PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 71(85) (2002), 123–132

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ШКАЛЕ ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИХСЯ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛОВ

**В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов
и Б. И. Завьялов**

Резюме. В работе приведены тауберовы теоремы нового типа. В этых теоремах указаны достаточные условия, при которых обобщенная функция, принимающая значения в локально выпуклом пространстве, на самом деле принимает значения в более узком банаховом пространстве. При этом естественной асимптотической шкалой служит семейство автомодельных функционалов. Эти теоремы применены для изучения асимптотических свойств решения задачи Коши для уравнений теплопроводности.

Тауберова теория интенсивно развивалась в первой половине прошлого века и ее результаты подытожены в монографиях [7–8]. Следует отметить существенный вклад внесенный И. Карамата в эту теорию. Он ввел и исследовал новую, более широкую чем степенная, асимптотическую шкалу правильно меняющихся функций, см. [1], которая нашла широкое применение и до сих пор используется в различных областях математики, см., например, [9–13]. Кроме того, И. Карамата развил и улучшил методы Харди–Литтлвуда и Винера в тауберовой теории [2–4], доказав при этом ряд тауберовых теорем, см., например, [5], которые и сейчас применяются в математической физике и теории вероятностей [11], [14,15].

Потребности современной математики, особенно математической физики, потребовали создания тауберовой теории для обобщенных функций, не только одной, но и многих переменных, включая обобщенные функции со значениями в функциональных топологических пространствах, и дальнейшего расширения асимптотической шкалы. Исследования в этом направлении велись в отделе

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 46F12; Secondary 44A10, 40E05.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 02–01–00076 и 00–15–96073

Математической физики в Математическом институте им. В. А. Стеклова, начиная с известной пионерской работы Н. Н. Боголюбова, В. С. Владимирова и А. Н. Тавхелидзе (1972 г.) по теоретическому обьяснению наблюдаемого на эксперименте автомодельного поведения величин, описывающих глубоко – неупругое лептон – нуклонное рассеяние в рамках аксиоматической квантовой теории поля [17].

Некоторые из результатов этой деятельности, в том числе и полученных в последние годы [16], излагаются в настоящей статье.

Напомним некоторые факты из теории обобщенных функций.

Стандартное пространство Соболева–Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций обозначаем как обычно через $\mathcal{S}$, так что $\mathcal{S}'$ – пространство обобщенных функций медленного роста. Пространство обобщенных функций медленного роста с носителями на $[0, +\infty)$ обозначается через $\mathcal{S}'_+$. Через $\mathcal{D}$ обозначаем пространство основных функций (бесконечно дифференциируемых с компактным носителем), а $\mathcal{D}'$ – пространство обобщенных функций (пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}$). Значение обобщенной функции f на основной функции φ обозначаем (f, φ), а ее стандартное усреднение с этой функцией

$$L_f^{\varphi}(x, y) = \Big(f(\xi), \frac{1}{y}\varphi\Big(\frac{\xi - x}{y}\Big)\Big). \tag{1}$$

Как обычно, $\widetilde{f}$ есть преобразование Фурье f.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ – произвольные локально выпуклые топологические пространства. Через $\mathbb{L}(\mathcal{F} \to \mathcal{L})$ обозначаем пространство всех линейных непрерывных отображений из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{L}$. В частности, $\mathcal{S}' = \mathbb{L}(\mathcal{S} \to \mathbb{C})$. Если $\mathcal{L}$ – произвольное локально выпуклое пространство, то пространство $\mathbb{L}(\mathcal{S} \to \mathcal{L})$ можно трактовать как пространство обобщенных функций над $\mathcal{S}$ со значениями в $\mathcal{L}$.

