PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 54 (68), 1993, 29–34

SUR L'INDICE DE SCHUR DANS LES GROUPES DONT LES CARACTÈRES SONT À VALEURS RATIONNELLES

Ion Armeanu

Résumé. Dans cette note nous prouvons que si G est un groupe résoluble qui a des caractères à valeurs rationnelles et tous les caractères sont réalisable dans $\mathbf{R}$, alors les caractères de G sont réalisables dans $\mathbf{Q}(2^{1/2})$ et nous donnons des conditions suffisantes afin qu'un caractère irréductible Γ d'un groupe dont les caractères sont à valeurs rationnelles ait l'indice de Schur $m_{\mathbf{Q}}(\Gamma) = 1$. Ces resultats sont liés avec la conjecture du Gow [**2**] qui affirme que si G est un groupe résoluble qui a des caractères à valeurs rationnelles et tous les caractères de G sont réalisables dans $\mathbf{R}$, alors les caractères de G sont réalisables dans $\mathbf{Q}$.

Abstract. We prove that if G is a solvable group with rational characters and $\mathbf{R}$ is a splitting field for G, then $\mathbf{Q}(2^{1/2})$ is also a splitting field for G and we obtain some sufficient conditions which guarantee that an irréductible character Γ of a group with rational characters has Schur indices $m_{\mathbf{Q}}(\Gamma) = 1$. These results are related to the Gow conjecture [**2**] wich asserts that for a solvable group whose characters are rational valued and $\mathbf{R}$ is a splitting field for G, then $\mathbf{Q}$ is also a splitting field for G.

Les groupes utilisés sont finis et les définitions et les symboles sont ceux de Isaacs [**4**] et de Curtis et Reiner [**1**].

Soit G un groupe. Alors nous notons par $\mathrm{Irr}(G)$ les caractères $\mathbf{C}$ - irréductibles du G. Soit $\Gamma, \Psi \in \mathrm{Irr}(G)$. Alors

$$(\Gamma, \Psi) = (1/|G|) \sum_{g \in G} \Gamma(g)\overline{\Psi(g)}$$

et $m_K(\Gamma)$ est l'indice de Schur de Γ sur le corps K (voir [**4**, p.160]). On dit que Γ est réalisable dans un corps K si la $\mathbf{C}$ - représentation associée est isomorphe à une K - représentation. Si $H \leq G$ alors $\Gamma_{|H}$ est la restriction de Γ à H et si γ est un caractère de H, alors γ^G est le caractère induit de γ à G.

Théorème 1. *Soit G un groupe qui a les caractères à valeurs rationnelles. Soit $\Gamma \in Irr(G)$ qui est réalisable dans le corps $\mathbf{R}$. Alors, il existe $a \in G$, élément*

AMS Subject Classification (1990): Primary 20C15 *d'ordre impair et il existe un 2-groupe de Sylow H dans $\mathbf{C}^*(a) = \{x \in G : xax^{-1} = a$ ou $xax^{-1} = a^{-1}\}$ tel que si $H_0 \leq H$ est un 2-groupe de Sylow dans $C(a)$, il existe un caractère $\lambda \times \mu \in \mathrm{Irr}(A \times H_0)$ où $A = \langle a \rangle$, $\lambda \in \mathrm{Irr}(A)$, $\mu \in \mathrm{Irr}(H_0)$ tel que:*

(i) $(\Gamma_{A\times H_0}, \lambda \times \mu)$ *est impair;*

(ii) *le caractère induit* $(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ *est réalisable dans le corps* $\mathbf{R}$*;*

(iii) μ *est réalisable dans* $\mathbf{Q}$.

Démonstration. D'après le théorème 1.1. de Gow [**3**], il existe $A = \langle a \rangle$, $a \in G$ un élément d'ordre impair, H un 2-subgroupe de Sylow dans $C^*(a)$ et $\theta \in \mathrm{Irr(AH)}$ à valeurs réelles tel que (Γ, θ^G) est impair et $\ker\theta \not\supseteq A$.

