PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 52 Fasc. 4 – 1995

LIMITE DE MODELES DE FLUIDES COMPRESSIBLES

H. Bessaih

Presented by H. Beirão da Veiga

Abstract: We study in this paper the behaviour of the solution of the compressible Navier-Stokes equations for low Mach number and incompressible initial data are shown to be close to corresponding solutions of the equations for incompressible flow.

1 – Introduction

Le problème à étudier est le suivant:

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho(\dot v + (v\cdot\nabla)v - b) = -\nabla p + \mu\,\Delta v + \beta\,\nabla\,\mathrm{div}\, v & \text{dans } Q_T, \\ \dot\rho + \mathrm{div}(\rho\, v) = 0 & \text{dans } Q_T, \\ v = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ v(0) = v^0 & \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho^0 & \text{dans } \Omega\ , \end{cases}$$

où $Q_T = (0,T)\times\Omega$, Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ, $\Sigma_T = (0,T)\times\partial\Omega$. Le système (1) décrit le mouvement d'un fluide compressible visqueux. Dans (1) v est la vitesse du fluide, ρ est la densité du fluide, b la force extérieure au fluide, $p(\rho)$ est la pression. $\beta = (\xi + 1/3\mu)$ où μ et ξ sont les coefficients de viscosité vérifiant que $\mu > 0$ et $\xi \geq 0$.

Ici

$$(v\cdot\nabla)\, v = \sum_{i=1}^{3} v_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,, \qquad \dot v = \frac{\partial v}{\partial t}\,, \qquad \dot\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}\ .$$

Received: November 18, 1994; *Revised*: March 7, 1995.
Keywords: Navier-Stokes equations, Mach number, compressibility.

On pose

(2) $$\overline{\rho} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho_0(x)\, dx \ ,$$

($|\Omega|$ est la mesure de Ω)

(3) $$\rho = \sigma + \overline{\rho} \ ,$$

(4) $$m = \min_{x \in \overline{\Omega}} \rho_0(x) \ ,$$

(5) $$M = \max_{x \in \overline{\Omega}} \rho_0(x) \ .$$

Il est évident que

$$0 < m \leq \overline{\rho} \leq M \ .$$

On utilise les espaces fonctionelles suivants: $H^s(\Omega)$, $L^p((0,T); H^s(\Omega))$, $L^p(\Omega)$ muni des normes notées respectivement $\|\cdot\|_s$, $[\cdot]_{p,s,T}$, $\|\cdot\|_{L^p}$, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $0 < T \leq \infty$. On prend en considération une famile de pressions p_λ indexées par λ, vérifiant: $p_\lambda(\rho) > 0$, $p_\lambda \in C^3(I)$,

(6) $$\sup_{\xi \in I(\overline{\rho})} |p''_\lambda(\xi)| + \sup_{\xi \in I(\overline{\rho})} |p'''_\lambda(\xi)| \leq c_1\, k_\lambda \ ,$$

où $I(\overline{\rho}) = [\overline{\rho} - l, \overline{\rho} + l]$, $0 < l \leq \overline{\rho}/2$.

On pose

(7) $$k_\lambda = p'_\lambda(\overline{\rho}) \ .$$

Notre travail consiste à étudier le comportement de la solution $(v_\lambda, \rho_\lambda)$ avec la loi d'état p_λ lorsque λ tend vers l'infini: c'est-à-dire prouver que pour ces modèles, l'approximation d'incompressibilité est mathématiquement justifiée. Notons que cela ne peut se faire que pour des données initiales et une force extérieure assez petites. Cette question a été abordée par différents auteurs; Klainerman-Majda [15] en 1979 ont montré la convergence de la solution locale $(v_\lambda, \rho_\lambda)$, (avec la force extérieure b nulle) quand λ tend vers l'infini et ce pour une relation $p_\lambda(\rho)$ particulière $p_\lambda(\rho) = \lambda^2\, p(\rho)$. A. Lagha [10] en 1979 a montré la convergence de la solution globale $(v_\lambda, \rho_\lambda)$ pour une loi d'état linéaire $p_\lambda(\rho) = \lambda(\rho - \overline{\rho})$ (avec la force extérieure nulle). H. Beirão da Veiga [2], [3], en 1987 a prouvé la convergence de la solution d'un problème stationnaire et compressible pour de différents modèles $p_\lambda(\rho)$. Le problème d'existence de solutions pour (1) a fait l'objet de beaucoup de travaux récents. Matsumura-Nishida [12], [13], A. Valli [23], H. Fujita–Yashima [7], H. Beirão da Veiga [2], [3], M. Padula [18] ainsi que R. Temam [21] pour le problème incompressible. Notre travail s'inspire de celui de A. Valli [23] pour l'obtention d'estimations sur les inconnues v_λ et ρ_λ du problème compressible et de celui de H. Beirão da Veiga [2], [3] pour l'expression de la compressibilité. (3) et (7) donnent

$$\begin{aligned} &p'_\lambda(\rho_\lambda) = p'_\lambda(\sigma_\lambda + \overline{\rho}) = k_\lambda - w_\lambda(\sigma_\lambda)\ , \\ &w_\lambda(0) = 0\ . \end{aligned} \tag{8}$$

La condition (6) entraine donc

$$\|w_\lambda(\sigma_\lambda)\|_s \le c_2\, k_\lambda\, \|\sigma_\lambda\|_s\,, \qquad 0 \le s \le 2\ , \tag{9}$$

$$\|\dot w_\lambda(\sigma_\lambda)\|_0 = c_3\, k_\lambda\, \|\dot\sigma_\lambda\|_0\ . \tag{10}$$

λ étant l'inverse du nombre de Mach, k_λ devra vérifier la relation

$$k_\lambda \to_{\lambda\to\infty} \infty\ .$$

En utilisant les relations (3), (7) et (8), le problème (1) sera reécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \rho_\lambda(\dot v_\lambda + (v_\lambda\cdot\nabla)v_\lambda - b) + k_\lambda\,\nabla\sigma_\lambda = & \\ \qquad = w_\lambda(\sigma_\lambda)\,\nabla\sigma_\lambda + \mu\,\Delta v_\lambda + \beta\,\nabla\,\mathrm{div}\, v_\lambda & \text{dans } Q_T, \\ \dot\sigma_\lambda + v_\lambda\cdot\nabla\sigma_\lambda + \sigma_\lambda\,\mathrm{div}\,v_\lambda + \overline{\rho}\,\mathrm{div}\,v_\lambda = 0 & \text{dans } Q_T, \\ v_\lambda = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ v_\lambda|_{t=0} = v^0_\lambda(x) & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_\lambda|_{t=0} = \sigma^0_\lambda(x) & \text{dans } \Omega\ , \end{cases} \tag{11}$$

où $v^0_\lambda(x) = v^0(x) + \overline{v}_\lambda(x)$, vérifiant que

$$\|\overline{v}_\lambda\|_0 \le \frac{c}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}\, v^0 = 0\ ,$$

c étant une constante indépendante de λ.

2 – Estimations indépendantes de λ

2.1. Introduction

Pour établir des estimations sur $(v_\lambda, \rho_\lambda)$ indépendantes de λ, on redémontre l'existence de solutions pour (11). Ceci se fait en deux étapes: dans la première (voir Valli [23]), on montre l'existence d'un $T^* > 0$ tel que (11) admette une unique solution $(v_\lambda, \rho_\lambda)$ sur $(0, T^*) \times \Omega$ vérifiant que

$$\begin{aligned} &v_\lambda \in L^2((0,T^*); H^3) \cap C^0((0,T^*); H^2) \ , \\ &\dot v_\lambda \in L^2((0,T^*); H^1) \cap C^0((0,T^*); L^2) \ , \\ &\rho_\lambda \in L^2((0,T^*); H^2) \,, \qquad \dot\rho_\lambda \in C^0((0,T^*); H^1) \ , \end{aligned}$$

où

$$T^* = f\Big(\Omega, \xi, \mu, \overline{\rho}, k_\lambda, [b]_{\infty,1,\infty}, [\dot b]_{\infty,-1,\infty}, D\Big) \ ,$$

verifiant

$$\|v_\lambda^0\|_2^2 + k_\lambda \, \|\sigma_\lambda^0\|_2^2 \le D \ .$$

Dans la seconde étape, on établit des estimations a priori. On suppose que (11) admet une unique solution $(v_\lambda, \rho_\lambda)$ sur $(0, T^*) \times \Omega$ (avec T^* positif quelconque) dans les espaces de fonctions sus-cités. On montre alors que si

$$\|v_\lambda^0\|_2^2 + k_\lambda \, \|\sigma_\lambda^0\|_2^2 \le D \ ,$$

alors

$$\frac{1}{k_\lambda} \, \|v_\lambda(T^*)\|_2^2 + \|v_\lambda(T^*)\|_1^2 + k_\lambda \, \|\sigma_\lambda(T^*)\|_2^2 \le D \ .$$

On applique les résultats de la première étape sur $[T^*, T^{**}]$, où

$$T^{**} = f\Big(\Omega, \xi, \mu, \overline{\rho}, k_\lambda, [b]_{\infty,1,\infty}, [\dot b]_{\infty,-1,\infty}, D\Big) \ ,$$

ce qui donne $T^{**} = T^*$. Les constantes étant indépendantes de λ, cela montre l'existence d'une solution $(v_\lambda, \rho_\lambda)$ de (11) uniformement bornée dans $H^1(Q_T)$.