Пусть $\rho(k)$, $k > 0$ *правильно меняющаяся* функция (см. [1]). Будем говорить, что обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'$ обладает *квазиасимптотикой* относительно функции $\rho(k)$, если существует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\rho(k)}\,(f(kt), \varphi(t)) = c_\varphi, \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}, \tag{2}$$

Если при любых $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\frac{1}{\rho(k)}\,(f(kt), \varphi(t)) = \mathrm{O}(1) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho(k)}\Big(f\Big(\frac{t}{k}\Big), \varphi(t)\Big) = \mathrm{O}(1), \quad k \to +\infty, \tag{3}$$

то говорят, что f *квазиасимптотически ограничена* относительно $\rho(k)$ на бесконечности или в нуле (соответственно).

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'_+$, тогда ее преобразование Лапласа

$$\widetilde{f}(z) = \big(f(\xi), e^{iz\xi}\big)$$

— аналитическая функция в верхней полуплоскости ($z = x+iy$, $y > 0$), удовлетворяющая оценке:

$$|\widetilde{f}(x,y)| \leqslant \frac{C}{y^b}(1+|x|)^a \tag{4}$$

с некоторыми a, b и C. Имеет место следующая, полезная в приложениях, теорема (см. [9]).

Теорема 1. *Пусть обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'_+$. Тогда она квазиасимптотически ограничена на бесконечности относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$, то есть*

$$\Big|\frac{1}{\rho(k)}(f(kt),\varphi(t))\Big| < C_\varphi, \quad k > 1,\ \forall\varphi \in \mathcal{S}, \tag{5}$$

в том и только в том случае, если

$$\frac{1}{k\rho(k)}\Big|\widetilde{f}\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\right)\Big| \leqslant \frac{C}{y^b}, \quad x^2+y^2=1,\ y>0,\ k>1 \tag{6}$$

для некоторых C и b.

Отметим, что если на f наложено добавочное *тауберово* условие (например, f есть положительная мера, как в теореме Харди–Литтлвуда, или $\widetilde{f}(z)$ имеет неотрицательную мнимую часть, см. [9]), то условие (6) упрощается и принимает вид

$$\Big|\frac{y}{\rho(1/y)}\widetilde{f}(y)\Big| < C, \quad 0 < y < 1. \tag{7}$$

Многомерный вариант теоремы Харди–Литтлвуда впервые доказан в работе [6], а многомерный вариант теоремы 1 можно найти в [9]. Там же приведен ряд приложений этих и других тауберовых теорем в различных областях математики.

Переформулируем теорему 1 в несколько другом виде.

Теорема 1$'$. *Пусть $f \in \mathcal{S}'$, причем*

$$\widetilde{f}(t) \in \mathcal{S}'_+, \tag{8}$$

и функция $e \in \mathcal{S}$ такова, что

$$\widetilde{e}(t) = e^{-t}, \quad \text{при } t \geqslant 0. \tag{9}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) *$f(x)$ квазиасимптотически ограничена в нуле относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$, то есть*

$$\frac{1}{\rho(k)}\left|\left(f\left(\frac{x}{k}\right),\varphi(x)\right)\right| < C_\varphi, \quad k>1, \quad \forall\varphi\in\mathcal{S};$$

(2)

$$\frac{1}{\rho(k)}\left|L_f^e\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\right)\right| \leqslant \frac{C}{y^b} \quad \text{при } x^2+y^2=1,\ y>0,\ k>1$$

для некоторых C и b.

В этой формулировке условия (8) и (9) выглядят весьма обременительными (они и только они содержат преобразование Фурье). Как будет показано далее они являются излишними.

На самом деле эти и другие сходные проблемы могут быть рассмотрены с более общей позиции, где квазиасимптотические и другие свойства рассматриваемых функций описываются в терминах принадлежности некоторым банаховым пространствам.

