PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 60 (74), 1996, 65-74

CARACTERISATION DE LA STABILITE D'UN PROBLEME DE MINIMISATION ASSOCIE A UNE FONCTION DE PERTURBATION PARTICULIERE

D. Mentagui

Communicated by Gradimir Milovanović

Abstract. We present necessary and sufficient conditions for the lower semi-continuity and exactness of the infinimal convolution $f^*\nabla g^*$, where f^* and g^* denote respectively the conjugate of two convex functions f and g. Our goal is to characterize the stability of a minimization problem: $\inf_x \varphi(x,0)$ where φ is given by $\varphi(x,u) = f(x) + g(x-u)$.

Résumé. L'objet de cet article est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour la semi-continuité inférieure et l'exactitude de l'inf-convolution $f^*\nabla g^*$ où f^* et g^* désignent respectivement les polaires de deux fonctions convexes f et g. On montrera en particulier: une condition nécessaire pour que $f^*\nabla g^*$ soit sci, est que l'ensemble $\bigcup_{\|x-y\|<\eta}[\partial f(x) + \partial g(y)]$ soit dense dans le domaine de $(f+g)^*$ pour tout $\eta > 0$. Notre travail est motivé par la caractérisation de la stabilité d'un problème de minimisation associé à une fonction de perturbation φ de la forme $(x,u) = f(x) + g(x-u)$.

Introduction. L'objet de cet article est de donner des conditions nécessaires et suffisantes en terme de sous-différentiel à ε près, assurant la semi-continuité inférieure de l'inf-convolution polaire $f^*\nabla g^*$ où f et g sont deux fonctions de $\Gamma_0(X)$. La semi-continuité inférieure et l'exactitude de $f^*\nabla g^*$ apparaissent en optimisation convexe, lorsque le problème à minimiser se présente sous la forme (voir [**3**], [**5**]):

$$\text{(P)} \qquad \inf \phi(x,0) \quad \text{où} \quad \phi(x,u) = f(x) + g(x-u)$$

oú f et g sont deux fonctions convexes propres sci définies sur un espace localement convexe, mis en dualité séparante avec un autre e.l.c Y. (les topologies de X et Y

AMS Subject Classification (1991): Primary 49A50, 49B50; Secondary: 54B20

sont supposées compatibles avec cette dualité). Le problème dual de (P), noté (P*) est défini par:

$$(\mathrm{P}^*) \qquad \sup\{-\phi^*(0,y) \mid y \in Y\} \quad \text{où} \quad \phi^*(v,y) = f^*(v+y) + g^*(-y).$$

Ce problème permet d'interpréter plusieurs phénomènes, tels que les prix en économie, les forces en mécanique où les multiplicateurs de Lagrange en programmation mathématique. La stabilité du problème (P) équivaut à $\inf P = \sup P^*$, ce nombre est fini et (P*) admet au moins une solution. L'égalité $\inf P = \sup P^*$ se traduit par $(f+g)^*(0) = (f^*\nabla g^*)(0)$, ce qui n'est autre que la semi-continuité inférieure de $f^*\nabla g^*$ en 0. Les solutions de (P*) lorsqu' elles existent sont les points d'exactitude de $f^*\nabla g^*$ en 0. Dans la section 3, nous comparons les hypothèses de Joly [**4**] et celles d'Attouch-Brezis [**1**], relatives toutes les deux à la semi-continuité inférieure et à l'exactitude de $f^*\nabla g^*$. On montrera que l'hypothèse d'Attouch-Brezis est plus faible que celle de Joly. Nous donnerons ensuite dans la section 4 une condition nécessaire et suffisante pour la semi-continuité inférieure de $f^*\nabla g^*$ en terme de sous-différentiel à ε près. Ceci nous permet grâce à un résultat de Broendsted-Rockafellar [**8**] de donner une nouvelle condition nécessaire de la semi-continuité inférieure de $f^*\nabla g^*$, à savoir que l'ensemble $\bigcup_{\|x-y\|<\eta}[\partial f(x) + \partial g(y)]$ est dense dans $\mathrm{Dom}\,(f+g)^*$ pour tout $\eta > 0$.

2. Préliminaires. Soient X et Y deux espaces vectoriels mis en dualité séparante par une forme bilinéaire $X \times Y : (x,y) \to \langle x,y\rangle$. On munit X et Y de topologies localement convexes compatibles avec cette dualité [**2**], [**5**]. $\sigma(Y,X)$ désignera la topologie faible induite sur Y par cette dualité.