2.2. Existence locale

Théorème 2.2.1. *Soient Ω de classe C^3, $p_\lambda \in C^3$,*

$$\begin{aligned} &b \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)) \,, \qquad \dot b \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; H^{-1}(\Omega)) \ , \\ &v_\lambda^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \,, \qquad \rho_\lambda^0 \in H^2(\Omega) \ , \\ &0 < m \le \rho_\lambda^0(x) \le M \qquad \textit{sur} \ \ \overline{\Omega} \ . \end{aligned}$$

Alors il existe un $T^* > 0$ *assez petit et une solution* $(v_\lambda, \rho_\lambda)$ *du problème (11) sur* $(0,T^*) \times \Omega$ *vérifiant*

$$\begin{aligned}
&v_\lambda \in L^2((0,T^*); H^3(\Omega)) \cap C^0((0,T^*); H^2(\Omega)) \;, \\
&\dot v_\lambda \in L^2((0,T^*); H^1(\Omega)) \cap C^0((0,T^*); L^2(\Omega)) \;, \\
&\rho_\lambda \in C^0((0,T^*); H^2(\Omega)) \,, \qquad \dot\rho_\lambda \in C^0((0,T^*); H^1(\Omega)) \;, \\
&\rho_\lambda(t,x) > 0 \quad \textit{sur} \;\; Q_{T^*} \;.
\end{aligned}$$

Preuve: Le résultat du Théorème 2.2.1 d'existence locale, est dû à l'article de Beirão da Veiga [4], où l'auteur montre l'existence d'une solution pour les équations décrivant le mouvement d'un fluide non homogène visqueux incompressible en présence de diffusion. On commencera par considérer les deux problèmes suivants, le premier linéaire en v_λ

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} \widetilde\rho_\lambda\, \dot v_\lambda + A\, v_\lambda = F & \text{dans } Q_T, \\ v_\lambda = 0 & \text{dans } \Sigma_T, \\ v_\lambda(0) = v^0_\lambda & \text{dans } \Omega \;, \end{cases}$$

où $A = -\mu\,\Delta - \beta\,\nabla\,\mathrm{div}$ et $F = -k_\lambda\,\nabla\widetilde\sigma_\lambda + w_\lambda(\widetilde\sigma_\lambda)\cdot\nabla\widetilde\sigma_\lambda - \widetilde\rho_\lambda(v_\lambda\cdot\nabla)v_\lambda + \widetilde\rho_\lambda\cdot b\,\widetilde\rho_\lambda$ et F sont deux fonctions connues. Le second est linéaire en σ_λ

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \dot\sigma_\lambda + \widetilde v_\lambda\cdot\nabla\sigma_\lambda + \sigma_\lambda\,\mathrm{div}\,\widetilde v_\lambda = 0 & \text{dans } Q_T, \\ \sigma_\lambda(0) = \sigma^0_\lambda & \text{sur } \Omega \;. \end{cases}$$

La résolution de (12) se fait par la méthode de continuité, celle de (13) se fait par la méthode des caractéristiques (voir [23]). Puis la résolution locale de (11) se fait en utilisant le Théorème du point fixe de Schauder. ∎

2.3. Premières estimations a priori

On suppose l'existence d'un T, $0 < T \le \infty$ pour lequel $(v_\lambda, \rho_\lambda)$ est solution du problème (11) sur $(0,T)\cdot\Omega$, dans les classes de fonctions du Théorème 2.2.1. On suppose que Ω est de classe C^4 et

$$\frac{\overline\rho}{2} \le \sigma_\lambda(x,t) + \overline\rho \le 3\,\overline\rho \;.$$

On définit dans Q_T les deux systèmes d'équations suivants

$$(14)\quad \begin{cases} (\sigma_\lambda + \overline{\rho})\,\dot v_\lambda + A v_\lambda + k_\lambda \nabla \sigma_\lambda = \\ \qquad = \rho_\lambda (b - (v_\lambda \cdot \nabla)\, v_\lambda) + w_\lambda(\sigma_\lambda)\, \nabla\sigma_\lambda & \text{dans } Q_T, \\ v_\lambda = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ v_\lambda(0) = v_\lambda^0 & \text{dans } \Omega\ , \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \dot\sigma_\lambda + \overline{\rho}\,\mathrm{div}\, v_\lambda = -v_\lambda \nabla\sigma_\lambda - \sigma_\lambda \,\mathrm{div}\, v_\lambda & \text{dans } Q_T, \\ \sigma_\lambda(0) = \sigma_\lambda^0 & \text{dans } \Omega\ . \end{cases}$$

Lemme 2.3.1. *Il existe une constante c_1 indépendante de λ telle que*

$$(16)\quad \frac{\overline{\rho}}{2}\frac{d}{dt}\|v_\lambda\|_0^2 + \frac{k_\lambda}{2\overline{\rho}}\frac{d}{dt}\|\sigma_\lambda\|_0^2 + \mu\|\nabla v_\lambda\|_0^2 + \beta\|\,\mathrm{div}\, v_\lambda\|_0^2 \le$$
$$\le c_1\Big(\|b\|_0^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_1^4 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_1^2\,\|\dot v_\lambda\|_0^2\Big)\ .$$

Preuve: On multiplie $(14)_1$ par v_λ et $(15)_1$ par $\frac{k_\lambda}{\overline{\rho}}\,\sigma_\lambda$, on intègre sur Ω et on fait la somme des deux équations. En intégrant par parties le terme suivant

$$k_\lambda \int_\Omega v_\lambda \cdot \nabla\sigma_\lambda = -k_\lambda \int_\Omega \sigma_\lambda \,\mathrm{div}\, v_\lambda\ ,$$

puis en utilisant (9) et l'estimation des autres termes, il en resultera sans difficulté (16). ∎

Lemme 2.3.2. *Il existe une constante c_2 indépendante de λ telle que*

$$(17)\quad \mu\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^2 \le$$
$$\le c_2\Big(\|b\|_1^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2 + \|\,\mathrm{div}\, v_\lambda\|_2^2\Big)\ ,$$

et

$$(18)\quad \mu\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2 \le$$
$$\le c_2\Big(\|b\|_1^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2 + \|\,\mathrm{div}\, v_\lambda\|_2^2\Big)\ .$$

Preuve: La preuve repose sur un lemme (voir Temam [20], page 33), qu'on appliquera sur le problème (S) transformé de (11)

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} -\mu\,\Delta v_\lambda + k_\lambda \nabla\sigma_\lambda = w_\lambda(\sigma_\lambda)\,\nabla\sigma_\lambda + \beta\,\nabla\,\mathrm{div}\, v_\lambda - \\ \qquad\qquad - \rho_\lambda(\dot v_\lambda + (v_\lambda\cdot\nabla)v_\lambda - b) & \text{dans } Q_T, \\ \mathrm{div}\, v_\lambda = -\frac{1}{\overline{\rho}}(\dot\sigma_\lambda + \nabla\sigma_\lambda\cdot v_\lambda + \sigma_\lambda\,\mathrm{div}\, v_\lambda) & \text{dans } Q_T, \\ v_\lambda = 0 & \text{sur } \Sigma_T\ . \end{cases}$$

Cela donne

$$\mu\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^2 \le c\Big(\|\operatorname{div} v_\lambda\|_2^2 + \|w_\lambda(\sigma_\lambda)\,\nabla\sigma_\lambda\|_1^2 + \|\rho_\lambda\, b\|_1^2 + \|\rho_\lambda\,\partial_t v_\lambda\|_1^2 + \|\rho_\lambda(v_\lambda\,\nabla)v_\lambda\|_1^2\Big)\ .$$

En utilisant $\|\cdot\|_{L^4} \le c\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_{L^\infty} \le c\|\cdot\|_2$ et l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ pour le terme $\|w_\lambda(\sigma_\lambda)\,\nabla\sigma_\lambda\|_1^2$, on obtient (17). Pour (18) on utilise que: $\exists\, k_0 > 0$, $k_\lambda > k_0$ dans (17). ∎

Lemme 2.3.3. *Il existe une constante c_3 indépendante de λ telle que*

$$\mu\,\frac{d}{dt}\|\nabla v_\lambda\|_0^2 + \beta\,\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} v_\lambda\|_0^2 + \|Av_\lambda\|_0^2 \le \le c_3\Big(\|\dot b\|_0^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_1^4 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2 + \|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_0^2 + \|\operatorname{div} v_\lambda\|_1^2\Big)\ . \tag{19}$$