Пусть f – обобщенная функция из $\mathcal{S}'$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, то есть линейное непрерывное отображение из $\mathcal{S}$ в $\mathbb{B}$ ($f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \to \mathbb{B})$). Рассмотрим ее стандартное усреднение $L_f^\varphi(x,y) \in \mathbb{B}$ с некоторым фиксированным ядром $\varphi \in \mathcal{S}$. Для него справедлива оценка, называемая *общей оценкой класса*,

$$\|L_f^\varphi(x,y)\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{C}{y^b}(1+|x|)^a, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \tag{10}$$

с некоторыми a, b и C. Пусть $\mathbb{B}$ вложено в некоторое локально выпуклое топологическое пространство $\mathcal{L}$ и f есть линейное непрерывное отображение из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{L}$, то есть $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \to \mathcal{L})$. Тогда условие (10) можно рассматривать как необходимое условие принадлежности f классу $\mathbb{L}(\mathcal{S} \to \mathbb{B})$. Представляет интерес выяснить насколько это условие является достаточным. В какой то мере ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{B}$ – банахово и $\mathcal{L}$ – локально выпуклое пространства, причем $\mathbb{B}$ вложено в $\mathcal{L}$ линейно и непрерывно. Пусть далее $f \in \mathbb{L}\big(\mathcal{S} \to \mathcal{L}\big)$, $\omega \in \mathcal{S}$, причем $\int \omega(\xi)d\xi \neq 0$, и пусть $L_f^\omega(x,y)$ – измеримая при $(x,y) \in \mathbb{R}^1 \times (0,1]$ функция со значениями в $\mathbb{B}$ и существуют a, b и C, такие что*

$$\sup_{y<1} y^b \big\|L_f^\omega(x,y)\big\|_{\mathbb{B}} \leqslant C(1+|x|)^a, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Тогда $(f(\xi), \varphi(\xi)) \in \mathbb{B}$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Замечание. Теорема останется справедливой, если пространство $\mathcal{S}$ заменить на пространство $\mathcal{D}$. При этом следует только условие (11) заменить на условие: для любого d существуют b и C, такие что

$$\sup_{0<y\leqslant 1} y^b \|L_f^\omega(x,y)\|_{\mathbb{B}} \leqslant C \qquad \text{при} \quad |x| < d. \tag{12}$$

Заметим, что условие измеримости в теореме не является экзотическим. Существуют простые примеры неизмеримых функций со значениями в банаховых пространствах.

С помощью теоремы 2 нетрудно доказать следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы 1, о которой говорилось выше.

Теорема 3. *Пусть $\rho(k)$ правильно меняющаяся функция, $\mathbb{B}$ банахово пространство и $\omega \in \mathcal{S}$, причем $\int \omega(\xi)d\xi \neq 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *f квазиасимптотически ограничена в нуле относительно ρ, то есть*

$$\sup_{k\geqslant 1} \frac{1}{\rho(k)} \Big\| \Big(f\Big(\frac{\xi}{k}\Big), \varphi(\xi) \Big) \Big\|_{\mathbb{B}} < \infty, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}; \tag{13}$$

(2) *существуют A и d такие, что*

$$\sup_{k\geqslant 1}\frac{1}{\rho(k)}\Big\|L_f^{\omega}\Big(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\Big)\Big\|_{\mathbb{B}}\leqslant\frac{A}{y^d},\qquad \textit{при } x^2+y^2=1, y>0. \tag{14}$$

Отметим, что оценки (13) и (14) можно переписать в виде

$$\mathbb{J}_\rho^\infty\Big(\Big\|\Big(f\Big(\frac{\xi}{k}\Big),\varphi(\xi)\Big)\Big\|_{\mathbb{B}}\Big)<\infty,\qquad \forall\varphi\in\mathcal{S},$$

$$\mathbb{J}_\rho^\infty\Big(\Big\|L_f^{\omega}\Big(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\Big)\Big\|_{\mathbb{B}}\Big)\leqslant\frac{A}{y^d},\qquad \text{при } x^2+y^2=1,\ \ y>0.$$

где $\mathbb{J}_\rho^\infty(\cdot)$ – функционал, определенный на множестве неотрицательных измеримых функций и задаваемый формулой $\mathbb{J}_\rho^\infty(\cdot)=\sup_{k\geqslant 1}(1/\rho(k)\cdot)$. Для приложений весьма важно наряду с $\mathbb{J}_\rho^\infty$ рассматривать и другие функционалы. Для этой цели мы вводим специальный класс функционалов, который называем *автомодельными*. Он является естественной асимптотической шкалой для этого круга задач и включает в себя стандартные функционалы типа норм пространств L^p с правильно меняющимися весами.

