PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 55 Fasc. 3 – 1998

EXISTENCE GLOBALE ET STABILISATION INTERNE NON LINÉAIRE D'UN SYSTÈME D'ÉLASTICITÉ

A. Guesmia

Résumé: Dans ce travail, on étudier l'existence, l'unicité et la stabilisation de la solution d'un système d'élasticité par un feedback interne non linéaire, on applique la théorie du semi-groupe non linéaire et des inégalités d'intégrales.

1 – Introduction

Soit Ω un ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, ...)$ de frontière Γ de classe C^2 et soit a_{ijkl}, $i, j, k, l = 1, ..., n$ un ensemble des fonctions dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ tel que

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} \quad \text{sur} \ \ \Omega$$

et vérifie pour un nombre $\alpha > 0$ la condition d'ellipticité suivante

$$a_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} \geq \alpha\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij} \quad \text{sur} \ \ \Omega \tag{1.1}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. Soit $g_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ un ensemble des fonctions continues et croissantes tel que $g_i(0) = 0$. (Tout indice ouvert désigne la répétition de cet indice de 1 à n et tout indice répeté dans le produit désigne la somme sur cet indice de 1 à n).

Pour une fonction donnée $u = (u_1, ..., u_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ posons

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i})\,, \qquad \sigma_{ij} = a_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \quad \text{sur} \ \ \Omega\ ,$$

où $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ et $u_{j,i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. En cas de nécéssité de précision on note $\varepsilon_{ij}(u)$ et $\sigma_{ij}(u)$ au lieu de ε_{ij}, σ_{ij}.

Received: February 6, 1997; *Revised*: September 16, 1997.
1991 Mathematics Subject Classification: 35L55, 35B40.
Keywords and Phrases: Existence global, Uniqueness, Stabilization, Nonlinear damping, Integral inequality, Elasticity.

Considérons le système

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
u_i'' - \sigma_{ij,j} + g_i(u_i') = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ , \\
u_i = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ , \\
u_i(0) = u_i^0 \ \text{ et } \ u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans } \Omega , \\
i = 1, ..., n \ , &
\end{array}
\right.
\tag{1.2}
$$

où $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $' = \frac{\partial}{\partial t}$ et $\sigma_{ij,j} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$. Définissons l'énergie de la solution par la formule

$$
E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (u_i' \, u_i' + \sigma_{ij} \, \varepsilon_{ij}) \, dx \, , \qquad t \in \mathbb{R}^+ \ ,
\tag{1.3}
$$

on remarque que E est une fonction positive et on a

$$
E'(t) = - \int_\Omega u_i' \, g_i(u_i') \, dx \leq 0
\tag{1.4}
$$

(remarquer que $x \, g_i(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$); alors l'énergie est décroissante.

Le but de ce travail est de montrer l'existence, l'unicité de la solution et d'obtenir la stabilité du système (1.2) sous des conditions convenables sur les fonctions g_i.

On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$
|g_i(x)| \leq c \, (1 + |x|) \qquad \forall \, x \in \mathbb{R} \ .
\tag{1.5}
$$

On définit trois espaces de Hilbert H, V et W par

$$
H = (L^2(\Omega))^n \, , \qquad \|u\|_H^2 = \int_\Omega u_i \, u_i \, dx \ ,
$$

$$
V = (H_0^1(\Omega))^n \, , \qquad \|u\|_V^2 = \int_\Omega \sigma_{ij} \, \varepsilon_{ij} \, dx
$$

où $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \colon \ v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ (d'après (1.1) et l'inégalité de Korn, on constate que cette expression définit une norme sur V) et

$$
W = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n \, , \qquad \int_\Omega (\Delta u_i \, \Delta u_i + \sigma_{ij} \, \varepsilon_{ij}) \, dx \ .
$$

On identifie H avec son dual H' on obtient

$$
W \subset V \subset H = H' \subset V' \subset W'
$$

avec injection compact et dense.

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant

Théorème 1.1. *Supposons que les conditions (1.1) et (1.5) sont satisfaites. Pour toute donnée initiale* $(u^0, u^1) \in V \times H$*, le système (1.2) admet une solution (au sens faible) unique* u *vérifie*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H) \ .$$

Si z *est une autre solution du (1.2) correspondant à* $(z^0, z^1) \in V \times H$*, alors la fonction*

$$E(u-z;\, t) := \frac{1}{2} \int_\Omega \Big(|u' - z'|^2 + \sigma_{ij}(u-z)\, \varepsilon_{ij}(u-z) \Big)\, dx \,, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

est décroissante.

Le deuxième résultat de ce théorème implique que, premièrement, on a l'estimation suivante

$$\|E(u-z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq E(u-z;\, 0) \ .$$

Deuxièmment, on choisit $z = 0$ (c'est possible car $g_i(0) = 0$) on obtient la décroissance d'énergie de la solution.

Pour la régularité de la solution on a le

Théorème 1.2. *Supposons que (1.1) et (1.5) sont satisfaites. Soit*

$$(u^0, u^1) \in W \times V \quad \text{et} \quad g_i(u_i^1) \in L^2(\Omega) \ . \tag{1.6}$$

Alors la solution u *(dite forte) du système (1.2) vérifie*

$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)\,, \qquad u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \ . \tag{1.7}$$

Si de plus g_i *est globalement Lipschitz, alors on a*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W)\,, \qquad g(u')\ (:= (g_1(u_1'), ..., g_n(u_n'))) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H) \ . \tag{1.8}$$

On étudie maintenant la stabilité du système (1.2) sous des conditions convenables sur les fonctions g_i. On suppose que pour des constantes $p, q \in [1, +\infty)$ et des constantes positives c_1, c_2, c_3, c_4 on a

$$c_1\, |x|^p \leq |g_i(x)| \leq c_2\, |x|^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \ |x| \leq 1 \ , \tag{1.9}$$

$$c_3\, |x| \leq |g_i(x)| \quad \text{si} \ |x| > 1 \ , \tag{1.10}$$

$$|g_i(x)| \leq c_4\, |x|^q \quad \text{si} \ |x| > 1 \tag{1.11}$$

et

$$q \leq \frac{n+2}{n-2} \quad \text{si} \ n \geq 3 \ . \tag{1.12}$$

On remarque que, si l'inégalité (1.9) (resp. (1.10) et (1.11)) est satisfaite pour un voisinage de 0 (resp. de $\pm\infty$), alors elle est satisfaite (peut-être pour des constantes c_i différentes) pour $|x| \le 1$ (resp. $|x| > 1$).