Preuve: On multiplie $(14)_1$ par Av_λ, on intègre sur Ω, on obtient l'égalité suivante

$$\overline{\rho}\int_\Omega \dot v_\lambda\cdot Av_\lambda + \|Av_\lambda\|_0^2 = \int_\Omega \sigma_\lambda\,\dot v_\lambda\cdot Av_\lambda + k_\lambda\int_\Omega \nabla\sigma_\lambda\cdot Av_\lambda + \int_\Omega \rho_\lambda(b-(v_\lambda\cdot\nabla)v_\lambda)Av_\lambda + \int_\Omega w_\lambda(\sigma_\lambda)\,\nabla\sigma_\lambda\cdot Av_\lambda\ .$$

Le premier terme de cette égalité s'estime comme suit, $\exists\,\delta > 0$ et $\exists\, c > 0$ tels que:

$$\Big|\int_\Omega \sigma_\lambda\,\dot v_\lambda\cdot Av_\lambda\Big| \le \frac{c}{\delta}\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|\dot v_\lambda\|_0^2 + \delta\|Av_\lambda\|_0^2\ .$$

Or

$$\|\sigma_\lambda\|_2^2 = k_\lambda\,\frac{1}{k_\lambda}\,\|\sigma_\lambda\|_2^2\ ,$$

et comme $\exists\, k_0 > 0$, $k_\lambda > k_0$, donc j'en déduis que

$$\Big|\int_\Omega \sigma_\lambda\,\dot v_\lambda\cdot Av_\lambda\Big| \le \frac{c\,k_\lambda}{\delta}\,\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|\dot v_\lambda\|_0^2 + \delta\,\|Av_\lambda\|_0^2\ .$$

Le second terme de l'égalité s'estime de la manière suivante

$$k_\lambda\Big|\int_\Omega \nabla\sigma_\lambda\cdot Av_\lambda\Big| \le \frac{c}{\delta}\,k_\lambda^2\,\|\sigma_\lambda\|_1^2 + \delta\|Av_\lambda\|_0^2\ .$$

En utilisant (17), puis (9) pour l'estimation des autres termes on obtient (19). ∎

Lemme 2.3.4. *On a l'inégalité*

$$k_\lambda \frac{d}{dt}\|\nabla\sigma_\lambda\|_1^2 \leq \tag{20}$$
$$\leq c_4\Big(\|b\|_1^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4 + \|\nabla\dot{v}_\lambda\|_0^2 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|\operatorname{div} v_\lambda\|_2^2\Big) + \delta\|v_\lambda\|_3^2\ ,$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement et c_4 est une constante (dépendante de δ mais) indépendante de λ.

Preuve: On applique l'opérateur ∇ à l'équation $(15)_1$, on la multiple scalairement par k_λ. Puis on applique l'opérateur D^2 à l'équation $(15)_1$, on la multiplie par $k_\lambda D^2\sigma_\lambda$. On fait la somme des deux équations et on intègre sur Ω. On utilisera (17) pour estimer $k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^2$ dans les intégrales suivantes

$$\overline{\rho}\,k_\lambda \int_\Omega \nabla\operatorname{div} v_\lambda\cdot\nabla\sigma_\lambda \quad \text{et} \quad \overline{\rho}\,k_\lambda \int_\Omega D^2\operatorname{div} v_\lambda\cdot D^2\sigma_\lambda\ .$$

Puis des estimations des autres termes de l'égalité, découle (20). ∎

Lemme 2.3.5. *On a l'inégalité*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega(\rho_\lambda\cdot\dot{v}_\lambda\cdot v_\lambda) + k_\lambda\|\dot{\sigma}_\lambda\|_0^2 + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla v_\lambda\|_0^2 + \beta\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} v_\lambda\|_0^2 \leq \tag{21}$$
$$\leq c_5\Big(\|b\|_1^2 + \|\dot{b}\|_0^2 + \|\nabla\dot{v}_\lambda\|_0^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + \|\dot{v}_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\dot{\sigma}_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_1^2$$
$$+ \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|\dot{\sigma}_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + \|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + \|v_\lambda\|_3^2\,\|\sigma_\lambda\|_0^2 + \delta\|v_\lambda\|_3^2\Big)\ ,$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement et c_5 est une constante (dépendante de δ mais) indépendante de λ.

Preuve: On multiplie l'équation $(15)_1$ par $k_\lambda\dot{\sigma}_\lambda$ et on intègre sur Ω, on obtient un terme gênant, à savoir

$$\overline{\rho}\,k_\lambda\int_\Omega \operatorname{div} v_\lambda\cdot\dot{\sigma}_\lambda\ ,$$

son estimation conduit à un terme de la forme $k_\lambda^2\|\dot{\sigma}_\lambda\|_0^2$ qui donne des estimations dépendantes de la compressibilité. Pour l'éliminer, on prend la dérivée par rapport au temps de $(14)_1$, on multiplie par $\overline{\rho}v_\lambda$ et on les intègre sur Ω puis on fait la somme avec la première équation. Utilisant l'inégalité (9) ainsi que des intégrations par parties pour l'estimation des autres termes on obtient (21). ∎

Lemme 2.3.6. *Il existe une constante c_6 indépendante de λ telle que*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho_\lambda}\cdot\dot v_\lambda\|_0^2+\frac{k_\lambda}{2\overline{\rho}}\frac{d}{dt}\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2+\mu\|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2+\beta\|\operatorname{div}\dot v_\lambda\|_0^2\le \tag{22}$$

$$\le c_6\Big(k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2+\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\sigma_\lambda\|_2^2+\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2+\|v_\lambda\|_3^2\,\|v_\lambda\|_1^2+k_\lambda^2\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\sigma_\lambda\|_2^2$$
$$+\,k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_3^2+\|v_\lambda\|_3^2\,\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2+\|v_\lambda\|_3^2\,\|\dot v_\lambda\|_0^2+\|b\|_1^2+\|\dot b\|_0^2\Big)\ .$$

Preuve: On prend la dérivée en temps (respectivement) des équations $(14)_1$ et $(15)_1$ et on les multiplie par $\dot v_\lambda$ et $\frac{k_\lambda}{\overline{\rho}}\,\dot\sigma_\lambda$ puis on intègre sur Ω et on fait la somme des deux équations. En estimant chaque terme de l'égalité on obtient (22). ∎

Lemme 2.3.7. *Il existe une constante c_7 indépendante de λ telle que*

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)]+\psi(t)\le c_7\,\psi(t)\,(\varphi(t)+\varphi^2(t))+c_7\Big([b]^2_{\infty,1,\infty}+[\dot b]^2_{\infty,2,\infty}\Big)+\|\operatorname{div}v_\lambda\|_2^2\ , \tag{23}$$

où

$$\varphi(t)=a_1\|v_\lambda\|_0^2+a_2\|\nabla v_\lambda\|_0^2+a_3\|\operatorname{div}v_\lambda\|_0^2+a_4\|\sqrt{\rho_\lambda}\,\dot v_\lambda\|_0^2$$
$$+\,a_5\,k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_0^2+a_6\,k_\lambda\|\nabla\sigma_\lambda\|_1^2+a_7\,k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2+a_8\int_\Omega\rho_\lambda\,\dot v_\lambda\cdot v_\lambda\ ,$$

les a_i $(i=1,...,8)$, étant des constantes (précisées dans la preuve) et

$$\psi(t)=\|v_\lambda\|_3^2+k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2+\|\dot v_\lambda\|_1^2+k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\ .$$

Preuve: En faisant la somme des inégalités (16), (18), (19), (20), (21), (22) multipliées respectivement par $4\mu^2$, μ, μ, μ, μ, $\mu(21)+(2+c_2+c_3+c_4+c_i)$ (c'est-à-dire $4m^2(16)+\mu(18)+\mu(19)+\mu(20)+\mu(21)+(2+c_2+c_3+c_4+c_5)(22)$), on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big[2\mu^2\,\overline{\rho}\|v_\lambda\|_0^2+\frac{2\mu^2}{\overline{\rho}}\,k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_0^2+\mu\int_\Omega\rho_\lambda\dot v_\lambda\cdot v_\lambda+\mu^2\|\nabla v_\lambda\|_0^2\,\mu\beta\|\operatorname{div}v_\lambda\|_0^2+$$
$$+\mu k_\lambda\|\nabla\sigma_\lambda\|_1^2+\frac{1}{2}(2+c_2+c_3+c_4+c_5)\,\|\sqrt{\rho_\lambda}\,\dot v_\lambda\|_0^2+\frac{1}{2\overline{\rho}}(2+c_2+c_3+c_4+c_5)\,k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|\Big]+$$
$$+\Big[4\mu^3\|\nabla v_\lambda\|_0^2+4\mu^2\beta\|\operatorname{div}v_\lambda\|_0^2+\mu k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2+\mu\|Av_\lambda\|_0^2+$$
$$+\,\mu^2\|v_\lambda\|_3^2+\mu k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2+2\mu\|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2+\beta(2+c_2+c_3+c_4+c_5)\,\|\operatorname{div}\dot v_\lambda\|_0^2\Big]\le$$

$$\le c_7\Big[\|b\|_1^2 + \|\dot b\|_0^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + \|\dot v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_1^2 +$$

$$+\|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|v_\lambda\|_3^2\,\|\sigma_\lambda\|_0^2 +$$

$$+ k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_0^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2 + \|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\sigma_\lambda\|_2^2 + \|\operatorname{div} v_\lambda\|_2^2\Big]\,.$$

