PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 45 (59), 1989, pp. 185-194

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ГИЛЬБЕТРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Лиляна Петрушевски

Резюме. В этой работе рассматриваем эквивалентность процесса

$$\xi(y) = \int_0^t a(s)ds + W(t)$$

со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве и винеровского процесса $W(t)$ на конечном интервале $[0, T]$

Введение. Пусть $a = a(s)$ случайный процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположним что все значения $a(s)$, $s \in [0, T]$ имеют нулевые средние $Ea(s) = 0$ и

$$\int_0^T E\|a(s)\|^2 ds < \infty. \tag{1}$$

Тогда $E\|a(s)\|^2 < \infty$ для почти всех $s \in [0, T]$ и случайный процесс $a = a(s)$ будем рассматривать на конечном интервале $[0, T]$ как функцию на этом интервале, со значениями в гильбертовом пространстве $L_2(H)$ случайных величин $\eta : E\|\eta\|^2 < \infty$ со скалярным произведением $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = E(\eta_1, \eta_2)$ и нормой $\| \mid \eta \| \mid^2 = E\|\eta\|^2 \cdot (\| \enspace \|, (\enspace , \enspace)$—это норма и скалярное произведение в гильбертовом пространстве H). В этом смысле, случайный процесс $a(s)$ измерим (интегрируем) если он измерим (интегрируем) как функция со значениями в $L_2(H)$.

Пусть $W = W(t)$, $t \geq 0$ стандардный винеровский процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Хас будет интересоваь вопрос об эквивалентности случайных процессов $\xi = \xi(t)$ и $W = W(t)$ на конечном интервале $[0, T]$ в случае когда

$$\xi(t) = \int_0^t a(s)ds + W(t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{2}$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 60 G 12, 60 G 15, 60 G 30

где $a(s)$ измеримый случайный процесс в гильбертовом пространстве $H(Ea(s)=0)$ удовлетворяйщий неравенству (1). Интеграл в этом равенстве–это интеграл Лебега интегрируемой функции $a(s)$ со значениями в $L_2(H)$.

Эту задачу рассматривал Ершов [**6**] для одномерных и Скороход [**7**] для конечномерных случайных процессов, рассматривая эквивалентность как эквивалентность распределений соотвествующих процессам $\xi(t)$ и $W(t)$. Такую же задачу для одномерных случайных процессов рассматривал Ю. А. Розанов [**3**], но определял эквивалентность несколько иначе.

Мы будем говорить (по Розанову, [**3**]) чтп процесс $\xi(t)$ эквивалентен процессу $W(t)$ на интервале $[0,T]$ если отображение

$$B:(u,W(t))\to(u,\xi(t)),\ \ u\in H,\ 0\le t\le T$$

продолжается до линейного ограниченного обратимого оператора B из гильбертова пространства $H(W)$ в гильбертово пространство $H(\xi)$ и, кроме того, если разность $I-B^*B$ будет оператором Гильберта-Шмидта. ($H(W)$ и $H(\xi)$—замкнутые в среднем квадратичном линейные оболочки соотвецтбуйщих скалярных случайных величини $(u,W(t))$ и $(u,\xi(T))$, $u\in H$, $0\le t\le T$). Но мы знаем ([**2, 4**]) что в случае когда $a(s)$ гауссовский процесс, процессы $W(t)$ и $\xi(t)$ эквивалентны тогда и только тогда когда эквивалентны их распределения.

Пусть $B_\xi(s,t)$—корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$

$$E(u,\xi(s))\overline{(v,\xi(t))}=(B_\xi(s,t)u,v),\ s,t\in[0,T],\ u,\ v\in H$$

Корреляционная функция винеровского процесса $W(t)$ имеет вид ([**5**]), $B_w(s,t)=\min(s,t)\,I$. Согласно общим теоремам ([**3**]) оператор $I-B^*B$ будет оператором Гильберта-Шмидта тогда и только тогда когда имеет место представление

$$B_w(s,t)-B_\xi(s,t)=\int_0^t\int_0^s K(x,y)dxdy \tag{3}$$

где $K(x,y)$ операторная функция со значениями в гильбертовом пространстве $S_2(H)$ всех операторов Гильберта-Шмидта действующих в H с интегрируемой в квадрате следовой нормой:

$$\int_0^T\int_0^T \mid K(x,y)\mid^2 dxdy<\infty. \tag{4}$$

Далее, если разность $I-B^*B$ оператор Гильберта-Шмидта, то условие обратимости ограниченного оператора B можно выразить следующим образом: оператор $I-B^*B$ не имеет собственного значения равного 1 ([**2, 3**]) или

$$\int_0^T\int_0^T (K(x,y)b(x),\ b(y))dxdy\ne\int_0^T\|b(x)\|^2dx \tag{5}$$

для каждой интегрируемой в квадрате функции на интервале $[0, T]$ со значениями в H, для которой

$$\int_0^T \|b(x)\|^2 dx \neq 0.$$

2. Вспомогательные результаты. Перейдем к решению нашей задачи.

