PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 35 (49), 1984, pp. 125–129

# О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**И. М. Лаврентеьв, Р. Шчепанович**

**Резюме.** В данной статье рассматривается вопрос разрешимости нелинейных уравнений типа Гаммерштейна в гильбертовых пространствах.

Пусть $H$ веществрнное гильбертово пространство, $F$ нелинейный оператор из $H$ в $H$ и $S$ линейный ограниченый оператор действующий в $H$. Уравнение

$$x + SF(x) = 0 \tag{1}$$

называется уравнением типа Гаммерштейна. В данной статье при изучении уравнения (1) использовзн вариационный метод. При этом мы отказываемся от требования слабой полунепрерывности снизу функционала $f$, $\operatorname{grad} f = F$ и ограничения на спектр оператора $S$ (см. работы М. М. Вайнберга, Ф. Браудера, Х. Брезиса, В. Петришина).

Пусть $H = H_1 \oplus H_2$, где $H_1$ и $H_2$ подпространства $H$. Условимся писать $z = (x, y)$, если $z = x + y$, $x \in H_1$, $y \in H_2$. Пусть $F : G \to H$, $G_i = G \cap H_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ и $z_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 \in G_1$, $y_0 \in G_2$.

*Определение* 1. Отображение $F : H \to H$ называется монотонным на множестве $\sigma \subset H$, если для любых $x, y \in \sigma$ выполяется неравенство $(F(x) - F(y), x - y) \geq 0$, и строго монотонным, если равенство выполняется лишь при $x = y$.

*Определение* 2. Мы скажем что оператор $F$ обладает свойством $(\alpha)$ в точке $z_0$, если выполнены условия: каковы бы не были последовательности $\{x_n\} \subset G_1$ $x_n \to x_0$, $x_0 \in G_1$ $\{t_n\} \subset R$, $t_n \to 0$ и вектор $y_0 + \tau k \in G_2$, $0 \leq \tau < \delta$, $F(x_n, y_0 + t_n k) \rightharpoonup F(x_0, y_0)$, $n \to +\infty$. Оператор $F$ обладает свойством $(\alpha)$ на множестве $G$, если он обладает свойством $(\alpha)$ в каждой точке этого множества.

*AMS Subject Classification* (1980): Primary 47H15, 49A50

*Определение* 3. Оператор $F : G \to H$, $G \subset H$ называется слабо ограниченным на множестве $G$, если для всякого фиксированного $u \in H$ существует постоя]нная $L_u$ такая что $|(F(z), U)| \le L_u$.

*Определение* 4. Функционал $F(z)$ называется хемиограниченным на множестве $G$ пространства $H$, если для любых $z, u \in G$ таких что $z + tu \in G$, $0 \le t \le 1$ существует постоянная $C > 0$ такая что $|f(z + tu)| \le C$, $0 \le t \le 1$.

Пусть $F(z) = \operatorname{grad} f(z)$. Положим $F_1(z) = P_1(z)$, $F_2(z) = P_2(z)$ где $P_1$ и $P_2$ операторы проектирования на подпространства $H_1$ и $H_2$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*
1) *Для любого* $y \in H_2 : F(x+h, y) - f(x, y) - (F_1(x, y), h) \ge \sigma_y(\|h\|)$, $x, y \in H_1$, *где функция* $\sigma_y(t) > 0$ *причем из того что* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sigma_y(t_n) \le 0$ *следует* $t_n \to 0$.
2) *Для каждого* $x \in H_1$ *функционал* $f(x, y)$ *слабо полунепрерывен сверху по* $y \in H_2$.
3) *Для каждого* $y \in H_2$ *существует* $D_{R_y}(a_y) \subset H_1$ *такое что* $(F_1(a_y + h, y), h) > 0$, *если* $\|h\| \ge R_y$, *причем функционал* $R_y$ *хемиограничен и* $D_r(a) = \{x : \|x - a\| \le r, r > 0, x \in H_1\}$.
4) $\sup\limits_{\|x\| \le R_y} f(x, y) \le \omega(y)$ *где* $\omega(y) \to -\infty$, $\|y\| \to \infty$.
5) *Оператор* $F_2(x, y)$ *обладает свойством* ($\alpha$) *в* $H$, *причем на каждом ограниченном множестве* $G \subset H$ *оператор* $F_2(x, y)$ *слабо ограничен.*

*Тогда существует* $z_0 \in H$ *такое что* $F(z_0) = 0$.