Dans la suite on désignera par $\Gamma_0(X)$ le cône des fonctions convexes semi-continues inférieurement et propres, i.e non identiquement égales à $+\infty$ et ne prennant jamais la valeur $-\infty$. Si $f \in \Gamma_0(X)$ et C un convexe fermé de X on note par: $\mathrm{Dom}\, f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$ le domaine effectif de f. $N(x, \mathrm{Dom}\, f) = \{y \in Y \mid \langle t-x, y\rangle \leq 0, \forall t \in \mathrm{Dom}\, f\}$ le cône normal à $\mathrm{Dom}\, f$ au point x. $\mathrm{epi}\, f = \{(x,\lambda) \in (X \times R \mid f(x) \leq \lambda\}$ l'épigraphe de f. $f^* : y \in Y \to \sup\{\langle x,y\rangle - f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\}$ la transformée de Legendre-Fenchel (ou la polaire) de f dans la dualité (X,Y). $\partial f(x) = \{y \in Y \mid f^*(y) + f(x) = \langle x,y\rangle\}$ le sous-différentiel de f au point x au sens de l'analyse convexe. $\partial_\varepsilon f(x) = \{y \in Y \mid f^*(y) + f(x) - \langle x,y\rangle \leq \varepsilon\}$ le sous-différentiel à ε près de f au point x. $f0_+(x) = \sup\{(f(x_0 + \lambda x) - f(x)))/\lambda > 0\}$ la fonction asymptote de f. On vérifie aisément que cette expression ne dépend pas du choix de x_0 dans $\mathrm{Dom}\, f$ et que la fonction asymptote de f^* est donnée par: $f^*(y) = \sup\{\langle x,y\rangle \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\}$. $0^+C = \bigcap_{\varepsilon>0} \varepsilon(C - x_0)$, le cône asymptote de C. On vérifie classiquement que ce cône ne dépend pas du choix de x_0 dans C et que $0^+\mathrm{epi}\, f = \mathrm{epi}\, f0^+$. L'inf-convolution de deux fonctions f et g de $\Gamma_0(X)$ est la fonction notée $f\nabla g$ et définie par: $x \in X \to (f\nabla g)(x) = \inf\{f(u) + g(x-u) \mid u \in X\}$. On dit que l' inf-convolution $f\nabla g$ est exacte en un point x, s'il existe $u \in X$ tel que $(f\nabla g)(x) = f(u) + g(x-u)$.

Pour plus de détails sur ces notions et sur leur rôle crucial en optimisation convexe on peut consulter [**3**], [**5**], [**6**], [**8**], [**9**].

La fonction indicatrice d'une partie A de X est la fonction notée δ_A, qui vaut 0 sur A et $+\infty$ ailleurs.

2.1. *Définition* [**4**] Soit $f \in \Gamma_0(X)$. On dit que f est quasi-continue, si le domaine effectif de f engendre une variété affine fermée L_f de codimension finie et si la restriction de f à L_f est continue en tout point de l'intérieur de $\operatorname{Dom} f$ relativement à L_f, noté $\operatorname{ir}(\operatorname{Dom} f)$.

Exemples: a) f continue $\Rightarrow$ f quasi-continue. b) En dimension finie, la fonction indicatrice d'un sous-espace vectoriel propre est quasi-continue mais non continue.

2.2. *Définition* [**4**] On dit que deux fonctions de $\Gamma_0(X)$ sont unies si leurs domaines ne sont que trivialement séparés, c'est à dire, s'il existe un hyperplan fermé qui sépare les deux domaines, il les contient tous les deux.

3. Comparaison des hypotheses de Joly et d'Attouch–Brezis pour la semi-continuite inférieure et l'exactitude de $f^*\nabla g^*$. Dans [**4**], Joly a montré que l'inf-convolution polaire $f^*\nabla g^*$ est $\sigma(Y,X)$ sci et exacte en tout point sous l'hypothèse:

(H$_1$) a) f est quasi-continue b) f et g sont unis

Dans [**1**], Attouch et Brezis ont établi le même résultat sous l' hypothèse de qualification:

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g) \ \text{ est un sous-espace vectoriel fermé de } X.$$

L'objet de cette section est de montrer que l'hypothèse (H$_2$), en apparence différente de (H$_1$), est en réalité plus faible.

3.1. Proposition. *Soient X un espace de Banach et $Y = X'$ son dual topologique. Alors $(H_1) \Rightarrow (H_2)$.*

Pour la démonstration, on aura besoin du lemme suivant:

3.2. Lemme. *Soient f et g deux fonctions de $\Gamma_0(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) f et g sont unies.

ii) $E = \operatorname{epi} f^* \cap -\operatorname{epi} g^*0^+$ est un sous-espace vectoriel de $Y \times \mathbf{R}$.

iii) $F = \{y \in Y \mid f^*(y) + g^*0(-y) \leq 0\}$ est un sous-espace vectoriel.

iv) $\bar{M}$ est un sous-espace vectoriel de X où $M = \bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g)$.