Автомодельные функционалы. Пространство измеримых неотрицательных функций на положительной полуоси обозначаем $\mathcal{M}_+$. Пусть $\mathbb{J}\,(\varphi(k))$ –функционал на $\mathcal{M}_+$ со значениями в $[0,+\infty)$, причем его носитель принадлежит $[1,+\infty)$ со значениями в $[0,+\infty]$. Пусть этот функционал принимает конечные значения на ограниченных измеримых функциях с компактным носителем. Предположим, что он обладает свойствами:

(1) справедливо обобщенное неравенство треугольника:

$$\mathbb{J}\left(\int\varphi(k,y)dy\right)\leqslant\int\mathbb{J}\,(\varphi(k,y))\,dy,$$

для любой неотрицательной измеримой по (k,y) функции $\varphi(k,y)$;

(2) однородность: $\mathbb{J}(\lambda\varphi)=\lambda\mathbb{J}(\varphi),\quad\lambda\geqslant 0$;

(3) монотонность: если $\varphi_1(k)\leqslant\varphi_2(k)$ почти всюду, то $\mathbb{J}(\varphi_1)\leqslant\mathbb{J}(\varphi_2)$;

(4) если $\varphi_n(k)\nearrow\varphi(k)$ п.в., то $\mathbb{J}(\varphi_n)\longrightarrow\mathbb{J}(\varphi)$, $n\to\infty$;

(5) существует α, такое что для любого $\varepsilon>0$ существует постоянная C_ε такая, что

$$\mathbb{J}(\varphi(\varkappa k))\leqslant\begin{cases}C_\varepsilon\varkappa^{\alpha+\varepsilon}\mathbb{J}(\varphi(k)), & \text{если } \varkappa\geqslant 1\\ C_\varepsilon\varkappa^{\alpha-\varepsilon}\mathbb{J}(\varphi(k)), & \text{если } \varkappa<1,\end{cases}$$

для любой φ из $\mathcal{M}_+$ с носителем в $[1,+\infty)$.

Нетривиальные функционалы, удовлетворяющие аксиомам (1)–(5) называем *автомодельными* функционалами порядка α.

На практике проверка обобщенного неравенства треугольника иногда бывает затруднительной, значительно проще проверить само неравенство треугольника. Поэтому представляет интерес найти условия при которых из обычной выпуклости функционала вытекало бы обобщенное неравенство треугольника для него.

Пусть для функционала $\mathbb{J}(\varphi)$ выполнены все аксиомы автомодельного функ-ци-онала кроме аксиомы (1), а вместо нее выполняется ослабленное условие:

$$\mathbb{J}(\varphi_1+\varphi_2) \leqslant \mathbb{J}(\varphi_1)+\mathbb{J}(\varphi_2), \quad \varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{M}_+. \tag{1'}$$

Будем говорить, что функционал $\mathbb{J}(\varphi)$, для которого выполнены условия (1′), (2)–(5) удовлетворяет *теореме Лебега*, если из того, что $\varphi_n(k) \to \varphi(k)$, $n \to +\infty$, п.в. и существует $\varphi_0(k)$ такая, что $\varphi_n(k) \leqslant \varphi_0(k)$, $\mathbb{J}(\varphi_0(k)) < \infty$, следует, что

$$\mathbb{J}\left(\varphi_n(k)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{J}(\varphi(k)).$$

Нетрудно доказать, что справедливо следующее

Утверждение 1. *Пусть функционал $\mathbb{J}(\varphi)$ со свойствами* (1′), (2)–(5), *удовлетворяет теореме Лебега. Тогда $\mathbb{J}$ – автомодельный функционал.*

Примеры. Для $1 \leqslant p < \infty$ положим:

$$\mathbb{J}^p(\varphi) = \left(\int_1^\infty \varphi^p(k)\frac{dk}{k}\right)^{1/p}, \qquad \mathbb{J}^\infty(\varphi) = \operatorname*{ess\,sup}_{k>1}\varphi(k). \tag{15}$$

Это автомодельные функционалы порядка $\alpha = 0$. Функционалы $\mathbb{J}^p(\varphi)$ при $1 \leqslant p < \infty$ удовлетворяют теореме Лебега. Функционал $\mathbb{J}^\infty(\varphi)$ не удовлетворяет теореме Лебега, но тем не менее для него выполняется обобщенное неравенство треугольника.