*Доказательство.* Пусть $y \in H_2$ фиксирован. Положим $\varphi(x) = f(x, y)$, $x \in H_1$. Нетрудно видеть что функционал $\varphi(x)$ на подпространстве $H_1$ слабо полунепрерывен снизу. В силу условия 3) теоремы следует $(\exists \xi(y) \subset H_1, \xi(y) \in D_{R_y}(a_y))(\varphi(\xi(y)) \le \varphi(x)$, если $\|x - a_y\| \ge R_y)$. Отсюда следует что $F_1(\xi(y), y) = 0$.

Пусть $\psi(y) = f(\xi(y), y)$, $y \in H_2$. Положим что функционал $\psi(y)$ слабо полунепрерывен сверху на подпространсрве $H_2$, причем $\psi(y) \to -\infty$ $\|y\| \to= \infty$. Действительно, пусть $\{y_n\} \subset H_2$, $y_n \rightharpoonup y_0 \in H_2$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \psi(y_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \sup f(\xi(y_0), y_n) \le f(\xi(y_0), y_0) = \psi(y_0)$. Далее

$$\psi(y) = f(\xi(y), y) \le \sup_{n\to\infty} f(x, y) \le \omega(y).$$

Так как $\omega(y) \to -\infty$, $\|y\| \to +\infty$ то $\psi(y) \to -\infty$, $\|y\| \to +\infty$. Таким образом утверждение доказано.

Отсюда следует что существует вектор $y_0 \in H_2$, такой что для каждого $y \in H_2$ имеет место неравенство $\psi(y) \le \psi(y_0)$.

Покажем теперь что для любых $y_0, k \in H_2$ и любой последовательности $t_n \in R$, $t_n \to 0$, $n \to +\infty$, $\xi(y_0 + T_n k) \to \xi(y_0)$. В самом деле

$$
\begin{gathered}
\psi(y_0+t_nk)-\psi(y_0)=f(\xi(y_0+t_nk)-f(\xi(y_0),y_0)+\\
+f(\xi(y_0+t_nk),y_0+t_nk)-f(\xi(y_0+t_nk),y_0)=f(\xi(y_0+t_nk),y_0)-\\
-f(\xi(y_0),y_0)-(F_1(\xi(y_0),y_0),\xi(y_0+t_nk)-\xi(y_0))+\\
+f(\xi(y_0+t_nk),y_0+t_nk)-f(\xi(y_0+t_Nk),y_0)\geq\\
\geq\sigma_{y_0}(\|\xi(y_0+t_nk)-\xi(y_0)\|)++t_N(F_2(\xi(y_0+t_nk),y_0+\theta_nt_nk),k),\\
\theta_n\in[0,1].
\end{gathered}\tag{2}
$$

Так как для каждого $n\in N$ $\|\xi(y_0+t_nk)\|\leq R_{y_0+t_nk}\leq C$, то в силу условия 5) теоремы существует постоянная $L_k$ такая что $|F_2(\xi(y_0+t_nk),y_0+\theta_nt_nk)\leq L_k$. Поэтому $t_n(F_2(\xi(y_0+t_nk),y_0+\theta_nt_nk)f)\to 0$, $n\to\infty$. Оцюда и из (2) получаем

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sup\sigma_{y_0}(\|\xi(y_0+t_nk)-\xi(y_0)\|)\leq\lim_{n\to\infty}\sup(\psi(y_0+t_nk)-\psi(y_0)-\\
&-t_n(F_2(\xi(y_0+t_nk),y_0+\theta_nt_nk)k))=\lim_{n\to\infty}\sup(\psi(y_0+t_nk)_\psi(y_0))\leq 0,
\end{aligned}
$$

т. е. $\|\xi(y_0+t_nk)-\xi(y_0)\|\to 0$, $n\to+\infty$.