Из равенства (2) следует что для всех $u, v \in H$.

$$(6) \qquad \begin{aligned} (u, \xi(s)) &= \int_0^s (u, a(x))dx + (u, W(s)) \\ (v, \xi(t)) &= \int_0^t (v, a(y))dy + (v, W(t)) \end{aligned}$$

откуда немедленно получается, что

$$(7) \qquad (B_w(s,t)u - B_\xi(s,t)u, v) = -\int_0^t \int_0^s \langle (u, a(x)), (v, a(y))\rangle dxdy -$$

$$-\int_0^s \langle (u,\, a(x)),\, (v, W(t))\rangle dx - \int_0^t \langle (u, W(s)),\, (v, a(y))\rangle dy$$

где $\langle \varphi, \psi \rangle$ обозначает скалярное произведение скалярных случайных величин φ и $\psi(\langle \varphi, \psi \rangle = E\varphi\bar{\psi})$.

Рассмотрим первый член суммы (7):

$$-\int_0^s \int_0^t \langle (u, a(x)),\ (v, a(y))\rangle dxdy$$

Для $x, y \in [0, T]$ обозначим

$$(8) \qquad \Phi_{xy}(u, v) = -\langle (u, a(x),\ (v, a(y)\rangle.$$

Легко увидеть, что при условии (1), для почти всех $x, y \in [0, T]$, $\Phi_{xy}(u, v)$ билинейный в гильбертовом просрансстве H. При этом

$$|\ \Phi_{xy}(u,v)\ |^2 \leq E\ |\ (u, a(x))\ |^2\ E\ |\ (v, a(y))\ |^2 \leq E\ |\ a(x)\ |^2\ E\|a(y)\|^2\|u\|^2\|v\|^2$$

Как извесно, общий вид билинейного функционална

$$(9) \qquad \Phi_{xy}(u, v) = (B_a(x, y)u, v)$$

где $B_a(x, y)$ ограниченный линейный оператор со нормой

$$\|B_a(x, y)\| \leq \{E\|a(x)\|^2\}^{1/2}\{E\|a(y)\|^2\}^{1/2}.$$

Более того, $B_a(x, y)$ оператор Гильберта-Шмидта для почти всех $x, y \in [0, T]$ и операторная функция $B_a(x, y)$ имеет интегрируемю в квадрате следовую норму

$$(10) \qquad \int_0^T \int_0^T |\ B_a(x, y)\ |^2\ dxdy < \infty.$$

Действительно, пусть $(e_k)_1^\infty$ какой нибудь ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространсве H. Тогда

$$| B_a(x,y) |^2 = \sum_{k,j=1}^{\infty} | (B_a(x,y))e_k, e_j |^2 = \sum_{k,j=1}^{\infty} | \langle (e_k, a(x)), (e_j, a(y)) \rangle |^2 \leq$$
$$\leq \sum_{k,j=1}^{\infty} E | (e_k, a(x)) |^2 \, E | (e_j, a(y)) |^2 = E\|a(x)\|^2 E\|a(y)\|^2$$

и

$$\int_0^T \int_0^T | B_a(x,y) |^2 dxdy \leq \int_0^T \int_0^T E\|a(x)\|^2 E\|a(y)\|^2 dxdy = \left\{ \int_0^T E\|a(x)\|^2 dx \right\}^2 < \infty$$

Согласно равенствам (7), (8) и (9) пербый член суммы (7) можно представить в виде

$$-\int_0^t \int_0^s \langle (u, a(x)), (v, a(y)) \rangle dxdy = \int_0^t \int_0^s (B_a(x,y)u, v) dxdy \tag{11}$$

где $B_a(x,y)$–операторная функция, интегрируемой в квадрате следовой нормой (неравенство (10)).