Приведем некоторые свойства автомодельных функционалов. Непосредственно из аксиомы (5) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует C_ε, так что

$$\frac{1}{C_\varepsilon}\varkappa^{\alpha\mp\varepsilon}\mathbb{J}(\varphi(k)) \leqslant \mathbb{J}(\varphi(\varkappa k)), \quad \text{если } \operatorname{supp}\varphi \subset [\varkappa,+\infty).$$

Здесь берется знак $-$, если $\varkappa \geqslant 1$, и $+$, если $\varkappa < 1$. В частности, если $\varkappa < 1$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [1,+\infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует C_ε, так что

$$\frac{1}{C_\varepsilon}\varkappa^{\alpha+\varepsilon}\mathbb{J}(\varphi(k)) \leqslant \mathbb{J}(\varphi(\varkappa k)) \leqslant C_\varepsilon\varkappa^{\alpha-\varepsilon}\mathbb{J}(\varphi(k)).$$

Отсюда следует, что порядок автомодельности функционала α определяется однозначно.

Отметим, что если $\varkappa \geqslant 1$, то (5) выполняется для любой $\varphi \in \mathcal{M}_+$.

Как следствие аксиом (3) и (4) справедлив следующий аналог теоремы Фату:

Утверждение 2. *Пусть* $\varphi_n \in \mathcal{M}_+$ *и* $\varphi_n(k) \longrightarrow \varphi(k)$, $n \to +\infty$, *почти всюду, тогда* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{J}(\varphi_n) \geqslant \mathbb{J}(\varphi)$.

Утверждение 3. *Пусть* $\rho(k)$ *правильно меняющаяся функция порядка* β, *а* $\mathbb{J}(\varphi(k))$ *автомодельный функционал порядка* α. *Положим* $\mathbb{J}_1(\varphi(k)) = \mathbb{J}\left(\frac{1}{\rho(k)}\varphi(k)\right)$. *Тогда* $\mathbb{J}_1$ – *автомодельный функционал порядка* $\alpha+\beta$.

Для автомодельных функционалов справедливы неравенства типа Харди.

Утверждение 4. *Пусть* $\mathbb{J}(\varphi)$ *автомодельный функционал порядка* α. *Тогда существует постоянная* C, *такая что*

$$C\mathbb{J}(\varphi(k)) \geqslant \begin{cases} \mathbb{J}\left(\int\limits_k^{+\infty} \varphi(\varkappa)\frac{d\varkappa}{\varkappa}\right), & \text{при } \alpha < 0\\ \mathbb{J}\left(\int\limits_1^{k} \varphi(\varkappa)\frac{d\varkappa}{\varkappa}\right), & \text{при } \alpha > 0, \end{cases}$$

для любой $\varphi \in \mathcal{M}_+$.

Утверждение 5. *Пусть* $\mathbb{J}(\varphi)$ – *автомодельный функционал порядка* α. *Тогда для любой* $\varphi \in \mathcal{M}_+$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют постоянные* C *и* c *такие, что*

$$c\mathbb{J}^1\Big(\frac{\varphi(k)}{k^{\alpha+\varepsilon}}\Big) \leqslant \mathbb{J}(\varphi(k)) \leqslant C\mathbb{J}^\infty\Big(\frac{\varphi(k)}{k^{\alpha-\varepsilon}}\Big). \tag{16}$$

Наряду с автомодельными функционалами $\mathbb{J}$ удобно рассматривать, соответствующий ему функционал $\widehat{\mathbb{J}}$, а именно, пусть $\mathbb{J}(\varphi(k))$ –автомодельный функционал. Тогда для любой $\psi(y) \in \mathcal{M}_+$ положим

$$\widehat{\mathbb{J}}(\psi(y)) = \mathbb{J}(\psi(1/k)). \tag{17}$$

Очевидно, что $\widehat{\mathbb{J}}$ сосредоточен на интервале $(0,1)$, то есть $\widehat{\mathbb{J}}(\psi) = 0$, если $\operatorname{supp}\psi \subset [1,+\infty)$.