Докажем что $F_2(\xi(y_0),y_0)=0$. Действительно, пусть вектор $k\in H_2$ произвольно фиксирован и $\{t_n\}\subset R$ произвольная последовательность такая что $t_n\to 0$, $n\to\infty$. Имеем

$$
\begin{gathered}
0\geq\psi(y_0+t_nk)-\psi(y_0)=f(\xi(y_0+t_nk),y_0+t_nk)-f(\xi(y_0)y_0)\geq\\
\geq f(\xi(y_0+t_nk),y_0+t_nk)-f(\xi(y_0+t_nk),y_0)=\\
t_n(F_2(\xi(y_0+t_nk),y_0+\theta_nt_nk),k),
\end{gathered}
$$

или $(F_2(\xi(y_0+t_nK),y_0+t_nk),y_0+\theta_nt_nk),k)\leq 0$. Пусть $n\to\infty$. Тогда $\xi(y_0+t_nk)\to\xi(y_0)$, $y_0+\theta_nt_nk\to y_0$. Так как отображение $F_2$ обладает свойством $(\alpha)$, то $(F_2(\xi(y_0+t_nk),y_0+\theta_nt_nk),k)\to(F_2(\xi(y_0),y_0),k)$, поэтому $(F_2(\xi(y_0),y_0)k)\leq 0$. Отсюда в силу произвольности вектора $k\in H_2$, получаем $F_2(\xi(y_0),y_0)=0$. Положим $z_0=\xi(y_0)+y_0$. Так как для любого $z=(x,y)$, $x\in H_1$, $y\in H_2$, $F(z)=F_1(z)+F_2(z)$, то $F(z_0)=0$. То теорема доказана.

*Замечание* 1. Если в условиях теоремы 1 заненить условие 3) условием 3′): Для каждого $x\in H_2$ сущеатвует $D_{R_y}(a_y)\subset H_1$ и $x_y\in D_{R_y}(a_y)$ такие что $f(x,y)>f(x_y,y)$ для любого $x\in\partial D_{R_y}(a_y)$, где $\partial D_r(a)$ граница от $D_R(a)$, тогда утверждение теоремы сохраняются.

*Пример.* Рассмотрим в пространстве $R^2$ функционал $f(x,y)=x^2-xy/4-y^2$. Покажем что этот функционал удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Нетрудно видеть что проверки нуждаются лишь условия 1), 3) и 4). Имеем $f(x+h,y)-f(x,y)-(_1(x,y),h)=h^2$, т. е. $\sigma_y(t)=t^2$. Далее, положим $a_y=0$, $R_y=\begin{cases}|y|/8, & y\neq 0\\ \delta, & y=0(\delta>0)\end{cases}$, $\xi(y)=0$. Отсюда следует

$(F-1(h,y),h) = 2h^2 - hy/4 = 2(h^2 - hy/8) > 0$, если $|h| > R_y$. Пусть $\omega(y) = 63y^2/64 - y|y|/32$, $y \neq 0$. Тогда $f(x,y) \leq \omega(y)$, для $|x| < |y|/8$. Так как $\omega(y) \to -\infty$, $|y| \to +\infty$ то условие 4) теоремы выполнено.

Пусть выполнено условие 3'). Положим $a_y = 0$, $x_y = 0$ и $R_y = \begin{cases} |y|/2, & y \neq 0 \\ \delta, & y = 0\,(\delta > 0) \end{cases}$. Проверим что для всякого $x \in \partial D_{R_y}(0)$ $f(x,y) > f(0,y)$. Действительно, $x \in D_{R_y}(0)$ следует $x_1 = |y|/2$ или $x_2 = -|y|/2$, $f(x_1,y) > (f(0,y)$, $y \in R$. Аналогично можно проверить, что $f(x_2,y) > f(0,y)$, $y \in R$.

*Замечание* 2. Можно показать, что уравнение $F(z) = 0$ имеет единственное решение, если:
а) Для каждого $x \in H_1$ оператор $-F_2(x,y)$ строго монотонный по $y \in H_2$,
б) Для каждого $y \in H_2$ оператор $F_1(x,y)$ строго монотонный по $x \in H_1$.