Рассмотрим второй член суммы (7):

$$\int_0^s \langle (u, a(x)), (v, W(t)) \rangle dx = \int_0^s \langle (P_t^v(-(u, a(x))), (v, W(t)) \rangle dx \tag{12}$$

где P_t^v оператор ортогональ,ного проектирования на замакнутую (в среднем квадратичном) линейую оболочку всех значений.

$$(v, W(y)), \quad 0 \leq y \leq t$$

Скалярному случайному процессу $(v, W(y))$, $t \leq t \leq T$ с некоррелированными приращениями отвечает структурная функция

$$F_v(y) = E | (v, W(y)) |^2 = \|v\|^2 y$$

и имеет место следующее представление в виде стохастического интеграла Ито:

$$P_t^v(-(u, a(x))) = \int_0^t c(x,y,u,v) d(v, W(y)) \tag{13}$$

где

$$\int_0^t | c(x,y,u,v) |^2 \, dF_v(y) = E | P_t(-(u, a(x))) |^2 \leq$$
$$\leq E | (u, a(x)) |^2 \leq \|u\|^2 E\|a(x)\|^2 < \infty$$

для почти всех $x \in [0, T]$.

Согласно равенствам (12) и (13):

$$-\int_0^s \langle (u,a(x)),\,(v,W(t))\rangle dx =$$
$$= \int_0^s \left\langle \int_0^t c(x,y,u,v)d(v,W(y)), \int_0^t d(v,W(y)) \right\rangle dx =$$
$$= \int_0^s \int_0^t c(x,y,u,v)\|v\|^2 dydx$$

и на конец

$$-\int_0^s \langle (u,a(x)),\ (v,W(t))\rangle dx = \int_0^t \int_0^s \Phi_{xy}(u,v)dxdy \tag{14}$$

где

$$\Phi_{xy}(u,v) = c(z,y,u,v)\|v\|^2 \tag{15}$$

Из равенства (14) легко получаеця что для всех $s,t \in [0,T]$

$$\int_0^t \int_0^t \Phi_{xy}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2.v)dxdy = \int_0^t \int_0^s [\alpha_1 \Phi_{xy}(u_1,v) + \alpha_2 \Phi_{xy}(u_2,v)]dxdy$$

и следовательно

$$\Phi_{xy}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \Phi_{xy}(u_1,v) + \alpha_2 \Phi_{xy}(u_2,v) \tag{16}$$

для почти всех $x,y \in [0,T]$. Похоже этому получается, что

$$\Phi_{xy}(u\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \overline{\beta_2}\Phi_{xy}(u,v_1) + \overline{\beta_2}\Phi_{xy}(u,v_2) \tag{17}$$

для почти всех $x,y \in [0,T]$.

Дальше, пусть $(e_k)_1^\infty$ какой нибудь ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда

$$\int_0^t \sum_{k=1}^\infty \mid \Phi_{xy}(u,e_k) \mid^2 dy = \sum_{k=1}^\infty \int_0^t \mid c(x,y,u,e_k) \mid^2 dy = E \mid P_t(-(u,a(x))) \mid^2 \leq$$
$$\leq E \mid (u,a(x)) \mid^2 \leq \|u\|^2 E\|a(x)\|^2 < \infty \tag{18}$$

где P_t оператор ортогонального проектирования на $H_t(W)$–замхутую линейную оболочку всех значений $(u,W(x))$, $u \in H$, $0 \leq x \leq t$. Из (18) следует что

$$N^2(x,y,u) = \sum_{k=1}^\infty \mid \Phi_{xy}(u,e_k) \mid^2 dy$$

не зависит от быбора базиса и, сагласно условию (1)

$$N(x,y,u) < \infty \tag{19}$$

для почти всех $x, y \in [0,T]$. Следовательно, для $v \in H$, $v \neq 0$

$$\left| \overline{\Phi_{xy}\left(u, \frac{v}{\|v\|}\right)} \right| \leq N(x,y,u)$$

и

$$\left| \overline{\Phi_{xy}(u,v)} \right| \leq N(x,y,u)\|v\|$$

а это вместе с равенством (17) означате что $\Phi(v) = \overline{\Phi_{xy}(u,v)}$ линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространсте H. Согласно теореме Рисса

$$\Phi_{xy}(u,v) = (C(x,y)u,v). \tag{20}$$

Из равенства (16) и (20) немедленно следует что $C(x,y)$ линейхый оператор. Пусть, снова $(e_k)_1^\infty$ какой нибудь ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Тогда

$$\int_0^t \sum_{k,j=1}^{\infty} \mid (C(x,y)E_k, e_j) \mid^2 dy = \sum_{k,j=1}^{\infty} \int_0^t \mid c(x,y,e_k,e_j) \mid^2 dy =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} E \mid P_t(-(e_k, a(x))) \mid^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} E \mid (e_k, a(x)) \mid^2 = E\|a(x)\|^2$$

