f \in \mathbf{R}^\Delta$, т.е. таких элементов, что $f(q) > 0$, для всех $q \in \Delta$.

Пусть теперь X – произвольное множество. Отображение $d: X \times X \rightarrow \overline{K^\Delta}$ называется метрикой в X над полуполем \mathbf{R}^Δ , если выполняются обыкновенные аксиомы метрики. Пару (X, d) называется метрическим пространством над \mathbf{R}^Δ . Если Δ состоит только из одного элемента, то $\mathbf{R}^\Delta \equiv \mathbf{R}$ является полем действительных чисел (см. [2]).

2. Пусть (X, d) – полное метрическое пространство над полем \mathbf{R} , а $T: X \rightarrow X$ отображение. В [3] доказывается, что T имеет единственную неподвижную точку, если удовлетворяются следующие условия

$$d(Tx, Ty) \leq k d(x, y), \quad 0 \leq k < 1.$$

В статье [4] эти условия были заменены условиями

$$d(Tx, Ty) \leq a [d(x, Tx) + d(y, Ty)], \quad 0 \leq a < \frac{1}{2},$$

в [5] условиями

$$d(Tx, Ty) \leq a d(x, Tx) + b d(y, Ty) + c d(x, y), \quad a, b, c \geq 0, \quad a + b + c < 1,$$

в [6] условиями

$$d(Tx, Ty) \leq c [d(x, Ty) + d(y, Tx)], \quad 0 \leq c < \frac{1}{2},$$

в [7] условиями

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq qd(x, y) + rd(x, Tx) + sd(y, Ty) + t[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \\ q, r, s, t &\geq 0, \quad q + r + s + 2t < 1, \end{aligned}$$

в [8] условиями

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, y) + ed(y, Tx) + fd(x, Ty), \\ a, b, c, e, f &\geq 0, \quad a + b + c + e + f < 1, \end{aligned}$$

в [9] условиями

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + c[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \\ 0 &\leq \frac{a+b+c}{1-b-c} < 1, \quad b+c, a+2c < 1, \quad c \geq 0, \end{aligned}$$

в [10] условиями

$$\begin{aligned} \alpha d(x, y) + \beta d(Tx, Ty) + \gamma [d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \delta [d(x, Ty) + d(y, Tx)] &\geq 0, \\ \alpha + \beta + 2\gamma < \min\{0, -2\delta\}, \quad \beta + \gamma + \delta < 0, \quad \alpha + \beta + 2\delta < 0. \end{aligned}$$

3. Следующая теорема является усилением приведенных выше теорем о неподвижной точке.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X, d) – sequentially полное метрическое пространство над полем \mathbf{R}^Δ , а $T: X \rightarrow X$ отображение, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} qd(Tx, Ty) + r[d^2(x, Tx) + b^2d(x, Ty)d(y, Tx)]^{\frac{1}{2}} \\ + r[d^2(y, Ty) + b^2d(x, Ty)d(y, Tx)]^{\frac{1}{2}} \leq s[d(x, Ty) + d(y, Tx)] + td(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

для любых x, y из X и фиксированных чисел b, q, r, s, t ,

$$r \leq s + t, \quad t + s + |s| < q + 2r, \quad b \geq 0. \quad (2)$$

Тогда T имеет неподвижную точку u . Если

$$2s + t < q + 2br, \quad (3)$$

эта неподвижная точка единственна.

Доказательство. Пусть x_0 из X произвольная точка. Образует теперь следующую последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$, положив

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Подставив в (1) x_{n-1} вместо x и x_n вместо y , получим

$$q d(x_n, x_{n+1}) + r[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \leq s d(x_{n-1}, x_{n+1}) + t d(x_{n-1}, x_n).$$

Тогда, если воспользуемся аксиомой треугольника для метрики d , имеем

$$\begin{aligned} q d(x_n, x_{n+1}) + r[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \\ \leq s d(x_{n-1}, x_n) + |s| d(x_n, x_{n+1}) + t d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} q d(x_n, x_{n+1}) + r[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \\ \leq |s| d(x_{n-1}, x_n) + s d(x_n, x_{n+1}) + t d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

и поэтому

$$(q + r - |s|)d(x_n, x_{n+1}) \leq (s + t - r)d(x_{n-1}, x_n) \quad (4)$$

или

$$(q + r - s)d(x_n, x_{n+1}) \leq (|s| + t - r)d(x_{n-1}, x_n). \quad (5)$$

В силу (2) имеем

$$0 \leq s + t - r < q + r - |s| \quad \text{и} \quad 0 \leq |s| + t - r < q + r - s,$$

откуда

$$0 \leq \frac{s + t - r}{q + r - |s|} < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq \frac{|s| + t - r}{q + r - s} < 1.$$

Положим теперь

$$\max \left\{ \frac{s + t - r}{q + r - |s|}, \frac{|s| + t - r}{q + r - s} \right\} = \lambda,$$

таким образом, $0 \leq \lambda < 1$. Из (4) и (5) следует, что

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n), \quad (6)$$

для всех $n = 1, 2, \dots$. Из (6) следует, что для любого x_0 из X последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ является фундаментальной последовательностью в (X, d) . В силу секвенциальной полноте пространства (X, d) , такая последовательность сходится к некоторой точке u из X .

Подставив в (1) x_n вместо x и u вместо y , получим

$$q d(x_{n+1}, Tu) + r [d^2(x_n, x_{n+1}) + b^2 d(x_n, Tu) d(u, x_{n+1})]^{\frac{1}{2}} \\ + r [d^2(u, Tu) + b^2 d(x_n, Tu) d(u, x_{n+1})]^{\frac{1}{2}} \leq s [d(x_n, Tu) + d(u, x_{n+1})] + t d(x_n, u)$$

и в пределе при $n \rightarrow +\infty$ имеем $(q+r-s)d(u, Tu) \leq 0$ и так как $q+r-s > 0$, то $d(u, Tu) = 0$, то есть u является неподвижной точкой отображения T .

Пусть теперь $Tu = u$ и $Tv = v$. Неравенство (1) для точек $x = u$, $y = v$, имеет вид $(q + 2br - 2s - t)d(u, v) \leq 0$. Отсюда и в силу (3) имеем $u = v$. Тем самым доказана и единственность неподвижной точки отображения T . Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский и Т. А. Сарымсаков, *Очерк теории топологических полуполей*, УМН, **21** (4) (1966).
- [2] Z. Mamuzić, *Some remarks on abstract distance in general topology*, ЕЛЕУӨЕРІА **2** (1979), 433–446.
- [3] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math, 1922, 3, 133–181.
- [4] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Calcutta Math. Soc. **60** (1968), 71–76.
- [5] S. Reich, *Some remarks concerning contracting mappings*, Canad. Math. Bull. **14**, 1 (1971), 121–124.
- [6] S. K. Chatterjee, *Fixed point theorem*, Comptes Rend. Acad. Bulgare Sc. **25** (1972), 727–730.
- [7] Lj. Ćirić, *Generalized contractions and fixed point theorems*, Publ. Inst. Math. **12** (1971), 19–26.
- [8] G. Hardy, T. Rogers, *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. **16**, 2 (1973), 201–206.
- [9] B. Fisher, *Fixed point mappings*, Lincei – Rend. Sc. fis. mat. e nat. **59**, 5 (1975), 404–406.
- [10] А. А. Иванов, *Неравенства и теоремы о неподвижных точках*, Math. Balkanica **4** (1974), 283–287.

(поступило 12.10.1995.)

Студентска 14, 11000 Београд, Югославия