Si l'une de ces propositions est vérifiée alors $\operatorname{proj}_Y E = F = \bar{M}^{\perp(X,Y)}$.

v) Si de plus $\dim X < +\infty$, les assertions précédentes sont équivalentes au fait que M est un sous-espace vectoriel.

Preuve. i) est équivalent à ii) d'après [**4**].

i) $\Leftrightarrow$ iii): L'ensemble $F = \{y \in Y \mid \langle y, z\rangle \leq 0, \forall z \in \operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g\}$ est un cône convexe. Pour qu'il soit un sous-espace vectoriel il faut et il suffit qu'il soit symétrique, ce qui est équivalent à:

$$\forall y \in F \sup_{x \in \operatorname{Dom} f} \langle x, y\rangle \leq \inf_{x \in \operatorname{Dom} g} \langle x, y\rangle \leq \sup_{x \in \operatorname{Dom} g} \langle x, y\rangle \leq \inf_{x \in \operatorname{Dom} f} \langle x, y\rangle,$$

c'est à dire, si et seulement si f et g sont unies. L'équivalence iii) $\Leftrightarrow$ iv) est une conséquence immédiate des égalités $F = \bar{M}^{\perp}$ et $\bar{M} = F^{\perp}$

v) Si de plus $\dim X < +\infty$, le fait que $\bar{M}$ soit un sous-espace vectoriel implique que $\bar{M} = \operatorname{ir}(\bar{M}) = \operatorname{ir}(M)$ [**10**, Th. 6.3]. Comme $\operatorname{ir}(M) \subseteq M$ alors $\bar{M} = M$, ce qui achève la preuve. ■

Remarque. Si $\dim X = +\infty$, en général la condition iv) n'implique pas v). Il suffit de remarquer qu' il existe des cônes convexes partout denses mais non nécessairement des s.e.v.

3.3. Lemme. [**4**] *Soient A et B deux convexes unis avec δ_A quasi-continue. Alors* $\operatorname{ir}(A) \cap B \neq \emptyset$.

Remarque. En dimension finie, la quasi-continuité d' un convexe est toujours vérifiée; et deux convexes A et B sont unis si et seulement si $\operatorname{ir}(A) \cap \operatorname{ir}(B) \neq \emptyset$ [**10**, Th. 11.3].

Preuve de la proposition 3.1. Comme f est quasi-continue et $\operatorname{Dom} f$ et $\operatorname{Dom} g$ sont unis, le lemme 3.3 implique que $\operatorname{ir}(\operatorname{Dom} f) \cap \operatorname{Dom} g \neq \emptyset$. Quitte à faire une translation, on peut supposer sans nuire à la généralité que $0 \in \operatorname{ir}(\operatorname{Dom} f) \cap \operatorname{Dom} g$. En posant

$$C_f = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\operatorname{Dom} f) \quad \text{et} \quad C_g = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\operatorname{Dom} g)$$

et en utilisant la convexité de f et g, on obtient:

$$\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g) = C_f - C_g = L_f - C_g.$$

Montrons maintenant que $L_f - C_g$ est un sous-espace fermé: Considérons la surjection canonique $S : X \to X/L_f$. D'après le lemme 3.2, $\bar{M} = \overline{L_f - C_g}$ est un sous-espace vectoriel fermé. Donc $S(\bar{M})$ est un sous-espace vectoriel fermé de X/L_f puisque ce dernier est de dimension finie. Comme S est continue alors $\overline{S(M)} = \overline{S(\bar{M})}$. On en déduit que $\overline{S(C_g)} = \overline{S(M)}$ est un sous-espace vectoriel de X/L_f. Il en est de même pour $S(C_g)$ car $\dim X/L_f < +\infty$. Ainsi $M = L_f - C_g = L_f + C_g = S^{-1}(S(C_g))$ est un sous-espace vectoriel fermé de X, ce qui achève la démonstration. ■

3.4. *Contre-exemples.* Pour terminer cette section, montrons à l'aide de contre-exemples que si l'hypothèse (H_2) est satisfaite, (H_1) ne l'est pas en général.

a) Soient X un espace de Banach de dimension infinie et f, g deux fonctions de $\Gamma_0(X)$ telles que $\mathrm{Dom}\, f$ et $\mathrm{Dom}\, g$ soient des sous-espaces de dimensions finies. Alors

$$\bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda(\mathrm{Dom}\, f - \mathrm{Dom}\, g) - \mathrm{Dom}\, f + \mathrm{Dom}\, g$$

est un sous-espace fermé. Les fonctions f et g sont donc unies, mais aucune d'elles n'est quasi-continue car les codimensions de $\mathrm{Dom}\, f$ et $\mathrm{Dom}\, g$ sont infinies.