Пусть $S$ линейный ограниченный самосопряженный оператор действующий в пространстве $H$, причем $\alpha = \inf(Sz,z) < 0$, $\beta = \sup(Sz,z) > 0$, $\|z\| = 1$. Обозначим через $E_t$ разложение единицы оператора $S$. Тогда $E(\Delta) = E_\beta - E_0 = P_1$ есть оператор ортогонального проектирования из $H$ на инвариантное подпространство $H_1 \subset H$ которое приводит $S$. Пусть $P_2$ оператор ортогонального проектирования из $H$ на $H \ominus H_1$. Положим $A = (|S| + S)/2$, $B = (|S| - S)/2$, $T = A^2 - B^2$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*
1) $f(x+h,y) - f(x,y) - (F(x,y),h) \geq \gamma_y(\|h\|)$, $x, h \in H_1$, $y \in H_2$; $t^2/(2\|A\|^2) + \gamma_y(t) > 0$, *если* $t > 0$; $\gamma_y$ *непрерывно убывает и* $\gamma_y(0) = 0$.
2) *Для каждого* $y \in H_1$ *функционал* $-\|y\|^2/2 + F(Ax,By)$ *слабо полунепрерывеен сверху по* $y \in H_2$.
3) *Для каждого* $y \in H_2$ *существует* $R_y > 0 : (F_1(Ax,By),AX) > -\|x\|^2$, *если* $\|x\| \geq R_y$).
4) $\sup\limits_{\|x\| \leq R_y} f(x,By) \leq \omega(y)$, где $R_y^2/2 - \|x\|^2/2 + \omega(y) \to -\infty$, $\|y\| \to \infty$.
5) *Отоброжение* $\Phi_2(y) = -y + BF_2(Ax,By)$ *обладает свойством* ($\alpha$) *в* $H$, *причем на каждом ограниченом множестве* $G \subset h$ $\Phi_2(x,y)$ *слабо ограничено. Тогда существует* $z_0 \in H$ *такое что* $z_0 + TF(z_0) = 0$.

*Доказательство.* Рассмотрим функционал $\varphi(x,y) = \|x\|^2/2 - \|y\|^2 + f(Ax,By)$ $x \in H-1$, $y \in H_2$. Для каждого $y \in H_2$ имеем

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) - (x + AF_1(Ax,By),h) = \|h\|^2/2 + f(Ax+Ah,By) -$$
$$- f(Ax,By) - (F_1(Ax,By),Ah) \geq \|h\|^2/2 + \gamma_y(\|Ah\|) \geq \|h\|^2/2 + \gamma_y(\|A\| \cdot \|h\|).$$

Положим $\sigma_y(t) = t^2/(2\|A\|^2) + \gamma_y(t)$. Тогда функция $\sigma_y(t)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1.

Пусть $\Phi_1(x,y) = x + AF_1(Ax,By)$. Имеем: Для каждого $y \in H_2$ существует $R_y > 0$, такое что $(\Phi_1(x,y),x) = \|x\|^2/2 + (F_1(Ax,By),Ax) > 0$, если

$\|x\| \geq R_y$. Далее

$$\sup_{\|x\|\leq R_y} \varphi(x,y) = \sup_{\|x\|\leq R_y} \{\|x\|^2/2 - \|y\|^2/2 + f(Ax,By)\} \leq (R_y^2 - \|y\|^2)/2 + \omega(y).$$

Так как $R_y^2/2 - \|y\|^2/2 + \omega(y) \to \infty$, $\|y\| \to +\infty$, то $\sup\limits_{\|x\|\leq R_y} \varphi(x,y) \to -\infty$, $\|y\| \to +\infty$.

Мы показали что выполнены все условия теоремы 1. Следовательно существует: $(x_0, y_0) \in H : x_0 + AF_1(Ax_0, By_0) = 0$, $-y_0 + BF_2(Ax_0, By_0) = 0$. Применяя к данным уравнениям оператор $A - B$ получим $Ax_0 + A^2F_1(Ax_0, By_0) = 0$, $by_0 - B^2F_2(Ax_0, By_0) = 0$. Отсюда следует $Ax_0 + By_0 + (A^2 - B^2)F(Ax_0, By_0) = 0$. Полагая $z_0 = Ax_0 + by_0$, получим $z_0 + TF(z_0) = 0$, Теорема доказана.