Замечание. Если порядок автомодельного функционала $\mathbb{J}$ больше нуля, то из (16) следует, что $\mathbb{J}(1/k^j) < \infty$ при $j \geqslant 0$.

Для приложений представляет интерес рассмотреть следующие варианты теоремы 3, которые также нетрудно доказываются с помощью теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть* ρ *правильно меняющаяся функция,* $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \to \mathbb{B})$, *где* $\mathbb{B}$ *банахово пространство,* $\omega \in \mathcal{S}$, $\int \omega(\xi)d\xi \neq 0$ *и выполнены условия:*

(1) *в* $\mathbb{B}$ *существует*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^\omega\Big(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\Big) = c(x,y) \quad \text{при } (x,y) \in \mathbb{R}\times(0,1]; \tag{18}$$

(2) *существуют* A *и* b, *такие что*

$$\sup_{k\geqslant 1} \frac{1}{\rho(k)} \Big\| L_f^\omega\Big(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\Big)\Big\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{A}{y^b} \quad \text{при } x^2+y^2 = 1. \tag{19}$$

Тогда $f(\xi)$ обладает квазиасимптотикой в нуле относительно $\rho(k)$, то есть для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ существует элемент $c_\varphi \in \mathbb{B}$ такой, что в $\mathbb{B}$ существует

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho(k)}\Big(f\Big(\frac{\xi}{k}\Big), \varphi(\xi)\Big) = c_\varphi. \tag{20}$$

Замечание. Теорема останется справедливой, если всюду в $L_f^\omega(\frac{x}{k}, \frac{y}{k})$ и $f(\frac{\xi}{k})$ заменить k на $\frac{1}{k}$, то есть на случай квазиасимптотики на бесконечности.

Для сдвигов справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть ρ правильно меняющаяся функция, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \to \mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ банахово пространство, $\omega \in \mathcal{S}$, $\int \omega(\xi)d\xi \neq 0$ и выполнены условия:*

(1) *в $\mathbb{B}$ существует*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho(k)}\Big(f(\xi+k), \omega\Big(\frac{\xi}{y}\Big)\Big) = c(y), \quad y \in (0,1]; \tag{21}$$

(2) *существуют A и b, такие что*

$$\sup_{k\geqslant 1} \frac{1}{\rho(k)}\Big\|\Big(f(\xi+k), \omega\Big(\frac{\xi}{y}\Big)\Big)\Big\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{A}{y^b}, \quad y \in (0,1). \tag{22}$$

Тогда $f(\xi)$ обладает асимптотикой по сдвигам относительно $\rho(k)$, то есть для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ существует элемент $c_\varphi \in \mathbb{B}$ такой, что в $\mathbb{B}$ существует

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho(k)}(f(\xi+k), \varphi(\xi)) = c_\varphi. \tag{23}$$

Замечание. В условиях теоремы необходимо $c(y) = yc$, где $c \in \mathbb{B}$, а $c_\varphi = c\int \varphi(\xi)d\xi$.

Полученные выше теоремы применяются для изучения асимптотических свойств решений обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \lim_{t\to+0} u(x,t) = f(x)(\text{в}\,\mathcal{S}'), \quad f \in \mathcal{S}', \end{gathered} \tag{24}$$

в классе не более, чем полиномиально растущих при приближении к границе функций, то есть

$$|u(x,t)| < C\frac{1}{t^b}(|x|^N + |t|^N + 1)$$

для некоторых b, C и N, зависящих от u. Как известно, в этом классе существует единственное решение задачи (24), даваемое формулой

$$u(x,t) = \left(f(\xi), \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x-\xi)^2/4t}\right) \equiv L_f^\omega(x,y), \tag{25}$$

где $\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2}$ и $y = \sqrt{2t}$.