b) Soient $X = l^1(\mathbf{N})$ muni de sa norme usuelle et $P = \{x = (\xi_n)_n \in X \mid \xi_n > 0, \forall n\}$ le cône convexe fermé de X. Soient f et g deux fonctions de $\Gamma_0(X)$ telles que $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g = P$. On vérifie aisément que P engendre X et que l'intérieur de P est vide. Donc ni f ni g ne peuvent être continues.

4. Conditions nécessaires et suffisantes en terme de sous-differentiel à ε près pour la semi-continuité inférieure de $f^*\nabla g^*$. Le but de cette section est de caractériser la semi-continuité inférieure de la fonction $f^*\nabla g^*$ en terme du sous-différentiel à ε près.

4.1. THÉORÈME. *Soient f et g deux fonctions de $\Gamma_0(x)$ telles que $f+g$ n'est pas identiquement égale à $+\infty$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

i) $f^*\nabla g^*$ *est* $\sigma(Y,X)$. ii) $f^*\nabla g^* = (f+g)^*$.

iii) $\mathrm{Dom}\,(f+g)^* = \bigcap_{\varepsilon} \bigcup_{x\in \mathrm{Dom}\, f\cap \mathrm{Dom}\, g} [\partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x)]$.

iv) $\forall\alpha > 0$, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ *on a:* $\partial_\varepsilon(f+g)(x) \subseteq \partial_{\alpha+\varepsilon} f(x) + \partial_{\alpha+\varepsilon} g(x)$.

Si l'une de ces assertions est vérifiée, alors pour tout $x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$, on a:

$$\partial(f+g)(x) = \bigcap_{\varepsilon\downarrow 0} [\partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x)]$$

Preuve. i) $\Leftrightarrow$ ii): $f^*\nabla g^*$ est $\sigma(Y,X)$ sci si et seulement si $f^*\nabla g^* = \overline{f^*\nabla g^*}$ où $\overline{f^*\nabla g^*}$ désigne la régularisée $\sigma(Y,X)$ sci de $f^*\nabla g^*$. Comme

$$(f^*\nabla g^*)^{**} = (f+g)^* \leq \overline{f^*\nabla g^*} \leq f^*\nabla g^*$$

(voir [**5**, Chap. VI]) et que f^*, g^* et $(f+g)^*$ sont dans $\Gamma_0(X')$ alors $\overline{f^*\nabla g^*}$ prend au moins une valeur finie. Donc $\overline{f^*\nabla g^*} = (f+g)^*$ [**5**].

ii) $\Rightarrow$ iii): En effet, $f^*\nabla g^* = (f+g)^*$ si et seulement si $\forall y \in \mathrm{Dom}\,(f+g)^*$

$$(f^*\nabla g^*)(y) \leq (f+g)^*(y)$$

où encore si et seulement si $(f^*\nabla g^*)(y) < (f+g)^*(y) + \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$. Si cette dernière inégalité est vérifiée (ε et y étant fixés), il existe $t \in Y$, $z \in Y$ et $x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ (qui dépendent de ε et y) tels que $y = t+z$ et $f^*(t) + g^*(z) \leq \langle x,y\rangle - f(x) - g(x) + \varepsilon$. On en déduit les inégalités

$$f^*(t) + f(x) - \langle x,t\rangle \leq \langle x,z\rangle - g(x) - g^*(z) + \varepsilon \leq \varepsilon$$
$$g^*(z) + g(x) - \langle x,z\rangle \leq \langle x,t\rangle - f(x) - f^*(t) + \varepsilon \leq \varepsilon$$

ce qui implique que $t \in \partial_\varepsilon f(x)$, $z \in \partial_\varepsilon g(x)$ et donc $y = t + z \in \partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x)$. Par suite

$$\mathrm{Dom}\,(f+g)^* \subseteq \bigcap_{\varepsilon} \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} [\partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x)].$$

Comme l' inclusion $\partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x) \subseteq \mathrm{Dom}\,(f+g)^*$ est toujours vérifiée, on a l'égalité de iii).

iii) $\Rightarrow$ ii): Soit $y \in \mathrm{Dom}\,(f+g)^*$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$, tels que $y = t + z$. Nous avons:

$$f^*(t) + f(x) - \langle x, t\rangle \leq \varepsilon \quad g^*(z) + g(x) - \langle x, z\rangle \leq \varepsilon.$$

