PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 52 Fasc. 2 – 1995

INDEPENDANCE DES FREQUENCES PAR RAPPORT AUX SOLUTIONS QUASI- PERIODIQUES DE CERTAINES EQUATIONS D'EVOLUTION NON LINEAIRES

Karim el Mufti

Introduction

Dans $\mathbb{R}^N$, on considère l'équation d'évolution:

$$\frac{du}{dt} + A(t)\,u(t) \ni 0 \; ; \tag{0.1}$$

l'opérateur $A(t)$ étant maximal monotone τ-périodique, i.e. $A(t+\tau) = A(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Notre but est de montrer que les fréquences de base des solutions quasi-périodiques de (0.1) appartiennent à un ensemble fini déterminé uniquement par la fonction $t \mapsto A(t)$.

Dans [2], la démonstration du fait que le nombre de fréquences de toute solution quasi-périodique de (0.1) est majoré par $\frac{N+1}{2}$ ne donnait, par contre, aucun renseignement sur l'ensemble des fréquences de toutes ces solutions. Nous démontrons, ici, que cet ensemble est lui-même de cardinal inférieur ou égal à $\frac{N+1}{2}$.

1 – Préliminaires

Soient C_0 l'ensemble des données initiales dessolutions quasi-périodiques de (0.1) et C_t l'ensemble des valeurs prises par les trajectoires quasi-périodiques de (0.1) à l'instant t. Pour tout $u_0 \in C_0$, on définit:

$$\omega_{\tau\mathbb{N}}(u_0) = \Big\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\; \exists\,(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\; p_n \to \infty,\; U(0,p_n\tau)u_0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \Big\} \;.$$

Received: September 21, 1993.

Cet ensemble est fermé. En effet, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\omega_{\tau\mathbb{N}}(u_0)$ telle que $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$; il existe donc une sous-suite $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $p_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, vérifiant $U(0,p_{n_k}\tau)u_0 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_n$. On a alors:

$$\Big|U(0,p_{n_k}\tau)u_0 - y\Big| \le |y_n - y| + \Big|U(0,p_{n_k}\tau)u_0 - y_n\Big| \ ,$$

et en faisant tendre n et k vers l'infini, on voit que $y \in \omega_{\tau\mathbb{N}}(u_0)$.

On considère maintenant $\bigcup_{u_0\in C_0} \omega_{\tau\mathbb{N}}(u_0)$. Ceci n'est qu'une autre représentation de C_0 comme réunion d'ensembles ω-limites discrets. On le vérifie d'ailleurs grâce à une propriété très importante des fonctions presque-périodiques qui est la suivante:

Proposition 1.1 (voir Haraux [1])**.** *Soit (X,d) un espace métrique complet. Supposons que $u \in C_b(\mathbb{R},X)$ soit une fonction presque-périodique $\mathbb{R} \to X$. Alors il existe une suite d'entiers strictement croissante $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d\Big[u(t+n_k\tau), u(t)\Big] \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

On achève ces préliminaires par une manière de traduire la τ-périodicité de l'opérateur $A(t)$: on a l'égalité $C_\tau = C_0$. Il s'agit, pour la vérifier, de trouver une solution $W(t)$ de (0.1) qui soit quasi-périodique et telle que $W(\tau) = u_0$ où u_0 est la donnée initiale d'une solution quasi-périodique de (0.1). Il est clair que $W(t) = u(t-\tau)$ répond bien à la question.

Dans le cas général d'une équation de la forme:

$$\frac{du(t)}{dt} + A(t)\,u(t) \ \ni \ f(t) \ , \tag{1.1}$$

où $f(t)$ est presque-périodique: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on montre que l'ensemble $\mathcal{C}_t$ des valeurs prises à l'instant t par les trajectoires presque-périodiques du processus $E_f(s,t)$ généré par cette équation, quand elles existent, forment un ensemble fermé et convexe de $\mathbb{R}^N$: $\mathcal{C}_t = \{u(t);\, u$ presque-périodique solution de $(1.1)\}$.

On rappelle que si u et v sont deux solutions de (1.1), la fonction numérique $\|u(t)-v(t)\|$ est décroissante et, par suite, tend vers une limite lorsque $t\to\infty$. De même, si u et v sont deux solutions de (1.1) bornées sur $\mathbb{R}$, $\|u(t)-v(t)\|$ tend vers une limite lorsque $t\to-\infty$ et d'aprés la presque-périodicité, elle est donc constante égale à sa limite.

Donc l'application $E_f(s,t)\colon \mathcal{C}_s \to \mathcal{C}_t$, $u(s)\to u(t)$, est une isométrie bijective, car $E_f(s,t)[u(s)] = E_f(s,t)[v(s)]$ implique que $u(s)=v(s)$.

