PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 51 Fasc. 2 – 1994

SUR UN THEOREME DE P.E. SCHUPP

L. Ben Yakoub

Presented by G. Renault

1 – Introduction

Dans [2], P.E. SCHUPP a caractérisé les automorphismes intérieurs d'un groupe sans utiliser la conjugaison. Il a montré que si θ est un automorphisme d'un groupe G alors θ est un automorphisme intérieur de G si et seulement si, pour tout groupe H contenant G, θ se prolonge en un automorphisme de H.

Dans cet article, on va montrer qu'on n'a pas toujours un résultat analogue pour les algèbres sur un anneau commutatif.

Soient k un anneau commutatif, unitaire et A une k-algèbre associative unitaire. On désignera par $\mathrm{Aut}_k(A)$ le groupe de k-automorphismes de A. On note $M(A)$ l'algèbre de multiplication de A, c'est-à-dire, la sous algèbre de l'algèbre des endomorphismes de A engendrée par les opérateurs R_a et L_a de A où $R_a\colon\ x \to x{\cdot}a$ et $L_a\colon\ x \to a \cdot x$, pour tout $x \in A$.

Considérons maintenant $A = M_n(k)$ l'algèbre des matrices à coefficients dans k et $\theta \in \mathrm{Aut}_k(A)$. Notons U_θ le sous-k-module de A, tel que:

$$U_\theta = \Big\{ u \in A\colon\ x \cdot u = u \cdot \theta(x), \quad \text{pour tout } x \in A \Big\} .$$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble de tous les sous-k-modules de A. Si $U, V \in \mathcal{M}$, on définit le produit $U \cdot V$, c'est le groupe additif engendré par l'ensemble

$$\Big\{ u \cdot v\colon\ u \in U \ \text{ et } \ v \in V \Big\} .$$

On dit que $U \in \mathcal{M}$ est inversible s'il existe $v \in \mathcal{M}$, tel que $U{\cdot}V = V{\cdot}U = k{\cdot}1$, si un tel élément existe, il sera noté U^{-1} et on désigne par Σ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}$ [1].

Received: January 17, 1992.

Lemme. [1]

i) *Si* $U, V \in \Sigma$ *et* $U \subset V$ *alors* $U = V$.

ii) $U_\theta \in \Sigma$ *et* $(U_\theta)^{-1} = U_{\theta^{-1}}$, *pour tout* $\theta \in \mathrm{Aut}_k(A)$.

iii) *L'application*

$$\begin{aligned}\alpha\colon \mathrm{Aut}_k(A) &\longrightarrow \Sigma^0\\ \theta &\longrightarrow U_\theta\end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes. (Σ° désigne le groupe Σ muni du produit $x \circ y = y\,x$ pour tout $x, y \in \Sigma$).

Théorème. *Si* $\Phi \in \mathrm{Aut}_k(A)$ *alors* $\Phi \in M(A)$ *et* Φ *se prolonge en un* k*-automorphisme de* B*, pour toute* k*-algèbre* B *contenant* A *comme sous-algèbre.*

Preuve: Soit $\Phi \in \mathrm{Aut}_k(A)$ n'appartenant pas nécessairement à $M(A)$. D'après le lemme ii) on a: $U_\Phi \in \Sigma$. Prenons maintenant un élément U de Σ que l'on spécialisera ensuite à U_Φ. A cet élément U on peut associer, par la démarche utilisée par Isaacs pour démontrer la surjectivité de α, un élément $\theta \in \mathrm{Aut}_k(A)$ appartenant à $M(A)$. En effet:

Posons $V = U^{-1}$ i.e. $U \cdot V = V \cdot U = k \cdot 1$, donc il existe $u_1, \dots, u_p \in U$, $v_1, \dots, v_p \in V$, tels que:

$$\sum_{i=1}^{p} v_i \cdot u_i = 1\ .$$

L'application

$$\begin{aligned}\theta\colon A &\longrightarrow A_p\\ x &\longrightarrow \sum_{i=1}^{p} v_i \cdot x \cdot u_i\end{aligned}$$

est un k-automorphisme de A et, par définition même, il appartient à $M(A)$ et $U = U_\theta$; en effet, soit $u \in U$, on a

$$\begin{aligned}u \cdot \theta(x) = u\Big(\sum_{i=1}^{p} v_i \cdot x \cdot u_i\Big) &= \sum_{i=1}^{p} u\,v_i \cdot x \cdot u_i\\ &= \sum_{i=1}^{p} x \cdot u \cdot v_i\,u_i = x \cdot u\ ,\end{aligned}$$

pour tout $x \in A$ ($u \cdot v_i \in U \cdot V = k \cdot 1$, donc commute avec $x \in A$), d'où $U \subset U_\theta$ et d'après le lemme i) $U = U_\theta$. Par suite $U_\Phi = U_\theta$. On en déduit par le lemme iii) que $\phi = \theta$ appartient à $M(A)$, ce qui complète la première partie du théorème.

D'autre part, si $\theta \in \mathrm{Aut}_k(A)$, il existe $u_1, \dots u_p \in U_\theta$ et $v_1, \dots, v_p \in U_{\theta^{-1}}$, tels que: $\theta = \sum_{i=1}^{p} L_{v_i} \cdot R_{u_i}$. Si B est une k-algèbre contenant A comme sous-algèbre, on démontre, comme dans la première partie, que l'application:

$$\begin{aligned} \overline{\theta}\colon\ B &\longrightarrow B_p \\ x &\longrightarrow \sum_{i=1}^{p} v_i \cdot x \cdot u_i \end{aligned}$$

est un k-automorphisme de B, ce qui complète la preuve du théorème. ∎

Exemple: Soient $K = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ et $A = M_2(K)$, l'élément

$$m = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-5} & -2 \\ -2 & 1-\sqrt{-5} \end{bmatrix}$$

possède un inverse dans $M_2(Q[\sqrt{-5}])$ avec

$$m^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-5} & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{-5} \end{bmatrix}.$$

L'application $\theta\colon\ x \to m^{-1} \cdot x \cdot m$ de A dans A est un k-automorphisme de A qui n'est pas intérieur [1]. Mais d'après le théorème précédent, θ possède un prolongement à toute k-algèbre contenant A. Ce qui montre que le théorème de P.E. SCHUPP n'est pas en général vrai pour les algèbres sur un anneau commutatif.

Nous ne savons pas si une variante du théorème de SCHUPP est vraie pour les algèbres (de dimension finie) sur un corps commutatif.

REMERCIEMENT – Je remercie vivement le professeur A. Kaidi qui m'a proposé ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Isaacs, I.M. – Automorphisms of Matrix algebra over commutative Rings, *Linear Algebra App.*, 31 (1980), 215–231.

[2] Schupp, P.E. – A characterization of Inner Automorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 101(2) (1987), 226–228.

L. Ben Yakoub,
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences
Tétouan, B.P. 2121 – MAROC