Par suite

$$(f^* \nabla g^*)(y) \leq f^*(t) + g^*(z) \leq 2\varepsilon + \langle x, y\rangle - (f+g)(x) \leq 2\varepsilon + (f+g)^*(y).$$

D'où $(f^* \nabla g^*)(y) \leq (f+g)^*(y)$ et ii) est ainsi démontrée.

iv) $\Rightarrow$ iii) est triviale puisque

$$\begin{aligned} &\mathrm{Dom}\,(f+g)^* \\ &\quad = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} [\partial_\varepsilon (f+g)(x)] \subseteq \bigcap_{\varepsilon \downarrow 0} \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} [\partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x)]. \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ iv): Soient $y \in \partial_\varepsilon (f+g)(x)$ et $\alpha > 0$. Il existe deux éléments t, z dans Y dépendants de y, ε, x et α tels que $y = t + z$ et

$$(f^* \nabla g^*)(y) \leq f^*(t) + g^*(z) \leq (f^* \nabla g^*)(y) + \alpha.$$

Ainsi

$$f^*(t) + g^*(z) - \alpha \leq (f^* \nabla g^*)(y) = (f+g)^*(y) \leq \varepsilon - f(x) - g(x) + \langle x, y\rangle.$$

Par suite

$$\begin{aligned} f^*(t) + f(x) - \langle x, t\rangle &\leq \alpha + \varepsilon + \langle x, z\rangle - g(x) - g^*(z) \leq \alpha + \varepsilon \\ g^*(z) + g(x) - \langle x, z\rangle &\leq \alpha + \varepsilon + \langle x, t\rangle - f(x) - f^*(t) \leq \alpha + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $y = t + z \in \partial_{\alpha+\varepsilon} f(x) + \partial_{\alpha+\varepsilon} g(x)$. Enfin si l'une des conditions précédentes est satisfaite alors

$$\begin{aligned} \partial(f+g)(x) = \bigcap_{\varepsilon \downarrow 0} [\partial_\varepsilon (f+g)(x)] &\subseteq \bigcap_{\varepsilon \downarrow 0} [\partial_{2\varepsilon} f(x) + \partial_{2\varepsilon} g(x)] \\ &\subseteq \bigcap_{\varepsilon \downarrow 0} [\partial_{4\varepsilon} (f+g)(x)] = \partial(f+g)(x) \end{aligned}$$

D'où $\partial(f+g)(x) = \bigcap_{\varepsilon\downarrow 0}[\partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x)]$, ce qui achève la démonstration. ■

Remarques. a) Une démonstration analogue à celle du théorème précédent montre que les équivalences entre i), ii), iii) et iv) du théorème précédent restent valables si on remplace $f+g$ par une somme finie de fonctions de $\Gamma_0(X)$.

b) Si $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ est vide, la semi-continuité inférieure de $f^*\nabla g^*$ en un point y n'implique pas nécessairement l'égalité $(f^*\nabla g^*)(y) = (f+g)^*(y)$: Soient $X = \mathbf{R}_2$ et f, g deux fonctions de $\Gamma_0(X)$ définies par:

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} -\sqrt{x_1x_2}, & \text{si } x_1,x_2 \geq 0 \\ +\infty, & \text{si non} \end{cases} \quad g(x_1,x_2) = \begin{cases} -1/x_1, & \text{si } x_1 < 0 \text{ et } x_2 \in R \\ +\infty, & \text{si non} \end{cases}$$

On vérifie aisément que

$$f^*(t,z) = \begin{cases} 0, & \text{si } t<0 \text{ et } z \leq 1/4t \\ +\infty, & \text{si non,} \end{cases} \quad g^*(t,z) = \begin{cases} -2\sqrt{t}, & \text{si } t \geq 0 \text{ et } z = 0 \\ -\infty, & \text{si non.} \end{cases}$$

et que

$$f+g = +\infty, \quad (f+g)^* = -\infty \quad \text{et} \quad (f^*\nabla g^*)(t,z) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } z \geq 0 \\ -\infty, & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

c) L'inclusion de iv) du théorème précédent peut être stricte: Soient

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty, & \text{si non} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{si } x > 0 \\ +\infty, & \text{si non} \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\partial_\varepsilon(f+g)(x) \subset \partial_{\alpha+\varepsilon} f(x) + \partial_{\alpha+\varepsilon} g(x)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \alpha > 0$

4.2. Corollaire. *Soient f et g deux fonctions de $\Gamma_0(X)$ telles que $f+g$ n'est pas identiquement égale à $+\infty$. On suppose que*

$$\operatorname{Dom}(f+g)^* = \bigcup_{x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g} [\partial f(x) + \partial g(x)].$$

Alors: i) $f^*\nabla g^*$ est sci et exacte en tout point. ii) $\partial f(x) + \partial g(x) = \partial(f+g)(x)$, $\forall x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$.