Soit H_0 un 2-groupe de Sylow dans le centralisateur dû à $C(a)$, de manière que $H_0 \leq H$. Un calcul simple prouve qu'il existe $\mu \in \mathrm{Irr}(H_0)$ et $\lambda \in \mathrm{Irr}(A)$ tels que $\theta = (\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}$. Compte tenu du théorème de réciprocité de Frobenius (voir [**4**, p.62]), $(\Gamma_{\mathrm{AH}}, \theta) = (\Gamma_{\mathrm{AH}_0}, \lambda \times \mu)$ est impair. Parce que (Γ, θ^G) est impair, $m_{\mathbf{R}}(\Gamma) = 1$ et $\mathbf{Q}(\theta) \subset \mathbf{R}$ (où $\mathbf{Q}(\theta)$ est le corps engendré sur $\mathbf{Q}$ par les valeurs de θ) d'après le théorème de Brauer–Speiser (voir [**4**, p.171]) on obtient que $m_{\mathbf{R}}(\theta) = 1$. D'après le théorème de Clifford (voir [**4**, p.79])

$$(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}{}_{|\mathrm{AH}_0} = \sum_{t \in T} \lambda^t \mu^t,$$

où T est une transversale du H_0 dans H. Soit G_2 le 2-groupe de Sylow dans le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\lambda \times \mu); \mathbf{Q})$. Parce que $[\mathrm{AH} : \mathrm{AH}_0] = 2^n$, $\mathbf{Q}(\theta) \subset \mathbf{R}$ et $\ker\theta \not\supseteq A$ on a que

$$(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}{}_{|\mathrm{AH}_0} = \sum_{\sigma \in G_2} (\lambda \times \mu)^\sigma$$

et on obtient que $[\mathrm{AH} : \mathrm{AH}_0] = [\mathbf{Q}(\lambda); \mathbf{Q}]$, et alors $\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{Q}(\lambda \times \mu)$ et $\mathbf{Q}(\mu) \subseteq \mathbf{Q}(\lambda)$. Du moment que μ est un caractère irréductible d'un 2-groupe, on obtient que $\mathbf{Q}(\mu) \cap \mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{Q}$, donc μ est à valeurs rationnelles.

Parce que Γ_{AH_0} est réalisable dans $\mathbf{R}$ et $(\lambda \times \mu, \Gamma_{\mathrm{AH}_0})$ est impair , on obtient que $m_{\mathbf{R}}(\lambda \times \mu) = 1$. Parce que $m_{\mathbf{R}}(\lambda) = 1$ et $[\mathbf{R}(\lambda); \mathbf{R}]$ est impair, d'apres [**4**, p.172, 10. 10.] on obtient que $m_{\mathbf{R}}(\lambda \times \mu) = m_{\mathbf{R}}(\lambda) m_{\mathbf{R}}(\mu)$, donc $m_{\mathbf{R}}(\mu) = 1$. Mais μ est un caractère rationnel d'un 2-groupe et donc est réalisable dans le corps $\mathbf{Q}$.

THÉORÈME 2. *Soit $\lambda \times \mu$ le caractère obtenu par le théorème 1 et H un 2-groupe de Sylow dans $N_G(A)$ tel que $H_0 \leq H$. Supposons que μ soit invariant dans H ($\mu(txt^{-1}) = \mu(x)$ pour $t \in H$ et $x \in H_0$). Soit encore $\tau \in \mathrm{Irr}(A)$ le caractère fidèle, de manière que $\tau^n = \lambda$.*
Alors:

(i) $(\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ *est irréductible à valeurs dans un corps K extension de degré impair du corps* $\mathbf{Q}$.