En posant $a_1 = 2\mu^2\,\overline\rho$, $a_2 = \mu^2$, $a_3 = \beta$, $a_4 = \frac12(2+c_2+c_3+c_4+c_5)$, $a_5 = 2\mu^2\,\frac{1}{\overline\rho}$, $a_6 = \mu$, $a_7 = \frac{1}{2\overline\rho}(2+c_2+c_3+c_4+c_5)$ et $a_8 = \mu$, on obtient (23). ∎

L'inégalité (23) nous permet de montrer que si $\varphi(0)$ est assez petit, $\varphi(T^*)$ restera assez petit. On en déduira que la solution est prolongeable sur $\mathbb{R}^+$. Pour obtenir cette inégalité, on remarque que le seul terme gênant dans (23) est $\|\operatorname{div} v_\lambda\|_2^2$. On le traite alors en particulier. Toutefois l'estimation directe de $\|\operatorname{div} v_\lambda\|_2^2$ nous oblige à estimer $\|\dot\sigma_\lambda\|_2^2$ et donc ne nous permet pas de boucler. Pour parer à cette difficulté, on va faire un changement de cartes locales sur $\partial\Omega$, pour faire apparaître les dérivées normales et tangentielles de $\operatorname{div} v_\lambda$. Comme dans [23] les estimations de $\operatorname{div} v_\lambda$ à l'intérieur de Ω et celles concenant ses dérivées tangentielles proviennent de la somme de $(14)_1$ et $(15)_1$ en y faisant des intégrations par parties. Ainsi les termes $k_\lambda\,\nabla\sigma_\lambda$ et $\overline\rho\operatorname{div} v_\lambda$ s'éliminent. Par contre le problème se posera pour les estimations des dérivées normales de $\operatorname{div} v_\lambda$.

3 – Estimation de $\|\operatorname{div} v_\lambda\|_2^2$

3.1. Estimation de $\|\operatorname{div} v_\lambda\|_2^2$ à l'intérieur de Ω

Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Lemme 3.1.1. *On a l'inégalité*

$$(24)\qquad \frac12\,\frac{d}{dt}\|\chi_0\,\sqrt{\rho_\lambda}\,\nabla v_\lambda\|_0^2 + \frac{k_\lambda}{2\overline\rho}\,\frac{d}{dt}\|\chi_0\,\nabla\sigma_\lambda\|_0^2 + \mu\|\chi_0\,D^2 v_\lambda\|_0^2 + \beta\|\chi_0\,\nabla\operatorname{div} v_\lambda\|_0^2 \le$$

$$\le c_8\Big(k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda\|\dot v_\lambda\|_0^2\,\|\sigma_\lambda\|_2^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2$$

$$+ \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_1^4 + \|\nabla v_\lambda\|_0^2 + \|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2 + \|b\|_1^2\Big) + \delta\|v_\lambda\|_3^2 + \delta\,k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,,$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement et c_8 est une constante (dépendante de δ mais) indépendante de λ.

Preuve: On applique l'opérateur ∂_i respectivement aux équations $(14)_1$ et $(15)_1$, on fait leur produit scalaire respectivement avec $\chi_0\,\partial_i v_\lambda$ et $\frac{k_\lambda}{\bar\rho}\,\chi_{0_2}\,\partial_i\sigma_\lambda$, on intègre sur Ω puis on fait la somme des deux équations. De l'estimation de chaque terme de l'égalité en passant par l'utilisation de (18) on obtient (24). ∎

Lemme 3.1.2. *On a l'inégalité*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\chi_0\sqrt{\rho_\lambda}\,D^2 v_\lambda\|_0^2+\frac{k_\lambda}{2\bar\rho}\frac{d}{dt}\|\chi_0 D^2\sigma_\lambda\|_0^2+\mu\|\chi_0 D^2 v_\lambda\|_0^2+\beta\|\chi_0 D^2\operatorname{div} v_\lambda\|_0^2\le \tag{25}$$

$$\le c_9\Big(k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_3^2+k_\lambda\|\dot v_\lambda\|_1^2\,\|\sigma_\lambda\|_2^2+k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_3^2+\|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2$$

$$+\,k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4+\|v_\lambda\|_2^2+\|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2+\|b\|_1^2\Big)+\delta\|v_\lambda\|_3^2+\delta\,k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\ ,$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement et c_9 est une constante (dépendante de δ mais) indépendante de λ.

Preuve: Le raisonnement analogue à celui du lemme précédent avec un ordre de dérivation égal à 2 nous conduit au lemme. ∎

3.1.1. Estimation de $\|\operatorname{div} v_\lambda\|_2^2$ sur $\partial\Omega$

On procédera comme dans [23]. On choisit comme coordonnées isothermales $\lambda_s(\psi,\varphi)$. On va couvrir $\partial\Omega$ par un nombre fini d'ouverts W_s tels que: $W_s\subset\mathbb{R}^3$ où $s=1,2,..,N$.

Tout élément x de $W_s\cap\Omega$ peut s'écrire de la manière suivante

$$x=\Lambda_s(\psi,\varphi,r)=\lambda_s(\psi,\varphi)+r\cdot n(\lambda_s(\psi,\varphi))\ ,$$

où Λ_s est un difféomorphisme de classe C^3 (pour r assez petit). On omettra dorénavant l'indice s. On choisit un système orthonormé (e_1,e_2,e_3) tel que

$$e_1=\frac{\lambda_\psi}{|\psi|}\,,\qquad e_2=\frac{\lambda_\varphi}{|\varphi|}\,,\qquad e_3=e_1\wedge e_2\ ,$$

où $\lambda_\varphi=\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}$, $\lambda_\psi=\frac{\partial\lambda}{\partial_t\psi}$. Soit $J=Jac\Lambda$ avec $J\in C^2$. On va réecrire le problème (11) dans le nouveau système de coordonnées avec les notations suivantes

$$v_\lambda\to V_\lambda\,,\qquad \rho_\lambda\to R_\lambda\ ,$$

$$\sigma_\lambda\to T_\lambda\,,\qquad b\to B\ ,$$

$$w_\lambda(\sigma_\lambda)\to W_\lambda(T_\lambda)\ .$$

On notera $a_{ki} = a_{ki}(y)$ l'élément (k, i) de la matice $(Jac\Lambda)^{-1}$ $(Jac\Lambda = (D_j\Lambda^i)_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3)$ et $D_k = \frac{\partial}{\partial y_k}$, $k = 1, 2, 3$.

Dans le nouveau système D_τ $(\tau = 1, 2)$ sera la dérivée tangentielle, et D_3 sera la dérivée normale.

Dans $(0, T) \times U$, (11) s'écrit

$$(26)\qquad \begin{cases} R_\lambda\Big[\dot V_\lambda^j + V_\lambda^i(a_{si}\cdot D_s V_\lambda^j) - B\Big] + k_\lambda\, a_{ki}\cdot D_k T_\lambda = \\ \qquad = k_\lambda W_\lambda(T_\lambda)\, D_k T_\lambda + \mu a_{ki}\, D_k(a_{si}\, D_s V_\lambda^j) + \beta a_{ki}\, D_k(a_{si}\, D_s V_\lambda^j)\ , \\ \dot T_\lambda + \overline{\rho}\, a_{sj}\, D_s V_\lambda^j = -(a_{kj}\cdot D_k T_\lambda) V_\lambda^j - T_\lambda(a_{ki}\, D_k V_\lambda^j)\ , \\ V_\lambda|_{\partial U} = 0\ , \\ V_\lambda|_{t=0} = V_\lambda^0\ , \\ T_\lambda|_{t=0} = T_\lambda^0\ . \end{cases}$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\Lambda^{-1}(W))$.