Lemme 1.1. *Si* $[E(s,t)]_{s\in\mathbb{R};t\geq s}$ *est un processus de contractions sur un sous-ensemble fermé convexe de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *(ou plus généralement dans un espace strictement convexe), alors pour tout* x *et* y *on a:*

$$\Big\|E(s,t)x - E(s,t)y\Big\| = \|x-y\| \;\Rightarrow\; E(s,t)\left[\frac{x+y}{2}\right] = \frac{E(s,t)x + E(s,t)y}{2} \ .$$

On a ainsi un processus d'isométries affines et bijectives $(E_f(s,t))_{s\in\mathbb{R};t\geq s}$ qui partent de $\mathcal{C}_s$ et prennent leurs valeurs dans $\mathcal{C}_t$.

Proposition 1.2. *L'ensemble* $\mathcal{C}_t$ *est un convexe fermé de* $\mathbb{R}^N$*.*

Preuve: Montrons d'abord que $\mathcal{C}_t$ est fermé. Pour cela, on se donne une suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_t$ qui converge vers $u(t)$. Alors, u est presque-périodique comme limite uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions presque-périodiques. De plus u est aussi solution de (1.1). En effet, on construit d'abord une suite de trajectoires complètes comme suit: il existe une suite $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement croissante telle que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d\Big[u_n(t+m_k\tau), u_n(t)\Big] \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Comme $u_n(t) = E_f(s,t)\, u_n(s)$, par passage à la limite, on aura: $u(t) = E_f(s,t)\, u(s)$, i.e. u est une trajectoire complète du processus E_f. On utilise ici le fait qu'à $t\geq s$ fixé, les applications $E_f(s,t)\colon \mathcal{C}_s \to \mathcal{C}_t$ sont uniformément équicontinues lorsque $s\in\mathbb{R}$.

Pour montrer que $\mathcal{C}_t$ est convexe, notons que comme il est fermé, il sufit de montrer que si $u(t)$ et $v(t)$ sont dans $\mathcal{C}_t$ alors $W(t) = \frac{u(t)+v(t)}{2} \in \mathcal{C}_t$. On construit une trajectoire complète comme auparavant et on vérifie que $W(t) = E(s,t)\, W(s)$. Le résultat découle du fait que les applications affines par définition préservent les milieux de segments. ∎

Ainsi, $(E_f(s,t))_{s\in\mathbb{R};t\geq s}$ est un processus d'isométries bijectives qui opèrent sur un sous-ensemble feré et convexe de $\mathbb{R}^N$.

Les résultats obtenus jusqu'à présent sont indépendants de la τ-périodicité de l'opérateur $A(t)$. Désormais, nous allons utiliser cette hypothèse.

2 – Enoncé et démonstration du résultat principal

Théorème. *Il existe un sous-ensemble fini de* $\mathbb{R}$ *(de cardinal inférieur ou égal à* $\frac{N+1}{2}$*) dépendant uniquement de* $A(t)$ *et contenant toutes les fréquences de base de toutes les solutions quasi-périodiques de (0.1).*

Preuve: Soit E_t le sous-espace affine de $\mathbb{R}^N$ engendré par C_t; en particulier E_0 est un sous-espace affine dont on note m la dimension. On sait qu'on peut choisir $m+1$ points $e_0, e_1, ..., e_m$ de C_0 qui constituent un repère affine de E_0, c'est à dire tels que tout point de E_0 s'écrive de manière unique comme barycentre des points $e_0, e_1, ..., e_m$. De manière équivalente, les vecteurs $\{e_j - e_0,\ j = 1, ..., m\}$ constituent une base du sous-espace vectoriel direction de E_0.

L'aplication $U(0,t)$ définie deC_0 dans C_t ($t \geq 0$ fixé) est une isométrie qui préserve les milieux de segments. On sait qu'alors elle possède un unique prolongement affine $\widetilde{U}(0,t)$ de E_0 dans E_t qui coïncide avec $U(0,t)$ sur C_0 définie par exemple par la formule suivante:

$$\widetilde{U}(0,t)\Big(\sum_{k=0}^{k=m} \alpha_k\, e_k\Big) = \sum_{k=0}^{k=m} \alpha_k\, U(0,t)\, e_k \quad \text{pour} \quad \sum_{k=0}^{k=m} \alpha_k = 1\ .$$

De plus $\{U(0,t)(e_k),\ k = 0, ..., m\}$ est une repère affine de E_t (puisque $C_t = U(0,t)\, C_0$ donc $\widetilde{U}(0,t)$ est une bijection affine entre E_0 et E_t).

On note $e_k(t) = U(0,t)\, e_k$, qui d'après les résultats d' A. Haraux et M. Otâni dans [2] admet une unique représentation à l_k fréquences $\lambda_{k,j}$ distincts, avec $1 \leq j \leq l_k \leq \frac{N+1}{2}$, ces fréquences étant rangées dans lórdre croissant: $e_k(t) = \sum_{j=1}^{l_k} v_{k,j}(t)\, e^{i\lambda_{k,j} t}$, où les $v_{k,j}(t)$ τ-périodiques.