(ii) $(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ *est à valeurs dans K et si $(\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ est réalisable dans K, alors* $(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ *est réalisable dans K aussi.*

Démonstration (i) Parce que le stabilisateur du $\tau \times \mu$ est AH_0, on obtient que $(\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ est irréductible. Puisque μ est invariant dans H on a que

$$(\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}}(ax) = \sum_{t \in T} \tau(tat^{-1})\mu(x),$$

où T est une transversale de H_0 dans H et $x \in H_0$. Soit σ un automorphisme d'ordre puissance de 2 dans $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\omega); \mathbf{Q})$ (où ω est une racine primitive d'ordre $o(a)$ de l' unité). Le caractère μ étant à valeurs rationnelles on obtient que

$$((\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}})^{\sigma} = (\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}},$$

donc $K = \mathbf{Q}((\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}})$ est un corps extension de degré impair de $\mathbf{Q}$.

(ii) Soient T_τ, T_μ, T_λ les représentations correspondant aux caractères τ, μ, λ. Soit $z_1 = 1, z_2, \ldots, z_n$ une transversale de H_0 en H. Alors le composant (i, j) de la matrice de la représentation $(T_\tau \times T_\mu)^{\mathrm{AH}}\,(axt)$ est

$$(T_\tau \times T_\mu)^0(z_i axt z_j^{-1}) = T_\tau^0(z_i a z_i^{-1}) T_\mu^0(z_i x z_i^{-1} z_i t z_j^{-1}),$$

où $x \in H_0$ et t appartient à la transversale de H_0 en H. Donc si $z_i t z_j^{-1} \notin H_0$, alors

$$(T_\tau \times T_\mu)^0(z_i axt z_j^{-1}) = 0$$

et si $z_i t z_j^{-1} \in H_0$ alors

$$(T_\tau \times T_\mu)^0(z_i axt z_j^{-1}) = T_\tau(z_i a z_i^{-1}) T_\mu(z_i xt z_j^{-1}).$$

De la même manière, le composant (i, j) de la matrice de la représentation $(T_\lambda \times T_\mu)^{\mathrm{AH}}(axt)$ est nul pour $z_i t z_j^{-1} \notin H_0$ et est $T_\lambda(z_i a z_i^{-1}) T_\mu(z_i xt z_j^{-1})$ à la condition que $z_i t z_j^{-1} \in H_0$. Mais $T_\lambda(z_i a z_i^{-1}) = \lambda^{z_i}(a)$ et $T_\tau(z_i a z_i^{-1}) = \tau^{z_i}(a)$. Donc pour les composants on obtient que

$$((T_\lambda \times T_\mu)^{\mathrm{AH}}(axt))_{(i,j)} = ((T_\tau \times T_\mu)^{\mathrm{AH}}(a^k xt))_{(i,j)}.$$

Il en résulte que si $(\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ est réalisable dans K, alors $(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ est réalisable dans le corps K aussi.

THÉORÈME 3. *Si $(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ est réalisable dans le corps K, alors Γ est réalisable dans $\mathbf{Q}$.*

Démonstration Parce que $(\Gamma, (\lambda \times \mu)^G)$ est impair, et l' indice de Schur

$$m_K((\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}) = 1$$

compte tenu du lemme 10.4, p. 162 de [**4**], on obtient que $m_{\mathbf{Q}}(\Gamma) = 1$.

THÉORÈME 4. *S'il existe $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$ à valeurs rationnelles tel que $\theta_{|H_0} = \mu$, alors γ est réalisable dans $\mathbf{Q}$.*

Démonstration Parce que μ est réalisable dans $\mathbf{Q}$ et θ sera réalisable dans $\mathbf{Q}$. En calculant, on obtient que

$$((\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}}, \theta^{\mathrm{AH}}) = 1.$$

Donc $(\tau \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ est réalisable dans K et en vertu du théorème 2 $(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ est réalisable aussi dans K. Conformément au théorème 3, on obtient que Γ est réalisable dans $\mathbf{Q}$.