*Замечание* 3. Условие 2) теоремы 2 можно заменить условием $(\forall x \in H_1)((F_2(Ax, By_1) - F_2(Ax, By_2),\ By_1 - By_2 \leq \|y_1 - y_2\|^2,\ y_1, y_2 \in H_2)$. Покажем что оператор $\Phi_2(x,y) = y - BF_2(Ax, By)$ монотонный по $y$. Действительно,

$$\begin{aligned}&(\forall x \in H_1)(\forall y_1, y_2 \in H_2)((\Phi_2(x,y_1) - \Phi_2(x,y_2), y_1 - y_2) = \\ &= \|y_1 - y_2\|^2 - (F_2(Ax, By_1) - F_2(Ax, By_2), By_1 - By_2) \geq 0).\end{aligned}$$

Так как оператор $\Phi_2(x,y)$ – монотоный, то функционал $-\|y\|^2/2 + f(Ax, By)$ слабо полунепрерывен сверху по $y$.

*Замечение* 4. В условии 2) теоремы 2 мы требовали слабую полунепрерывность сверху функционала $-\|y\|^2/2 + f(Ax, By)$ по $y$. Это будет, например, в следующем случае: а) Функционал $\|y\|^2/2 + f(y)$ слабополунепрерывен сверху по $y \in H_2$. б) Часть отрицательного спектра оператора $B$ лежащая левее $-1$, состоит из конечного числа собственных значений, каждое из которых имеет конечную кратность.

Действительно, пусть $y_n \to y_0$, $n \to \infty$. Тогда

$$-\|y\|^2 + f(Ax, By_n) = -\|Ax + By_n\|^2/2 + f(Ax, By_n) - \|y\|^2/2 + \|Ax + By_n\|^2/2.$$

Так как $Ax + By_n \rightharpoonup Ax + By_0$, $n \to +\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup(-\|Ax + By_n\|^2 + f(Ax, By_n)) \leq -\|Ax, By_0\|^2/2 + f(Ax, By_0).$$

Далее, положим $y_n = y_0 + h_n$, $h_n \rightharpoonup 0$. Следует

$$\begin{aligned}-\|y_n\|^2/2 + \|Ax + By_n\|^2 &= -\|y_0 + h_n\|^2/2 + \|Ax + By_0 + Bh_n\|^2/2 = \\ &= -\|y_0\|^2/2 - (y_0, h_n) - \|h_n\|^2/2 + \|Ax + By_0\|^2/2 + \\ &+ (Ax + By_0, Bh_n) + \|Bh_n\|^2/2 = \\ &= -\|y_0\|^2/2 + \|Ax + By_0\|^2/2 - (y_0, h_n) + \\ &+ (Ax + By_0, Bh_n) + 1/2 \cdot (-\|h_n\|^2 + \|Bh_n\|^2).\end{aligned}$$

Так как $(y_0, h_n) \to 0$, $(Ax + By_0, Bh_n) \to 0$; $B = B_{(-\infty,-1)} \oplus B_{[-1,0)}$, то

$$Bh_n = B_{(-\infty,-1)}h_n + B_{[-1,0)}h_n, \quad \|Bh_n\|^2 = \|B_{(-\infty,-1)}h_n\|^2 + \|B_{[-1,0)}h_n\|^2.$$

Так как $\|B_{[-1,0)}h_n\|^2 \leq \|h_n\|^2$ и $\|B_{(-\infty,-1)}h_n\|^2 \to 0$, то $\lim_{n\to\infty} \sup(-\|h_n\|^2 + \|BH_n\|^2 \leq 0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sup(-\|h_n\|^2/2 + f(Ax, By_n)) \leq -\|Ax + By_0\|^2/2 + f(Ax, By_0)-$$
$$-\|y_0\|^2/2 + \|Ax + By_0\|^2/2 = -\|y_0\|^2/2 + f(Ax, By_0).$$

## ЛИТЕРАТУРА


[1] М.М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, Наука, Москва, 1972.

[2] Р. Шчепанович, *Вариационный метод и нелинейные уравнения*, Мат. Балканика, **9** (1979).

[3] Р. Шчепанович, *Вариационный метод и уравнения типа Гаммерштейна*, Мат. Бал-каника, **9** (1979).

[4] R. Šćepanović, *Varijacioni metod i nepokretne tačke*, Mat. Vesnik, **4**(**17**)(**32**) (1980), 251–254.

[5] R. Šćepanović, *O minimumu nekih funkcionala*, Mat. Vesnik, **4**(**18**)(**33**) (1981), 115–118.



МГУ, Механико-матхематический факультет
кафедра математического анализа
Москва

Униврзитет,,Вељко Влаховић“
Институт за математику и физику
Титоград


(Поступила 24 02 1983)