On utilisera au cours de nos calculs les relations

$$(27)\qquad \begin{cases} D_i(Ja_{ij}) = 0 & j = 1, 2, 3\ , \\ \chi\, D_\tau V_\lambda = 0 & \text{sur } \partial U,\quad \tau = 1, 2\ , \\ \chi\, D_\xi D_\tau V_\lambda = 0 & \text{sur } \partial U,\quad \xi, \tau = 1, 2\ , \end{cases}$$

ainsi que

$$(28)\qquad \begin{cases} a_{ki} = e_k^i\ , \\ a_{1i}\cdot a_{3i} = 0\ , \\ a_{2i}\cdot a_{3i} = 0\ . \end{cases} \qquad \text{(conditions d'orthogonalité)}$$

Lemme 3.1.3. *On a l'inégalité*

$$(29)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U J\chi^2 R_\lambda |D_\tau V_\lambda|^2 + \frac{k_\lambda}{2\overline{\rho}}\frac{d}{dt}\int_U J\chi^2 |D_\tau T_\lambda|^2 + \\ + c_{10}\int_U J\chi^2 |D_\tau D_y V_\lambda|^2 + \beta\int_U J\chi^2 |D_\tau(a_{si} D_s V_\lambda^j)|^2 \leq \\ \leq c_{11}\Big(k_\lambda \|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\, \|v_\lambda\|_2^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\, \|v_\lambda\|_1^2 + \|\dot v_\lambda\|_1^2\, \|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_1^2\, \|v_\lambda\|_3^2 \\ + \|v_\lambda\|_1^2\, \|v_\lambda\|_3^2 + \|\nabla v_\lambda\|_0^2 + \|\nabla \dot v_\lambda\|_0^2 + \|b\|_1^2\Big) + \delta\|v_\lambda\|_3^2 + \delta\, k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\ .$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement, c_{10} et c_{11} sont deux constantes indépendantes de λ (c_{11} étant dépendante de δ).

Preuve: On applique l'opérateur D_τ respectivement aux équations $(26)_1$ et $(26)_2$, on les multiplie respetivement par $J\chi^2\,D_\tau V_\lambda^j$ et $\frac{k_\lambda}{\bar\rho}\,J\chi^2\,D_\tau T_\lambda$, on intègre sur U puis on fait la somme des deux équations on obtient une égalité où apparaît le terme suivant
$$\mu\int_U J\chi^2\,a_{si}\,D_\tau D_s V_\lambda^j\cdot a_{ki}\,D_\tau D_k V_\lambda^j\ .$$
On pose
$$(b_{sk})_{s,k}=(a_{si}\cdot a_{ki})_{s,k}=B=(jac\Lambda)^{-1}\,(jac\Lambda)^t\ .$$
B est definie positive (dû à la nature de la transformation Λ qui respecte l'ellipticité), donc $\exists\,c_{10}>0$ tel que
$$\mu\int_U J\chi^2\,b_{sk}\,D_\tau D_s V_\lambda^j\cdot D_\tau D_k V_\lambda^j\le c_{10}\,\mu\int_U J\chi^2\,|D_\tau D_k V_\lambda|^2\ .$$
En utilisant (18) pour l'estimation des quatres termes on obtient (29). ∎

Lemme 3.1.4. *On a l'inégalité*

$$\begin{aligned}(30)\qquad &\frac12\,\frac{d}{dt}\int_U J\chi^2 R_\lambda|D_\tau D_\xi V_\lambda|^2+\frac{k_\lambda}{2\bar\rho}\,\frac{d}{dt}\int_U J\chi^2|D_\tau D_\xi T_\lambda|^2+\\ &\quad+c_{12}\int_U J\chi^2|D_\tau D_\xi D_y V_\lambda|^2+\beta\int_U J\chi^2|D_\tau D_\xi(a_{ki}D_kV_\lambda^j)|^2\le\\ &\le c_{13}\Big(k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_3^2+k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_3^2+\|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2+k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2\\ &\quad+\|v_\lambda\|_2^2\,\|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2+k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4\|b\|_1^2\Big)+\delta\|v_\lambda\|_3^2+\delta\,k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\ ,\end{aligned}$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement, c_{12} et c_{13} sont deux constantes indépendantes de λ (c_{13} étant dépendante de δ).

Preuve: Le raisonnement est analogue au lemme précédent en prenant des dérivées tangentielles d'ordre 2. En utilisant (27) et la relation suivante
$$\mu\int_U J\chi^2\,a_{si}\,D_\xi D_\tau D_s V_\lambda^j\cdot a_{ki}D_\xi D_\tau D_k V_\lambda^j\le c_{12}\,\mu\int_U J\chi^2\,|D_\xi D_\tau D_y V_\lambda^j|^2$$
on obtient (30). ∎

On remarque que l'on ne peut pas trouver d'estimation sur les dérivées normales de $\operatorname{div} v_\lambda$ par la méthode des deux lemmes précédents. Ceci est dû au fait que les intégrales de surfaces de $\operatorname{div} v_\lambda$ ne s'annullent pas après avoir intégrer par parties. On va donc prendre la dérivée normale de $(11)_2$ et faire le produit scalaire de $(11)_1$ par n (la normale extérieure à $\partial\Omega$) qui deviennent dans le nouveau système comme suit

$$(31)\qquad \begin{aligned} &\beta\, D_3(a_{si}\, D_s V_\lambda^i) = -k_\lambda\, D_3 T_\lambda - \mu(a_{ki}\, D_k(a_{si}\, D_s V_\lambda))\cdot e_3 - W_\lambda(T_\lambda)\cdot D_3 R_\lambda \\ &\qquad\qquad - R_\lambda(\partial_t V_\lambda + V_\lambda^i(a_{si}\, D_s V_\lambda^i) - B)\cdot e_3\ , \\ &D_3\,\partial_t T_\lambda = -\overline{\rho}\, D_3(a_{kj}\, D_k V_\lambda^j) - D_3(a_{ki}\cdot D_k T_\lambda)\, V_\lambda^j - a_{kj} D_k T_\lambda \cdot D_3 V_\lambda^j \\ &\qquad\qquad - D_3 T_\lambda(a_{kj}\, D_k V_\lambda^i) - T_\lambda\cdot D_3(a_{kj}\, D_k V_\lambda^i)\ . \end{aligned}$$

Lemme 3.1.5. *On a l'inégalité*

$$(32)\qquad (\mu+\beta)\int_U J\chi^2\,|D_3(a_{si}\,D_s V_\lambda^j)|^2 + \frac{k_\lambda}{2\overline{\rho}}\,\frac{d}{dt}\int_U J\chi^2\,|D_3 T_\lambda|^2 \le$$

$$\le c_{14}\int_U J\chi^2\,|D_\tau D_y V_\lambda|^2 + c_{14}\Big(k_\lambda\|v_\lambda\|_2^2\,\|\sigma_\lambda\|_1^2 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|\nabla v_\lambda\|_0^2 + \|b\|_0^2$$

$$+ k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_1^4 + \|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2\Big) + \delta\|v_\lambda\|_3^2\ ,$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement et c_{14} est une constante (dépendante de δ mais) indépendante de λ.

Preuve: On ajoute à l'équation $(31)_1$ le terme $\mu\, J\chi^2\, D_3(a_{si}\, D_s V_\lambda^j)$ et on la multipie par $J\chi^2\, D_3(a_{si}\, D_s V_\lambda^j)$. On multiplie $(31)_2$ par $\frac{k_\lambda}{\overline{\rho}}\, J\chi^2\, D_3 T_\lambda$, on intègre sur U puis on fait la somme des deux équations. D'autre part on a

$$(33)\qquad (a_{ki}\cdot D_k(a_{si}\, D_s V_\lambda))\cdot e_3 - D_3(a_{si}\, D_s V_\lambda^j) =$$

$$= a_{3i}\cdot a_{3i}\, D_3 D_3 V_\lambda\cdot e_3 + a_{3i}(D_3 a_{3i})\, D_3 V_\lambda\cdot e_3 + a_{\tau i}\cdot D_\tau(a_{si}\, D_s V_\lambda)\cdot e_3$$

$$+ a_{3i}\cdot D_3(a_{\tau i}\cdot D_\tau V_\lambda)\cdot e_3 + a_{3i}\, D_3 D_3 V_\lambda^i - (D_3 a_{3i})\, D_3 V_\lambda^i - D_3(a_{\tau i}\cdot D_\tau V_\lambda^i)\ .$$

En utilisant (28) et (33) on obtient

$$(34)\qquad (a_{ki}\cdot D_k(a_{si}\, D_s V_\lambda))\cdot e_3 - D_3(a_{si}\, D_s V_\lambda^j) = a_{3i}(D_3 a_{3i})\, D_3 V_\lambda\cdot e_3 +$$

$$+ a_{\tau i}(D_\tau a_{si})\, D_s V_\lambda\cdot e_3 + a_{\tau i}\cdot a_{\xi i}\, D_\xi D_\tau V_\lambda\cdot e_3 + a_{3i}(D_3(a_{\tau i})\, D_\tau V_\lambda)\cdot e_3$$

$$- (D_3 a_{3i})\, D_3 V_\lambda^i - (D_3 a_{\tau i})\, D_\tau V_\lambda^i - a_{\tau i}\, D_3 D_\tau V_\lambda^i),\quad \text{pour } \xi,\tau = 1,2\ .$$

En utilisant (34) et en estimant chaque terme, on obtient (32). ∎

Lemme 3.1.6. *On a l'inégalité*

$$(35)\qquad (\mu+\beta)\int_U J\chi^2\,|D_\xi D_3(a_{si}\,D_s V_\lambda^j)|^2 + \frac{k_\lambda}{2\overline{\rho}}\,\frac{d}{dt}\int_U J\chi^2\,|D_\xi D_3 T_\lambda|^2 \le$$

$$\le c_{15}\int_U J\chi^2\,|D_\xi D_\tau D_y V_\lambda|^2 + c_{16}\Big(k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|v_\lambda\|_2^2 + \|b\|_1^2$$

$$+ k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4 + \|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2\Big) + \delta\|v_\lambda\|_3^2\ ,$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement, c_{15} et c_{16} sont des constantes indépendantes de λ, c_{16} étant dépendante de δ.