Теорема 6. *Пусть ρ правильно меняющаяся функция. Для того чтобы начальная функция $f \in \mathcal{S}'$ задачи* (24) *обладала квазиасимптотикой на бесконечности относительно ρ, то есть*

$$\frac{1}{\rho(k)}\left(f(k\xi), \varphi(\xi)\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} c_\varphi, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S},$$

необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (24) *удовлетворяло условиям:*

(1) *существует предел*

$$\frac{1}{\rho(k)}u(kx, k^2t) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} u_0(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0;$$

(2) *существуют A и d, такие что*

$$\left|\frac{1}{\rho(k)}u(kx, k^2t)\right| \leqslant \frac{A}{t^d} \quad \text{при } x^2 + t^2 = 1.$$

Теорема 7. *Пусть ρ правильно меняющаяся функция. Для того чтобы начальная функция $f \in \mathcal{S}'$ задачи* (24) *обладала асимптотикой по сдвигам на $+\infty$ относительно ρ, то есть*

$$\frac{1}{\rho(k)}\left(f(\xi + k), \varphi(\xi)\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} c_\varphi, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S},$$

необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (24) *удовлетворяло условиям:*

(1) *существует предел*

$$\frac{1}{\rho(x)}u(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} c(t), \quad t > 0;$$

(2) *найдутся A и d, такие что*

$$\left|\frac{1}{\rho(x)}u(x,t)\right| \leqslant \frac{A}{t^d} \quad \text{при } x > 1,\ 0 < t < 1.$$

Доказательство теорем 6 и 7 непосредственно вытекает из теорем 4 и 5 соответственно.

Литература

1. J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj) **4** (1930), 38–53.
2. J. Karamata, *Sur certains "Tauberian theorems" de M. Hardy et Littlewood*, Mathematica (Cluj) **3** (1930), 33–48.
3. J. Karamata, *Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian Sätze*, Math. Zeitshrift **33** (1931), 294–299.
4. J. Karamata, *Neuer Beweis und Verallgemeinerung Tauberian Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen*, J. Reine Angewandte Math. **164** (1931), 27–39.
5. J. Karamata, *Weiterführung der N. Wienerschen Methode*, Math. Zeitschrift **38** (1934), 701–708.
6. В. С. Владимиров, *Многомерное обобщение тауберовой теоремы Харди–Литтлвуда*, Известия АН СССР, сер. мат. **40**:1 (1976), 1084–1101.
7. Г. Харди, *Рашодящиеся ряды*, ИЛ, Москва, 1951.
8. А. Г. Постников, *Тауберова теория и ее применения*, Труды МИАН **144** (1979).
9. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщвнных функций*, Наука, Москва, 1986.
10. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge Univ. Press., 1989.
11. В. Феллер, *Введение в теорию вероятности и ее приложения, 2*, МИР, Москва, 1984.
12. Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Теоремы тауберова типа для обобщенной мультипликативной свертки*, Известия РАН, сер. мат. **64**:1 (2000), 37–94.
13. Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Тауберова теорема типа Винера для обобщенных функций медленного роста*, Матем. Сб. **189**:7 (1998), 91–130.
14. Л. А. Муравей, *О стабилизации решений возмущенного волнового уравнения*, ДАН СССР **284**:1 (1985), 43–47.
15. А. В. Филиновский, *О стабилизации решений внешней краевой задачи Дирихле для уравнений колебаний пластины*, Мат. Заметки **39**:4 (1986), 586–596.
16. Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах*, Известия РАН, сер. мат. **66**:4 (2002), 47–118.
17. Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, А. Н. Тавхелидзе, *Об автомодельной асимптотике в квантовой теории поля, II*, Теор. Мат. Физ. **12**:3 (1972), 305–330.

Математический институт
им. В.А. Стеклова РАН
Москва
Россия

drozzin@mi.ras.ru