Preuve. i) Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ nous avons $\partial f(x) + \partial g(x) \subseteq \partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x)$. Par conséquent

$$\operatorname{Dom}(f+g)^* = \bigcup_{x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g} \partial f(x) + \partial g(x) \subseteq \bigcap_{\varepsilon\downarrow 0} \bigcup_{x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g} [\partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x)]$$

et $f^*\nabla g^*$ est sci d'après le théorème 4.1. Soit $y \in \operatorname{Dom}(f+g)^*$. Il existe $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $t \in \partial f(x)$ et $z \in \partial g(x)$ tels que $y = t+z$. On a $f^*(t) + f(x) = \langle x,t\rangle$ et $g^*(z) + g(x) = \langle x,z\rangle$. D'où

$$f^*(t) + g^*(z) = \langle x,y\rangle - f(x) - g(x) \leq (f+g)^*(y) = (f^*\nabla g^*)(y),$$

ce qui montre l'exactitude de $f^*\nabla g^*$ en y.

Si $(f+g)^*(y) = +\infty$ alors $(f^*\nabla g^*)(y) = +\infty$, ce qui montre encore l'exactitude de $f^*\nabla g^*$ en y.

ii) On a toujours $\partial f(x)+\partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$. Soit maintenant $y \in (f+g)(x)$, il existe d'après i) t et z dans Y tels que $y = t+z$ et $(f^*\nabla g^*)(y) = f^*(t)+g^*(z)$. Comme $(f^*\nabla g^*)(y) = (f+g)^*(y)$ et $(f+g)^*(y)+f(x)+g(x) = \langle x,y\rangle$ alors

$$f^*(t)+f(x) \leq \langle t,x\rangle \quad \text{et} \quad g^*(z)+g(x) \leq \langle z,x\rangle.$$

D'où, $t \in \partial f(x)$ et $z \in \partial g(x)$. Par suite, $y = t+z \in \partial f(x)+\partial g(x)$. ■

Remarque. Le résultat du corollaire précédent n'est plus vrai si on a seulement:

$$\mathrm{Dom}\,(f+g) = \bigcup_{x\in \mathrm{Dom}\, f\cap \mathrm{Dom}\, g} [\partial(f+g)(x)].$$

En effet, soient $X = \mathbf{R}^2$ et f, g les fonctions définies par:

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} -\sqrt{x_1x_2}, & \text{si } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \\ +\infty, & \text{si non} \end{cases} \qquad g(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_1 = 0 \\ +\infty, & \text{si non} \end{cases}$$

On vérifie aisément que $(fg)^* = \delta\{(t,z) \mid z \leq)\}$ et $f^*\nabla g^* = \delta\{(t,z) \mid z \leq)\}$ est non sci en $(0,0)$ cependant $\mathrm{Dom}\,(f+g)^* = \bigcup_{x_2\geq 0} [\partial(f+g)(0), x_2] = R\times]-\infty, 0]$.

On se propose maintenant de donner une propriété d'approximation de l' ensemble des points où $f^*\nabla g^*$ est sci. Pour cela introduisons la notation suivante:

$$SCI(f^*\nabla g^*) = \bigcap_{\varepsilon\downarrow 0} \bigcup_{x\in \mathrm{Dom}\, f\cap \mathrm{Dom}\, g} [\partial_\varepsilon f(x)+\partial_\varepsilon g(x)].$$

Un raisonnement analogue à celui qui est utilisé dans la preuve de l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) du Théorème 4.1 montre que $SCI(f^*\nabla g^*)$ est l'ensemble des points du domaine de $(f+g)^*$ où $f^*\nabla g^*$ est semi-continue inférieurement. En général cet ensemble n'est ni convexe ni fermé, cependant il admet la propriété d'approximation suivante:

4.3. THÉORÈME. *Soit X un espace de Banach de dual topologique $Y = X'$ et soient $f, g \in \Gamma_0(X)$ telles que $SCI(f^*\nabla g^*)$ soit non vide. Alors pour tout $z^* \in SCI(f^*\nabla g^*)$ et tout $n \in N$, il existe $x_n \in \mathrm{Dom}\, f$, $y_n \in \mathrm{Dom}\, g$ et $z_n^* \in X'$ tels que:*

i) $z_n^* \in \partial f(x_n)+\partial g(y_n)$. ii) $\|x_n - y_n\| \to 0$ et $\|z_n^* - z^*\| \to 0$ quand $n \to \infty$.

iii) Si de plus $X = R^p$ et si $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence x vérifiant les propriétés suivantes:

a) $\partial f(x)$ et $\partial g(x)$ sont non vides;

b) Il existe un couple $(u^*, v^*) \in \partial f(x)\times\partial g(x)$ et une suite $(u_n^*, v_n^*) \in \partial g(x)$ telle que $(u_n^*, v_n^*) \to (u^*, v^*)$ quand $n \to \infty$;

c) $N(x, \mathrm{Dom}\, f) \cap -N(x, \mathrm{Dom}\, g) = \{0\}$,

alors $f^*\nabla g^*$ *est exacte en* z^*.