COROLLAIRE 1. *Si μ est linéaire et s'il existe θ tel que $\theta_{|H_0} = \mu$, alors Γ est réalisable dans $\mathbf{Q}$.*

LEMME. *$(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}$ est à valeurs dans K si et seulement si μ est H-invariant.*

Démonstration En vertu du théorème de Clifford

$$(\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}{}_{|\mathrm{AH}_0} = \sum_{t \in T} \lambda^t \times \mu^t,$$

où T est une transversale de H_0 dans H. Parce que pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\omega_{o(a)}), \mathbf{Q})$, d'ordre puissance de 2,

$$((\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}})^{\sigma} = (\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}},$$

on obtient qu'il existe un élément $t \in T$ si bien que

$$(\lambda \times \mu)^{\sigma} = \lambda^t \times \mu^t$$

Parce que $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\omega_{o(a)}), \mathbf{Q}) \simeq H/H_0$ et μ est à valeurs rationnelles on obtient que pour tout $t \in T$, il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\omega_{o(a)}), \mathbf{Q})$ un automorphisme d'ordre puissance de 2 tel que

$$(\lambda \times \mu)^t = \lambda^t \times \mu^t = (\lambda \times \mu)^{\sigma} = \lambda^{\sigma} \times \mu = \lambda^t \times \mu,$$

donc $\mu = \mu^t$.

THÉORÈME 5. *Soit p un nombre premier impair, $p/|G|$, tel que $p-1$ n'est pas divisible par 4. Supposons que $o(a) = p^k$. Alors*

(i) *μ est invariant dans H et il existe $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$ de telle sorte que $\theta_{|H_0} = \mu$.*

(ii) *$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(2^{1/2})$ et Γ est réalisable dans $\mathbf{Q}(2^{1/2})$.*

Démonstration D'après le lemme il résulte que μ est invariant dans H. Parce que H/H_0 est cyclique, il existe $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$ tel que $\theta_{|H_0} = \mu$. Alors, l'invariant de Frobenius-Schur (voir [**4**, p.50]) $\nu_2((\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}) = 1$ et un calcul direct nous donne que

$$\nu_2((\lambda \times \mu)^{\mathrm{AH}}) = (1/|H_0|) \sum_{h \in H_0} \mu((ht)^2)$$

où $1, t$ est une transversale de H_0 dans H. Donc,

$$\nu_2(\theta) = (1/|H_0|) \sum_{h \in H} \theta(h^2) = (1/|H|)(\sum_{h \in H_0} (\mu(h^2) + \mu((ht)^2)) = 1$$

c'est-à-dire θ est réalisable dans $\mathbf{R}$. Mais $\mu^H = \theta + \alpha \cdot \theta$ où $\alpha \in \mathrm{Irr}(H/H_0)$. Si $\mathbf{Q}(\theta) \neq \mathbf{Q}$, soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\theta), \mathbf{Q})$ de telle sorte que $\theta^\sigma \neq \theta$. Alors $\theta^\sigma = \alpha\theta$ et il résulte que $|\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\theta), \mathbf{Q}| = 2$. Parce que $\mathbf{Q}(\theta) \subseteq \mathbf{Q}(\omega_{2^n})$ et θ est réel on obtient que $\mathbf{Q}(\theta)$ est une extension quadratique réelle de $\mathbf{Q}$, donc $\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(2^{1/2})$.

COROLLAIRE 2. *Soit G un groupe d'ordre $|G| = 2^r 3^s$ avec des caractères à valeurs rationnelles et soit $\Gamma \in \mathrm{Irr}(G)$. Alors Γ est réalisable dans $\mathbf{Q}(2^{1/2})$.*

COROLLAIRE 3. *Si G est un groupe résoluble qui a des caractères à valeurs rationnelles et tous les caractères sont réalisables dans $\mathbf{R}$, alors les caractères de G sont réalisables dans $\mathbf{Q}(2^{1/2})$.*

Démonstration D'après Gow [**2**], $|G| = 2^r 3^s$.

COROLLAIRE 4. *Les caractères de groupe symétrique S_n sont réalisables dans $\mathbf{Q}$.*

Démonstration Si a est un element d'ordre impaire, le 2-Sylow groupe de $N_G(\langle a \rangle)$ est le produit direct d'un groupe isomorphe avec $\mathrm{Aut}_2(\langle a \rangle)$ avec un 2-Sylow groupe de $C_G(a)$. Alors le caractère μ est invariant dans H et il existe $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$ à valeurs rationnelles de telle sorte que $\theta_{|H_0} = \mu$.