Preuve: Comme dans le lemme précédent, l'égalité (34) (c'est la même qunantité que $(\Delta v_\lambda \cdot n - \nabla \operatorname{div} v_\lambda \cdot n)$) ne contient pas de dérivées normales d'ordre 2. On prend donc la dérivée tangentielle D_ξ respectivement des équations (34) et (31), on les multiplie respectivement par $D_\xi D_3(a_{si}\, D_s V_\lambda^i)$ et $(k_\lambda/\overline{\rho})\, D_\xi D_3 T_\lambda$ et on intègre sur U puis on fait la somme des deux équations. On obtient une inégalité où il faudra estimer chaque terme pour avoir (35). ∎

Lemme 3.1.7. *On a l'innégalité*

$$
\begin{aligned}
(36)\qquad & (\mu+\beta)\int_U J\chi^2\, |D_3 D_3(a_{si}\, D_s V_\lambda^j)|^2 + \frac{k_\lambda}{2\overline{\rho}}\frac{d}{dt}\int_U J\chi^2\, |D_3 D_3 T_\lambda|^2 \le \\
&\le c_{17}\int_U J\chi^2\, |D_\xi D_3 D_y V_\lambda|^2 + c_{18}\Big(k_\lambda \|\sigma_\lambda\|_2^2\, \|\dot v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda \|\sigma_\lambda\|_2^2\, \|v_\lambda\|_3^2 + \|v_\lambda\|_2^2 + \|b\|_1^2 \\
&+ k_\lambda^2 \|\sigma_\lambda\|_2^4 + \|\nabla \dot v_\lambda\|_0^2\Big) + \delta \|v_\lambda\|_3^2\ ,
\end{aligned}
$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement, c_{17} et c_{18} sont des constantes indépendantes de λ, c_{18} étant dépendante de δ.

Preuve: Le raisonnement est analogue au lemme précédent, à la différence que l'on prend la dérivée normale D_3 des équations (31) et (34) et qu'on les multiplie respectivement par $D_3 D_3(a_{si} D_s V_\lambda^j)$ et $(k_\lambda/\overline{\rho}) D_3 D_3 T_\lambda$. En estimant chaque terme de l'égalité, on obtient (36). ∎

Lemme 3.1.8. *On a l'inégalité*

$$
\begin{aligned}
(37)\qquad & (\mu+\beta)\int_U J\chi^2\, |D_\tau D_y^2 V_\lambda^2| \le c_{19}\int_U J\chi^2\, |D_\tau D_y(a_{jk}\, D_k V_\lambda^j)|^2 + \\
&+ c_{20}\Big(\|v_\lambda\|_1^2\, \|v_\lambda\|_3^2 + \|b\|_1^2 + k_\lambda^2 \|\sigma_\lambda\|_2^4 + \|\nabla \dot v_\lambda\|_0^2\Big) + \delta \|v_\lambda\|_3^2 + \delta\, k_\lambda \|\sigma_\lambda\|_2^2\ ,
\end{aligned}
$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement, c_{19} et c_{20} sont des constantes indépendantes de λ, c_{20} étant dépendante de δ.

Preuve: On prend la dérivée D_ξ respectivement de $(31)_1$ et $(32)_2$ et on les multiplie toutes les deux par χ, on obtient dans le nouveau système de cartes locales,

$$
\begin{cases}
-\mu\, \Delta((\chi\, D_\tau V_\lambda)\, \Lambda^{-1}) + k_\lambda\, \nabla((\chi\, D_\tau T_\lambda)\, \Lambda^{-1}) = H & \text{dans } (0,T)\times U, \\
\overline{\rho}\, \operatorname{div}((\chi\, D_\tau V_\lambda)\, \Lambda^{-1}) = K & \text{dans } (0,T)\times U, \\
(\chi\, D_\tau V_\lambda)\, \Lambda^{-1} = 0 & \text{sur } (0,T)\times \partial U\ .
\end{cases}
$$

En faisant le même travail que le Lemme 2.3.2 au problème ci-dessus et en estimant chaque terme on obtient (37). ∎

3.2. Estimation a priori et existence de la solution

Lemme 3.2.1. *On a l'inégalité*

$$\begin{aligned}(38)\qquad &\frac{d}{dt}\Big[\sqrt{\rho_\lambda}\,\nabla v_\lambda\Big]_0^2 + k_\lambda \frac{d}{dt}|[\nabla\sigma_\lambda]|_0^2 + \|\,|\nabla \operatorname{div} v_\lambda|\,\|_1^2 \le \\ &\le c_{21}\Big(\|\nabla v_\lambda\|_0^2 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4 + \|\dot v_\lambda\|_0^2 \\ &\quad + \|b\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|\dot v_\lambda\|_0^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 \\ &\quad + \|\dot v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_1^2\Big) + \delta\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda\,\delta\|\sigma_\lambda\|_2^2\ ,\end{aligned}$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement et c_{21} est une constante (dépendante de δ mais) indépendante de λ.

$\|\,|\cdot|\,\|_1$, $\|\cdot\|_1$, $|[\cdot]|_1$ sont des normes équivalentes, et $[\cdot]_0$ est un norme qui ne contient pas de dérivées normales.

Preuve: En faisant la somme des inégalités (24), (29), (32) multipliées respectivement par 1, c_{14}, c_{10} (c'est-à-dire $(24) + c_{14}(29) + c_{10}(32)$), on arrive à éliminer

$$\int_U J\chi^2\,|D_\tau D_y V_\lambda|^2\ ,$$

ce qui nous permettra d'obtenir (38). ∎

Lemme 3.2.2. *On a l'inéalité*

$$\begin{aligned}(39)\qquad &\frac{d}{dt}\Big[\sqrt{\rho_\lambda}\,D^2 v_\lambda\Big]_0^2 + k_\lambda \frac{d}{dt}|[D^2\sigma_\lambda]|_0^2 + \|\,|D^2 \operatorname{div} v_\lambda|\,\|_0^2 \le \\ &\le c_{22}\Big(\|v_\lambda\|_2^2 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|b\|_1^2 + \|\nabla\dot v_\lambda\|_0^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4 \\ &\quad + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_3^2\Big) + \delta\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda\,\delta\|\sigma_\lambda\|_2^2\ .\ ,\end{aligned}$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement et c_{22} est une constante (dépendante de δ mais) indépendante de λ.

Preuve: De la même manière que le lemme précédent, en faisant la somme suivante $c_{15}(30) + c_{12}(35) + (\mu+\beta)(36) + c^{17}(37) + (25)$, on obtient l'estimation (39). ∎

Proposition 3.2.1. *Il existe des constantes c_{23} indépendante de λ telle que*

$$
\begin{aligned}
(40)\qquad \frac{d}{dt}\Big(&\|v_\lambda\|_0^2 + [\sqrt{\rho_\lambda}\,\nabla v_\lambda]_0^2 + [\sqrt{\rho_\lambda}\,D^2 v_\lambda]_0^2 + k_\lambda|[\sigma_\lambda]|_2^2 + \\
&+ k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2 + \|\sqrt{\rho_\lambda}\,\dot v_\lambda\|_0^2\Big) + \|\nabla \dot v_\lambda\|_0^2 + \|\,|\operatorname{div} v_\lambda|\,\|_2^2 \le \\
&\le c_{23}\Big(\|b\|_1^2 + \|\dot b\|_0^2 + k_\lambda^2\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\sigma_\lambda\|_2^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2 \\
&\quad + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2 \\
&\quad + k_\lambda^2\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\sigma_\lambda\|_2^2 + \|\dot v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_0^2 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 \\
&\quad + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|\dot v_\lambda\|_0^2 + \delta\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda\,\delta\|\sigma_\lambda\|_2^2\ ,
\end{aligned}
$$

où δ est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement et c_{23} est une constante (dépendante de δ mais) indépendante de λ.

Preuve: En faisant la somme de $(c_{21}+1)\,(16) + \mu(38) + (c_{21}+1)\,(22)$, on arrive à éliminer $\|v_\lambda\|_1^2$ et $\|\dot v_\lambda\|_0^2$ dans (38).