для всех $t \in [0,T]$ и следовательно,

$$\int_0^T \sum_{k,j=1}^{\infty} \mid (C(x,y)e_k, e_j) \mid^2 dy \leq E\|a(x)\|^2$$

откуда, согласно условию (1), следует, что $C(x,y)$, для почти всех $x, y \in [0,T]$ являеця оператором Гилбьберта-Шмидта и что

$$\int_0^T \int_0^T \mid C(x,y) \mid^2 dxdy < \infty \tag{21}$$

Рассматривая ревенства (14), (15) и (20), получаем что второй член суммы (7) можно представить в виде

$$-\int_0^s \langle (u, a(x)),\ (v, W(t)) \rangle = \int_0^t \int_0^s (C(x,y)u,v)dxdy \tag{22}$$

где, согласно неравенству (21), $C(x,y)$–операторная функция с интегрируемой в квадрате следовой нормой.

Рассмотрим третий член суммы (7): Из равенства (22) немедленно следует что третий член суммы (7) можно представить в виде

$$-\int_0^t \langle (u, W(s)),\ (v, a(y)) \rangle dy = \int_0^t \int_0^s (C^*(y,x)u,v)dxdy \tag{23}$$

Согласно интегрируемости в квадрате следовой нормы операторной функции $C(x,y)$ выражаемой условием (21), имеем что $C^*(y,x)$ оператор Гильберта-Шмидта для почти всех $x, y \in [0,T]$ и операторная функция $C^*(y,x)$ имеет интегрируемую в квадрате следовую норму

$$\int_0^T \int_0^T \mid C^*(y,x) \mid^2 dxdy < \infty \tag{24}$$

Введем обозначение

$$K(x,y) = B_a(x,y) + C(x,y) + C^*(y,x) \tag{25}$$

Тогда, согласно равенствам (7), (11), (22) и (23)

$$(B_w(s,t)u - B_\xi(s,t)u, v) = \int_0^t \int_0^s (K(x,y)u, v)dxdy \tag{26}$$

или в операторной форме

$$B_w(s,t) - B_\xi(s,t) = \int_0^t \int_0^s (K(x,y)dxdy \tag{27}$$

Согласно интегрируемости в квадрате следовой нормы операторных функций $B_a(x,y)$, $C(x,y)$ и $C^*(y,x)$ (условия (10), (21) и (24)) $K(x,y)$ оператор Гильберта-Шмидта для почти всех $x, y \in [0,T]$ и операторная функция $K(x,y)$ имеет интегрируемую в квадрате следовую норму

$$\int_0^T \int_0^T \mid (K(x,y) \mid^2 dxdy \tag{28}$$

Сформулируем полученный выше результат в виде следующего предложения.

Лемма. *Разность корреляционных функций винеровского процесса $W(t)$ и случайного процесса $\xi(t)$ абсолютно непрерывна относительно $ds \times dt$, мочнее*

$$B_w(s,t) - B_\xi(s,t) = \int_0^t \int_0^s K(x,y)dxdy$$

где операторная функция $K(x,y)$ имеет интегрируемю в квадрате следовую норму

$$\int_0^T \int_0^T \mid K(x,y) \mid^2 dxdy < \infty$$

3. Эквивалентность винеровскому процессу. Результат котоый мы получили и сформулировали в виде леммы значит, что отображение

$$B : (u, W(t)) \to (u, \xi(t)), \ u \in H, \ 0 \leq t \leq T$$

продолжаеця в линейный ограниченный оператор B из гильбертова пространства $H(W)$ в гилбертово пространство $H(\xi)$ и разность $I - B^*B$ оператор Гильберта-Шмидта. Для эквивалентности случайных процессов

$\xi(t)$ и $W(t)$ нужно еще чтобы B был обратимым т.е. чтобы операторная функция $K(x.y)$ удовлетворяла условию (5). Рассмотрим выражение