COROLLAIRE 5. *Soit G un groupe résoluble fini et $\Gamma \in \mathrm{Irr}(G)$ de telle sorte que $m_{\mathbf{Q}}(\Gamma) = 2$ et Γ est réalisable dans $\mathbf{R}$. Alors $2^5/|G|$.*

Démonstration Supposons que $2^5 \not| |G|$. Alors $|H| \leq 2^4$ et $|H_0| \leq 2^3$. Soit $|H| \leq 2^3$. Alors $|H_0| \leq 2^2$ donc le caractère μ est linéaire et le Corollaire 1 fournit le resultat.

Soit $|H| = 2^4$ et $|H_0| = 2^3$. Alors il existe une extension θ de μ à H. Parce que $(\theta_{H_0}, \mu) = 1$ et $m_{\mathbf{Q}}(\mu) = 1$ on a que $m_{\mathbf{Q}}(\theta) = 1$. Soit μ non-linéaire. Alors H_0 est quaternionique ou dihedral. Mais le seul caractère nonlinéaire dans le groupe quaternionique a absolu Schur indice 2 et alors H_0 est le groupe dihedral D_4. Les groupes d'ordre 16 qui contiennent D_4 sont $\mathbf{Z}_2 \times D_4$, le groupe semidihedral, le groupe dihedral et le groupe

$$U = \langle \{u, b, c | u^4 = b^2 = c^2 = 1, ub = bu, cu = uc, bcb = cu^2\} \rangle.$$

Pour le groupe $\mathbf{Z} \times D_4$ le resultat est évident.

Pour le groupe simidihedral et pour U un calcul simple prouve que l'invariante Frobenius–Schur $\nu_2(\theta) = -1$, contradiction.

Soit $H = D_8$ et $H_0 = D_4$. Soit $D_8 = \langle y, b \rangle$ avec $o(b) = 8$ et $D_4 = \langle y, b^2 \rangle$. Parce que

$$N_G(\langle ax \rangle)/C_G(\langle ax \rangle) \simeq \mathrm{Aut}(\langle ax \rangle) = \mathrm{Aut}\langle a \rangle \times \mathrm{Aut}\langle x \rangle$$

il existe $z \in N_G(\langle ax \rangle)$ tel que $zaxz^{-1} = a^{-1}x$. Si $o(z) = 2^k q$ où q est impair, prenons $t = z^q$ alors $taxt^{-1} = a^{-1}x$ et $o(t) = 2^k$. Alors il existe un 2-Sylow groupe H^g de $N_G(\langle a \rangle)$ si bien que $x \in H_0^g$ et $t \in H^g$ où $g \in N_G(\langle a \rangle)$. Parce que $H^g \simeq D_8$, le seul élément d'ordre 2 dans $H_0^g \simeq D_4$ qui commute avec un élément de $H^g \backslash H_0^g$

est gb^4g^{-1}, alors $x = gb^4g^{-1}$. Parce que $gxg^{-1} \in H_0^g$ est une involution, il est une de gb^4g^{-1}, gxb^2g^{-1}, gxb^4g^{-1} et la seulle qui coresponde aux conditions imposées est gb^4g^{-1}. Alors $gxg^{-1} = x = gb^4g^{-1}$, contradiction.

RÉFÉRENCES

[1] C. Curtis I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience, New York, 1962.

[2] R. Gow, *Groups whose characters are rational valued*, J. Algebra, **40**(1976), 280-289.

[3] R. Gow, *Real-Valued and 2-rational group characters*, J. Algebra, **61**(1976), 388-413.

[4] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1976.

University of Bucharest
Faculty of Physics
Mathematics Department
Bucharest Magurele
Romania

(Received 01 06 1992)
(Revised 20 10 1993)