On utilisera l'estimation suivante, dû au Lemme 2.3.2

$$
(41)\qquad \|v_\lambda\|_2^2 \le c_{24}\Big(\|\dot v_\lambda\|_0^2 + \|b\|_0^2 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|\operatorname{div} v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|\sigma_\lambda\|_1^2\Big)\ .
$$

On fait la somme des inégalités (39) et (41), multipliées respectivement par 1 et c_{22} (c'est-à-dire $c_{22}(41) + (39)$), on arrive à se débarrasser de $\|v_\lambda\|_2^2$ dans (39). Ensuite en choisissant des constantes appropriées pour les estimations précédentes ainsi que l'estimation (16), on obtient (40). ∎

Proposition 3.2.2. *Il existe des constantes c_{25} indépendante de λ telle que*

$$
\begin{aligned}
(42)\qquad \frac{d}{dt}\Big(&\varphi(t) + [\sqrt{\rho_\lambda}\,\nabla v_\lambda]_0^2 + [\sqrt{\rho_\lambda}\,D^2 v_\lambda]_0^2 + \psi(t)\Big) \le \\
&\le c_{25}\Big(\|b\|_1^2 + \|\dot b\|_0^2 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda^2\|\sigma_\lambda\|_2^4 \\
&\quad + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|\dot v_\lambda\|_0^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2\,\|v_\lambda\|_1^2 + \|v_\lambda\|_1^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2 \\
&\quad + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_1^2\,\|v_\lambda\|_3^2 + k_\lambda^2\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\sigma_\lambda\|_2^2 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2 \\
&\quad + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_1^2\,\|\dot v_\lambda\|_0^2 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|\dot v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2\,\|v_\lambda\|_3^2\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Preuve: Il suffit de faire la somme de $c_7(40) + (23)$ pour éliminer $\|\operatorname{div} v_\lambda\|_2^2$ dans (23) et par suite (42). ∎

On pose

$$\varphi_0(t) = a_1\|v_\lambda\|_0^2 + a_2\|\nabla v_\lambda\|_0^2 + a_3\|\operatorname{div} v_\lambda\|_0^2 + a_4\|\sqrt{\rho_\lambda}\,\dot v_\lambda\|_0^2$$
$$+ a_5\,k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_0^2 + a_6\,k_\lambda\|\nabla\sigma_\lambda\|_1^2 + a_7\,k_\lambda\|\dot\sigma_\lambda\|_0^2$$
$$+ a_8\int_\Omega \rho_\lambda\,\dot v_\lambda\cdot v_\lambda + [\sqrt{\rho_\lambda}\,\nabla v_\lambda]_0^2 + [\sqrt{\rho_\lambda}\,D^2 v_\lambda]_0^2\ .$$

On pourra donc écrire l'estimation (42) sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt}\varphi_0(t) + \psi(t) \le c_{25}\,\psi(t)\,(\varphi_0(t) + \varphi_0^2(t)) + c_{24}(\|b\|_1 + \|\dot b\|_0^2)\ , \tag{43}$$

où $c_{25} \ge 1$.

Il est facile de voir que: $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$ on a l'inégalité suivante

$$\psi(t) \ge c_{26}\,\varphi_0(t)\ , \tag{44}$$

$c_{26} \le 1$ étant une constante indépendante de t.

3.3. Existence globale

Lemme 3.3.1. *Soient Ω de classe C^4 et $(v_\lambda, \rho_\lambda)$ solution de (1) sur Q_T. Si*

$$\varphi_0(0) \le \frac{\gamma}{c_{25}}, \qquad \gamma \in]0, \tfrac12]\ , \tag{45}$$

et

$$[b]_{\infty,1,\infty}^2 + [\dot b]_{\infty,0,\infty}^2 < \frac14\,\frac{c_{26}}{c_{25}}\,\gamma\ , \tag{46}$$

alors

$$\varphi_0(t) \le \frac{\gamma}{c_{25}}, \qquad \forall\, t \in [0, T]\ . \tag{47}$$

Preuve: Pour la démonstration, on renvoie le lecteur à l'article de Valli [23]. ∎

Lemme 3.3.2. *S'il existe une constante c_{27} indépendante de λ, suffisamment petite telle que*

$$\textit{si}\ \ \varphi_0(t) \le c_{27} \quad \textit{alors}\ \ \frac{\overline{\rho}}{2} \le \rho_\lambda(x,t) \le \frac32\overline{\rho}\ .$$

Preuve: On utilisera $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$. ∎

Lemme 3.3.3. *Il existe une constante c_{28} indépendante de λ telle que si $\overline{\rho}/2 \leq \rho_\lambda(x,t) \leq (3/2)\overline{\rho}$ alors on a*

$$\frac{1}{k_\lambda}\|v_\lambda\|_2^2 + \|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda\|_2^2 \leq c_{28}(\varphi_0(t) + \varphi_0^2(t)) \ . \tag{48}$$

Preuve: Il suffit d'estimer l'équation $(11)_1$ que l'on divise par $\sqrt{k_\lambda}$.

On suppose que

$$\varphi_0(0) \leq \min\Big(\frac{1}{c_{25}}, c_{27}\Big) = d \ ,$$

et que

$$[b]^2_{\infty,1,\infty} + [\dot{b}]^2_{\infty,0,\infty} \leq \frac{1}{4}\,\frac{c_{25}}{c_{26}}\,d \ ,$$

alors on a d'après de Lemme 3.3.2

$$\frac{\overline{\rho}}{2} \leq \inf_{\overline{\Omega}}(\sigma^0_\lambda + \overline{\rho}) \leq \sup_{\overline{\Omega}}(\sigma^0_\lambda + \overline{\rho}) \leq \frac{3}{2}\,\overline{\rho} \ , \tag{49}$$

et d'après le Lemme 3.3.3 on a

$$\frac{1}{k_\lambda}\|v^0_\lambda\|_2^2 + k_\lambda\|\sigma^0_\lambda\|_2^2 + \|v^0_\lambda\|_1^2 \leq c_{28}\,d \ . \tag{50}$$

Alors d'après le Théorème 2.2.1, on a une solution de (1) sur Q_{T^*} telle que T^* dépend seulement de Ω, μ, ξ, $\overline{\rho}$, d, k_λ, c_{25}, c_{26} et σ_λ satisfait à

$$\frac{\overline{\rho}}{4} \leq (\sigma_\lambda(x,t) + \overline{\rho}) \leq 3\,\overline{\rho} \quad \text{sur} \ \ Q_{T^*} \ .$$

D'après le Lemme 3.3.1,

$$\varphi_0(t) \leq d \quad \text{sur} \ \ [0, T^*] \ .$$

On réutilise le Lemme 3.3.2 et cela donne

$$\frac{\overline{\rho}}{2} \leq (\sigma_\lambda(x,T^*) + \overline{\rho}) \leq \frac{3}{2}\,\overline{\rho} \ ,$$

puis le Lemme 3.3.3 qui donne

$$\frac{1}{k_\lambda}\|v_\lambda(T^*)\|_2^2 + k_\lambda\|\sigma_\lambda(T^*)\|_2^2 + \|v_\lambda(T^*)\|_1^2 \leq c_{28}\,d \ . \tag{51}$$

On réinitialise à T^*, la condition (51) donne (d'après le Théorème 2.2.1) l'existence d'un temps T^{**} dépendant seulement de Ω, μ, ξ, $\overline{\rho}$, d, k_λ, c_{25}, c_{26}, c_{28}, tel que

$(v_\lambda, \rho_\lambda)$ soit solution de (1) sur $[T^*, T^{**}]$. Or T^* lui-même dépend de Ω, μ, ξ, $\overline{\rho}$, d, k_λ, c_{25}, c_{26}, c_{27}, donc $T^* = T^{**}$. On répéte le processus sur $[0, nT^*]$, $n \in N^*$, et on obtient une solution globale de (1). ∎

Théorème 3.3.1. *Soient Ω de classe C^4, $p_\lambda \in C^3$, $\frac{dp_\lambda}{d\rho} > 0$,*

$$b \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1)\,, \qquad \dot{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2)\ ,$$
$$v_\lambda^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\,, \qquad \rho_\lambda^0 \in H^2(\Omega)\ .$$

On suppose que

$$\varphi_0(0) \le d\ ,$$
$$[b]^2_{\infty,1,\infty} + [\dot{b}]^2_{\infty,0,\infty} \le \frac{1}{4}\,\frac{c_{25}}{c_{26}}\,d\ ,$$

alors il existe une solution unique pour le problème (1) vérifiant

$$v_\lambda \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^+; H^3) \cap C_b^0(\mathbb{R}^+; H^2)\ ,$$
$$\dot{v}_\lambda \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^+; H^1) \cap C_b^0(\mathbb{R}^+; L^2)\ ,$$
$$\rho_\lambda \in C_b^0(\mathbb{R}^+; H^2)\,, \qquad \dot{\rho}_\lambda\, C_b^0(\mathbb{R}^+; H^1)\ ,$$
$$\varphi_0(t) \le d \quad \textit{sur}\ \ \mathbb{R}^+\ ,$$
$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \ \ \frac{\overline{\rho}}{2} \le \inf(\sigma_\lambda + \overline{\rho}) \le \sup(\sigma_\lambda + \overline{\rho}) \le \frac{3}{2}\,\overline{\rho}\ ,$$
$$\frac{1}{k_\lambda}\,\|v_\lambda\|_2^2 + \|v_\lambda\|_1^2 + k_\lambda \|\sigma_\lambda\|_2^2 \le c_{27}\, d\ .$$