4.4. LEMME [**8**] *Soient* X *un espace de Banach de dual topologique* X' *et* $f \in \Gamma_0(X)$. *Soient* $x \in X$, $\varepsilon > 0$ *et* $x' \in \partial_\varepsilon f(x)$. *Alors, pour tout* $\lambda > 0$, *il existe* $x_\lambda \in X$ *et* $x'_\lambda \in \partial f(x)$ *tels que:* $\|x_\lambda - x\| \leq \lambda$ *et* $\|x'_\lambda - x'\| \leq \varepsilon/\lambda$.

Preuve du théorème 4.3. i) Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de nombres positifs qui converge vers 0 et soit $z^* \in SCI(f^*\nabla g^*)$. Alors pour tout $n \in N$, il existe $a_n \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$, $u_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(a_n)$ et $v_n \in \partial_{\varepsilon_n} g(a_n)$ tels que $z^* = u_n + v_n$ et d'après le lemme 4.4, il existe $b_n \in X$, $c_n \in X$, $r_n \in \partial f(b_n)$ et $t_n \in \partial g(c_n)$ tels que:

$$\|r_n - u_n\| \leq \sqrt{\varepsilon_n}, \ \ \|a_n - b_n\| \leq \sqrt{\varepsilon_n}, \ \ \|t_n - v_n\| \leq \sqrt{\varepsilon_n}, \ \ \|c_n - a_n\| \leq \sqrt{\varepsilon_n},$$

D' où $\|b_n - c_n\| \leq 2\sqrt{\varepsilon_n}$ et $\|r_n + t_n - z^*\| \leq 2\sqrt{\varepsilon_n}$. Posons alors, $z_n^* = r_n + t_n$, $x_n = b_n$ et $y_n = c_n$. Ainsi, $z_n^* \in \partial f(x_n) + \partial g(y_n)$ et $\|x_n - y_n\| \to 0$, $\|z_n^* - z^*\| \to 0$ quand $n \to \infty$ i.e. i) et ii).

iii) La démonstration de ce point se fait en plusieurs étapes:

Etape 1:

$$0^+[\partial f(x)] \cap -0^+[\partial g(x)] = 0 \tag{4.1.}$$

En effet, d'après a) et [**10**, Coroll. 8.7] nous avons

$$\begin{aligned} N(x, \mathrm{Dom}\, f) &= \{x^* \mid \langle x^*, t - x\rangle \leq 0 \forall t \in \mathrm{Dom}\, f\} = \{x^* \mid (f^* - \langle ., x\rangle)0^+(x^*) \leq 0\} \\ &= 0^+\{x^* \mid f^*(x^*) - \langle x^*, x\rangle \leq -f(x)\} = 0^+[\partial f(x)]. \end{aligned}$$

De la même façon on démontre que $N(x, \mathrm{Dom}\, g) = 0^+[\partial g(x)]$. Ainsi, la condition c) est équivalente à la condition (4.1).

Etape 2: Pour toute suite $(C_n)_n$ de sous-ensembles de R^p notons $\overline{\lim}\, C_n$ l'ensemble: $\overline{\lim}\, C_n = \{x \in R^p \mid \exists (n_k)_k$ une sous-suite, $\exists (x_k)_k, x_k \in C_{n_k}$ et $x_k \to x\}$. Si la suite $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence x, on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que $(x_n, y_n) \to (x, x)$. On vérifie aisément que $\overline{\lim}\, \partial f(x_n) \subseteq \partial f(x)$, $\overline{\lim}\, \partial g(x_n) \subseteq \partial g(x)$. Par suite

$$\overline{\lim}\, \partial f(x_n) \times \partial g(y_n) \subseteq \partial f(x) \times \partial g(x). \tag{4.2}$$

Soient pour tout $n \in N$, $D_n = \partial f(x_n) \times \partial g(y_n)$ et $r_n = (u_n^*, v_n^*)$ la suite de b). Notons $D = \partial f(x) g(x)$ et $r^* = (u^*, v^*)$.