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x),\, b(y))dxdy = \tag{29}$$

$$= \int_0^T \int_0^T (B_a(x,y)b(x),\, b(y))dxdy + \int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x),\, b(y))dxdy +$$

$$+ \int_0^T \int_0^T (C^*(x,y)b(x),\, b(y))dxdy$$

для интергируемой в квадрате функции $b = b(x)$ на интервале $[0,T]$ со значениями в гильбертовом пространстве H,

$$\int_0^T \|b(x)\|^2 dx \neq 0$$

Легко увидеть что

$$\int_0^T \int_0^T (B_a(x,y)b(x),\, b(y))dxdy = -E\left| \int_0^T (b(x),\, a(x))dx \right|^2 \tag{30}$$

Далее

$$\int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x),\, b(y))dxdy = \int_0^T \int_0^T \left(C(x,y)b(x),\, \sum_{k=1}^{\infty} (b(y), e_k)e_k \right) dxdy$$

$$\int_0^T \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, b(y)(C(x,y)b(x),\, e_k)dxdy$$

и согласно равенствам (15) и (20)

$$\int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x),\, b(y))dxdy = \int_0^T \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, b(y)\Phi_{xy}(b(x),\, e_k)dxdy =$$

$$\int_0^T \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, b(y)(c(x,y,b(x),\, e_k)dxdy =$$

$$\int_0^T \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (C(x,y), b(x),\, e_k)d(e_k, W(y)), \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (b(y), e_k)d(e_k, W(y)) \right\rangle dx =$$

$$= \int_0^T \langle P(-(b(x),\, a(x)), \eta(b) \rangle dx$$

где P оператор ортогонального проектирования на $H(W)$ и

$$\eta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (b(y), e_k)d(e_k, W(y)) \tag{31}$$

$$E \mid \eta(b) \mid^2 = \int_0^T \|b(x)\|^2 dx \tag{32}$$

и наконец

$$\int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x),\, b(y))dxdy = -\Big\langle \int_0^T (b(x),\, a(x))dx,\, \eta(b)\Big\rangle \tag{33}$$

откуда следует

$$\int_0^T \int_0^T (C^*(x,y)b(x),\, b(y))dxdy = -\Big\langle \eta(b), \int_0^T (b(x),\, a(x))dx\Big\rangle \tag{34}$$

Равенства (29), (30), (33) и (34) вместе означают что

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x),\, b(y))dxdy = \\ = \int_0^T \|b(x)\|^2 dx - E\,\Big| \int_0^T (b(x),\, a(x))dx + \eta(b)\,\Big|^2 \tag{35}$$

откуда ясно что условие обратимости линейного ограниченного оператора B можно быразить следующим образом:

$$\int_0^T (b(x),\, a(x))dx + \eta(b) \neq 0 \tag{36}$$

с вероятностью один для всех интегрируемых в квадрате функций $b = b(x)$ на интервале $[0, T]$ со значениями в гильбертовом пространстве H,

$$\int_0^T \|b(x)\|^2 dx \neq 0.$$

Это условие обратимости оператора B окажеця очень полезним в изучении случайнного процесса $\xi = \xi(t)$ в случае когда он решение стохастического интегрального уравнения

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)ds + W(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Сформулируем полученные выше результаты в виде следующего предложения.

Теорема. *Пусть $W = W(t)$, $0 \leq t \leq T$ стандартный винеровский процесс в сепарабельном гилбертовом пространстве H и*

$$\xi(t) = \int_0^t \alpha(s)ds + W(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

где $\alpha(s)$ измеримый случайный процесс в $H, Ea(s) = 0$ и

$$\int_0^T E\|a(s)\|^2 ds < \infty$$

При условии обратимости (36), случайные процессы $\xi = \xi(t)$ *и* $W = W(t)$ *эквивалентны на конечном интервале* $[0,T]$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Z. Ivković, J. Bulatović, J. Vukmirović, S. Živanović, *Application of spectar multiplicity in separable Hilebert space to stohastic processes*, Beograd, Math. Inst. 1974.

[2] Ю. А. Розанов, *Гауссовские бесконечномерные распеделения*, Наука, Москва, 1968.

[3] Ю. А. Розанов, *Теория оновляющихця процессов*, Наука, Москва, 1974.

[4] Ю. А. Розанов, *Марковские случайные поля*, Наука, Москва, 1981.

[5] Ю. А. Далеский, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространстах*, Наука Москва, 1983.

[6] М. П. Ершов, *Об абсолютной непрервности мер, отвечающих процессам диффузионого типа*, Теория вероятностей и ее применения **17** (1972), 173–178.

[7] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случасных процессов, том III*, Наука, Москва, 1975.

[8] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, Москва, 1966.

Arhitektonski fakultet
11000 Beograd
Jugoslavija

(Поступила 30 05 1988)