De plus si

$$b \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1) \quad \textit{et} \quad \dot{b} \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2)\ ,$$

alors on a aussi

$$v_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^+; H^3)\,, \qquad \dot{v}_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1)\ ,$$
$$\sigma_\lambda = \rho_\lambda - \overline{\rho} \ \in\ L^2(\mathbb{R}^+; H^2)\,, \qquad \dot{\rho}_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1)\ .$$

4 – Passage à la limite

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème 3.3.1, on a*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \ \exists\, \lambda_0 > 0, \ \ \forall\, \lambda \ge \lambda_0, \quad \|v_\lambda - v_\infty\|_{L^2(Q_T)} + k_\lambda \|\sigma_\lambda\|_{L^2(Q_T)} < \varepsilon\ ,$$

où v_∞ est solution du problème incompressible suivant

$$\text{(52)} \qquad \begin{cases} \dot v_\infty + (v_\infty\cdot\nabla)\, v_\infty - b = \frac{1}{\rho}(-\nabla\pi + \mu\,\Delta v_\infty) & \textit{dans } Q_T,\\ \operatorname{div} v_\infty = 0 & \textit{dans } Q_T,\\ v_\infty = 0 & \textit{sur } \Sigma_T,\\ v_\infty(0) = v^0 & \textit{dans } \Omega\ , \end{cases}$$

π étant dans $H^1(Q_T)$.

Preuve: Sous les hypothèses du Théorème 3.3.1 on a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \qquad \varphi_0(t) \le d\ ,$$

d'etant une constante indépendante de λ. On en déduit que v_λ et $\sqrt{k_\lambda}\,\sigma_\lambda$ convergent faiblement dans $H^1(Q_T)$. L'immersion de $H^1(Q_T)$ dans $L^2(Q_T)$ étant compact, il existe une suite $(v_{\lambda_m}, \sigma_{\lambda_m})$ telle que

$$\text{(53)} \qquad v_{\lambda_m} \to \lambda_{m\to\infty}\, v_\infty \quad \text{dans } \ L^2(Q_T) \text{ fort}\ ,$$

$$\text{(54)} \qquad \sigma_{\lambda_m} \to \lambda_{m\to\infty} 0 \quad \text{dans } \ L^2(Q_T) \text{ fort}\ .$$

Donc on peut en extraire une sous-suite $(v_{\lambda_n}, \sigma_{\lambda_n})$ telle que

$$v_{\lambda_n} \to v_\infty \quad \text{presque partout sur } \ Q_T\ ,$$

$$\sigma_{\lambda_n} \to 0 \quad \text{presque partout sur } \ Q_T\ .$$

On fait le produit scalaire de $(1)_1$ et $(1)_2$ avec η, on obtient

$$\text{(55)} \qquad \begin{cases} \langle \rho_{\lambda_n}\dot v_{\lambda_n}, \eta\rangle + \langle \rho_{\lambda_n}(v_{\lambda_n}\cdot\nabla) v_{\lambda_n}, \eta\rangle - \langle \rho_{\lambda_n} b, \eta\rangle = \\ \qquad = -\langle \nabla p_{\lambda_n}, \eta\rangle + \mu\langle \Delta v_{\lambda_n}, \eta\rangle + \beta\langle \nabla \operatorname{div} v_{\lambda_n}, \eta\rangle\ ,\\ \langle \dot\rho_{\lambda_n}, \eta\rangle + \langle \nabla\rho_{\lambda_n} v_{\lambda_n}, \eta\rangle + \langle \rho_{\lambda_n} \operatorname{div} v_{\lambda_n}, \eta\rangle = 0\ . \end{cases}$$

Par passage à la limite sur λ_n, on a

$$\text{(56)} \qquad \begin{cases} \langle \overline\rho\,\dot v_\infty, \eta\rangle + \langle \overline\rho(v_\infty\cdot\nabla) v_\infty, \eta\rangle - \langle \overline\rho\, b, \eta\rangle - \langle \Delta v_\infty, \eta\rangle = 0\ ,\\ \langle \overline\rho \operatorname{div} v_\infty, \eta\rangle = 0\ . \end{cases}$$

Ce qui donne que

$$\exists\, \pi \in H^1(Q_T) \qquad \text{tel que } \ \overline\rho(\dot v_\infty + (v_\infty\cdot\nabla) v_\infty - b) - \Delta v_\infty = \nabla\pi\ ,$$

$(v_\infty, \overline\rho)$ est solution du problème (52). ∎

ACKNOWLEDGEMENTS – I thank my thesis' advisor, Assia Lagha, under whose guidance the results reported here were obtained. I also owe thanks to Hugo Beirão da Veiga, Hisao Fujita-Yashima, Alberto Valli for helpful discussions and letters.

REFERENCES

[1] Agmon, Douglas and Nirenberg – Estimates near the boundary for elliptic differential equations satisfying general boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.,* 17 (1964), 35–92.

[2] Beirão da Veiga, H. – Stationary motions and the incompressible limit for compressible viscous fluids, *Houston J. Math.,* 13(4) (1987), 527–544.

[3] Beirão da Veiga, H. – An L^p theory for the n dimensional stationary compressible Navier-Stokes equations and the incompressible limit for compressible fluids. The equilibrium solutions, *Comm. Math. Phys.,* 109 (1987), 229–248.

[4] Beirão da Veiga, H. – Diffusion on viscous fluids. existence and asymptotic properties of solutions, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* Classe di Scienze, Serie 4, 10(2) (1983).

[5] Bessaih, H. – *Limite incompressible de modèles de fluides compressibles*, Thèse de Magister, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene, 1992.

[6] Brezis, H. – *Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications*, Masson, 1983.

[7] Fujita, H. and Yashima – Existence et régularité de la solution des équations de Navier-Stokes compressibles stationnaires, *Preprints di Matematica,* 89 (1990).

[8] Fujita, H., Yashima, Padula, M. and Novotny, A. – Équation monodimensionnelle d'un gas visqueux et calorifère avec des conditions initiales moins réstrictives, *Ric. Mat.,* 42 (1993), 199–248.

[9] Hoff, D. – Global well posedness of the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations of nonisentropic flow with discontinuous initial data, *J. Diff. Eqs.,* 95 (1992), 33–74.

[10] Lagha, A. – *Limite des équations d'un fluide compressible lorsque la compressibiité tend vers zero*, Pré-publication, Fasc. 37, Univ. Paris Nord, 1980.

[11] Lions, J.L. – *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod–Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[12] Matsumura and Nishida – Initial value problem for the equations of compressible viscous and heat conductive gas, *J. Math. Kyoto Univ.,* 20 (1980), 67–104.

[13] Matsumura and Nishida – Initial value problem for the equations of compressible viscous and heat conductive fluid, *Lect. Notes in Num. Appl. Ann.,* 5 (1982), 153–170.

[14] Majda, A. – *Compressible fluid flow and system of conservation laws in several space variables*, Springer.

[15] Majda and Klainerman – Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible fluids, *Comm. Pure Appl. Math.,* 34 (1981), 481–524.

[16] Necãs, J. – *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, 1967.

[17] PADULA, M. – Existence of global solutions for 2 dimensional viscous compressible flows, *J. Funct. Anal.,* 69 (1986), 1–20.

[18] PADULA, M. – Existence and uniqueness for viscous steady compressible motions, *Arch. Rat. Mech.,* 97(2) (1987), 89–102.

[19] NOVOTNY and PADULA – *Existence of steady flows for viscous heat-conductive gas with large potential forces* (à paraître), Preprint no. 164.

[20] TARTAR, L. – *Équations de Navier–Stokes*, Université Paris VI et CNRS, No. enregistrement 74019.

[21] TEMAM, R. – *Navier–Stokes equations*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, (1977), 427–443.

[22] TRITTON, D.J. – *Physical fluid dynamics*, Van Nostrand Reinhold, 1977.

[23] VALLI, A. – Periodic and stationary solutions for compressible Navier–Stokes equations via a stability method, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* (1984), 607–647.

[24] VALLI, A. and ZAJACZKOWSKI, W.M. – Navier–Stokes equations for compressible fluids: global existence and qualitative properties of the solutions in the general case, *Comm. Math. Phys.,* 103 (1986), 259–296.

[25] VALLI, A. – On the existence of stationary solutions to compressible Navier–Stokes equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non-Linéaire,* 4 (1987), 99–113.

[26] VALLI, A. and ZAJACZKOWSKI, W.M. – About the motion of non homogeneous ideal incompressible fluids, *Non-Linear Analysis Theory Methods and Applications,* 12(1) (1988), 43–50.

[27] VALLI, A. – *Existence results for the Euler and Navier–Stokes equations for non homogeneous and compressible fluids*, Università degli studi di Trento, UTM 244, Giugno, 1988.

H. Bessaih,
Scuola Normale Superiore, Pisa,
Piazza dei Cavalieri, 7, 56126 Pisa – ITALIA