Etape 3: Montrons que $\overline{\lim}\, AD_n \subseteq AD$ où A désigne l'application linéaire définie par $A : (x, y) \in R^p \times R^p \to x + y$. Pour cela on va s'inspirer de la démonstration du théorème 3 [**7**]: Soit $t \in \overline{\lim}\, AD_n$, il existe alors une suite $(t_k)_k$ telle que

$$t_k = Aw_k, \quad w_k \in D_{n_k} \text{ et } t_k \to t. \tag{4.3}$$

Si la suite $(w_k)_k$ n'est pas bornée on peut supposer que $\|w_k\| \to +\infty$ et $w_k/\|w_k\| \to a$ quand $n \to +\infty$. Soit α un réel positif tel que $\sup \|r_{n_k}\| < \alpha$. Pour tout $\lambda > 0$, il existe $k_0 \in N$ tel que $\|w_k\| > \alpha + \lambda$ dès que $k > k_0$. Il en résulte que $0 < \lambda < \|w_k - r_{n_k}\|$ pour tout $k \geq k_0$. Comme D_{n_k} est convexe alors:

$$r_{n_k} + \lambda \frac{w_k - r_{n_k}}{\|w_k - r_{n_k}\|} \in D_{n_k}. \tag{4.4}$$

D'autre part nous avons $(w_k - r_{n_k})/\|w_k - r_{n_k}\| \to a$ par le lemme 1 [**7**]; et par (4.2) et (4.4) on obtient $r^* + \lambda \in D$. Par suite $a \in 0^+D$. Comme $\|w_k\|A(w_k/\|w_k\|) \to t$, $\|w_k\| \to +\infty$ et $w_k/\|w_k\| \to a$ alors $A(a) = 0$. Ainsi, $a \in \operatorname{Ker} A \cap 0^+D$. En utilisant (4.1), on vérifie aisément que cette dernière intersection est réduite à 0 et donc $a = 0$. Mais ceci est absurde car $\|a\| = 1$. La suite $(w_k)_k$ est donc bornée. Elle admet une sous-suite $(w_{k_p})_p$ qui converge vers un élément w de D en vertu de (4.2). Par suite $Aw_{k_p} \to Aw = t \in AD$.

Etape 4: $f^*\nabla g^*$ est exacte en z^*. En effet, nous avons $z_n^* \in AD_n$ et $z_n^* \to z^*$ d'après i) et ii) et $z^* \in AD = \partial f(x) + \partial g(x)$ d'après l'étape 3. Par conséquent $f^*\nabla g^*$ est exacte en z^* d'après la preuve de i) du corollaire 4.2, ce qui achève la démonstration. ■

4.5. COROLLAIRE. *Soient X un espace de Banach et f et g deux fonctions de $\Gamma_0(X)$ telles que $f + g$ n'est pas identiquement égale à $+*$ et $f^*\nabla g^* \in \Gamma_0(X)$. Alors:* $A_\eta = \bigcup_{\|x-y\|<\eta} [\partial f(x) + \partial g(y)]$ *est dense dans* $\operatorname{Dom}(f+g)^*$ *pour tout* $\eta > 0$.

Preuve. D'après le théorème 4.1, nous avons $SCI(f^*\nabla g^*) = \operatorname{Dom}(f+g)^*$. Comme de plus $A_\eta \subset \operatorname{Dom}(f+g)^*$, le théorème 4.3 permet alors de conclure. ■

REFERENCES

[1] H. Attouch, H. Brezis, *Duality for the sum of convex functions in general Banach spaces*, Publications AVAMAC, Perpignan, 84, 10. Av. (1984).

[2] N. Bourbaki, *Elements de mathématiques. Espaces vectoriels topologiques. Chap. I et II. Fascicule XV*, Hermann, Paris, 1966.

[3] I. Ekeland, R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris, 1974.

[4] J.L. Joly, *Une famille de topologies et de convergences sur l' ensemble des fonctionnelles convexes*, Thèse d'Etat, Université de Grenoble, 1970.

[5] P.J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972.

[6] B. Martinet, *Algorithmes pour la résolution de problèmes d'optimisation et de minimax*, Thèse d'Etat, Université de Grenoble, 1972.

[7] L. McLinden, R. Bergstrom, *Preservation of convergence of convex sets and functions in finite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **268** (1981), 127–142.

[8] J.J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les E.D.P. Collège de France, Paris, 1967.

[9] R.T. Rockafellar, *Monotone operator and proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[10] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

Facultés Universitaires
Notre-Dame de La Paix
8, Rempart de la Vièrge
5000-Namur, Belgique

(Received 08 06 1995)
(Revised 14 05 1996)