Pour u_0 dans C_0, il existe une unique représentation $u_0 = \sum_{k=0}^m \alpha_k\, e_k$ avec $\sum_{k=0}^m \alpha_k = 1$, et par suite on a:

$$u(t) \equiv U(0,t)\, u_0 = \widetilde{U}(0,t)\, u_0 = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, \widetilde{U}(0,t)\, e_k = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, U(0,t)\, e_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, e_k(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \sum_{j=1}^{l_k} v_{k,j}(t)\, e^{i\lambda_{k,j} t}\ .$$

Mais, toujours par les résultats signalés auparavant, comme solution quasi-périodique, $u(t)$ admet elle aussi une représentation unique de la forme: $u(t) = \sum_{j=1}^{l} W_j(t)\, e^{i\mu_j t}$ avec $L \leq \frac{N+1}{2}$.

Par suite, on voit que les μ_j doivent appartenir à l'ensemble

$$\Lambda = \Big\{\lambda_{k,j};\ 0 \leq k \leq m,\ 1 \leq j \leq l_k\Big\}\ .$$

On peut donc écrire $u(t) = \sum_{\mu \in \Lambda} W_\mu(t)\, e^{i\mu t}$ où

$$W_\mu(t) = \sum_{0 \leq k \leq m,\ j \in J_\mu} \alpha_k\, v_{k,j}(t)\,, \qquad J_\mu = \{j;\ \lambda_{k,j} = \mu\}\ .$$

Nous allons maintenant montrer que Λ possède au plus $\frac{N+1}{2}$ éléments, ce qui impliquera qu'il existe au plus $\frac{N+1}{2}$ fréquences associées à toutes les solutions quasi-périodiques.

A cet effet, il faut faire apparaître la dépendance en $\alpha \in \sum_m = \{\alpha = (\alpha_k)_{0\le k\le m};\ \sum_{k=0}^m \alpha_k = 1\}$.

On note donc $u_0^\alpha(t) = \sum_{k=0}^m \alpha_k\, e_k(t) = \sum_{\mu\in\Lambda} W_\mu^\alpha(t)\, e^{i\mu t}$, où est la fonction τ-périodique définie par $W_\mu^\alpha(t) = \sum_{0\le k\le m;\, j\in J_\mu} \alpha_k\, v_{k,j}(t)$.

Soit $F_\mu = \{\alpha \in \sum_m;\ W_\mu^\alpha \equiv 0\}$.

Lemme 2.1. *F_μ est un fermé d'intérieur vide dans $\sum_m$.*

Preuve: F_μ est clairement fermé. Montrons qu'il est d'intérieur vide dans $\sum_m$.

Si F_μ est d'intérieur non vide; comme W_μ^α est affine en α, c'est que W_μ^α est nulle sur tout $\sum_m$, donc en particulier pour $\alpha^0 = (1,0,...,0)$ correspodant à e_0 et de manière analogue pour $\alpha^k = (0,...,1,0,...,0)$, où 1 est à la $k+1^e$ place, correspondant à e_k.

Or pour α^0, on a: $W_\mu^{\alpha^0}(t) = \sum_{j\in J_\mu} v_{0,j}(t)$. Or, si $\mu = \lambda_{0,j}$ alors $W_\mu^{\alpha_0}(t) = v_{0,j}(t)$. Donc $W_\mu^{\alpha_0}$ est nulle si et seulement si μ n'est pas une des fréquences associées à e_0.

Par définition de Λ, on en déduit que pour tout μ de Λ, il existe au moins un des α^k qui n'appartient pas à F_μ. Donc $\operatorname{int} F_\mu$ ne peut être non vide. ∎

Par suite $\bigcup_{\mu\in\Lambda} F_\mu$ est aussi d'intérieur vide dans $\sum_m$.

On a écrit $u(t) = \sum_{\mu\in\Lambda} e^{i\mu t} W_\mu(t)$ où les μ sont tous différents. Ceci est donc la représentation unique de chaque solution quasi-périodique $u = u_\alpha$ obtenue par combinaison affine des $e_k(t)$.

D'après ce qu'on vient de voir, il existe un sous-ensemble dense dans $\sum_m$ de α pour lesquels W_μ^α est non nulle pour tous les $\mu \in \Lambda$.

Prenant un tel $\beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m)$ avec $\beta_j \ge 0$ pour tous les j, on a alors:

$$u_0 = \sum_{k=0}^m \beta_k\, e_k \ \in\ C_0 \quad \text{et} \quad u(t) = U(0,t)\, u_0 = \sum_{\mu\in\Lambda} e^{i\mu t}\, W_\mu^\beta(t)\ .$$

Ceci montre que $\operatorname{card}\Lambda \le \frac{N+1}{2}$.

Conclusion

Les ensembles de fréquences asociées aux e_k ne peuvent être disjoints deux à deux puisque leur réunion Λ possède au plus $\frac{N+1}{2}$ éléments. ∎

REFERENCES

[1] Haraux, A. – Systèmes dynamiques dissipatifs, *R.M.A.,* 17 (1991).
[2] Haraux, A. et Ôtani, M. – Quasi-periodicity of bounded solutions to some periodic evolution equations, *J. Math. Soc. Japan,* 42(2) (1990).

Karim el Mufti,
CEREMADE, Université Paris IX Dauphine,
Place du Marechal de Lattre de Tassigny, 75016 Paris – FRANCE