Théorème 1.3. *Supposons que les conditions (1.1), (1.9)–(1.12) sont satisfaites. Alors toute solution faible du système (1.2) vérifie*

$$E(t) \le c\, t^{\frac{-2}{p-1}} \quad \forall\, t > 0 \qquad \text{si } \; p > 1 \tag{1.13}$$

et

$$E(t) \le E(0)\, e^{1-\omega t} \quad \forall\, t > 0 \qquad \text{si } \; p = 1 \;, \tag{1.14}$$

où c est une constante positive qui dépend de l'énergie initiale $E(0)$ et ω est une constante positive indépendante de la donnée initiale.

La condition (1.10) implique que g_i n'est pas borné, le théorème suivant montre que les estimations (1.13) et (1.14) restent vraies pour les solutions fortes du système (1.2) même si g_i est borné.

Théorème 1.4. *On suppose que les conditions (1.1), (1.9), (1.11) et (1.12) sont satisfaites avec*

$$\begin{cases} p \ge 1 & \text{si } n = 1, \\ p > 1 & \text{si } n = 2, \\ p \ge \dfrac{n}{2} & \text{si } n \ge 3 \;. \end{cases} \tag{1.15}$$

Alors toute solution forte du système (1.2) vérifie les estimations (1.13) et (1.14) pour des constantes positives c et ω dépendant de la solution u.

On va démontrer les Théorèmes 1.1 et 1.2 par l'application de la théorie des semi-groupes non linéaires [2], [3] (voir aussi [4], [9]). La démonstration des estimations de stabilité est basée sur des inégalités d'intégrales appliquées dans [5], [9], [11], [14] dans l'étude de léquation des ondes et dans [10] dans l'étude du système de Petrovsky.

2 – L'existence et l'unicité de la solution

Soient

$$G_i(t) = \int_0^t g_i(s)\, ds\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

et

$$\varphi_i(v) = \int_\Omega G_i(v(x))\, dx\,, \qquad v \in H_0^1(\Omega) \;.$$

La fonction $\varphi\colon V \to]-\infty, +\infty[$ (remarquer que $0 \le G_i(x) \le x\, g_i(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ et utiliser (1.5)) définie par

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i)$$

est une fonction propre, s.c.i, convexe et son sous-differentiel $B := \partial\varphi\colon V \to V'$ est un opérateur maximal monotone.

On prend l'application de dualité $A\colon V \to V'$, on va écrire le système (1.2) sous la forme

$$\begin{cases} u_i'' + A_i\, u_i + B_i\, u_i' = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \qquad \text{et} \qquad u_i'(0) = u_i^1, \\ i = 1, ..., n\ . \end{cases} \tag{2.1}$$

On remarque premièrement que la condition au bord dans (1.2) est notée dans la définition de V. De plus, pour $u \in W$ on a $A_i\, u_i = -\sigma_{ij,j}(u)$. En effet, soit $v \in V$ on a

$$\begin{aligned} \langle Au, v\rangle_{V',V} = (u,v)_V &= \int_\Omega a_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\, v_{i,j}\, dx \\ &= \int_\Gamma \sigma_{ij}(u)\, v_i\, \nu_j\, d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)\, v_i\, dx = -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)\, v_i\, dx \\ &= \langle -\sigma_{ij,j}(u), v\rangle_H = \langle -\sigma_{ij,j}(u), v\rangle_{H',H} = \langle -\sigma_{ij,j}(u), v\rangle_{V',V} \end{aligned}$$

d'où $A_i\, u_i = -\sigma_{ij,j}(u)$.

Finalement, on peut vérifier que l'application

$$\langle Bu, v\rangle_{V',V} = \int_\Omega g_i(u_i)\, v_i\, dx\,, \qquad u, v \in V$$

et bien définie. En effet, utilisons (1.5) et l'injection $V \subset H$

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega g_i(u_i)\, v_i\, dx\Big| &\le \int_\Omega \Big(\sum_i |g_i(u_i)|\Big) \Big(\sum_i |v_i|\Big)\, dx \\ &\le c'\Big(\int_\Omega \sum_i g_i^2(u_i)\, dx\Big)^{\frac12} \Big(\int_\Omega \sum_i v_i^2\, dx\Big)^{\frac12} \\ &\le c'\Big(\int_\Omega \sum_i (1 + |u_i|)^2\, dx\Big)^{\frac12} \|v\|_H \\ &\le c'\Big(\int_\Omega \sum_i (2 + 2\, u_i^2)\, dx\Big)^{\frac12} \|v\|_V \\ &\le c'(1 + \|u\|_H^2)^{\frac12}\, \|v\|_V \le c'(1 + \|u\|_V)\, \|v\|_V < +\infty \end{aligned}$$

où $c' > 0$ dépendant seulement de Ω et de la constante c donnée par (1.5). Alors on multiplie l'équation dans (1.2) par $v \in V$ et par intégration par parties sur Ω on obtient

$$\langle u'' + Au + Bu',\, v\rangle_{V',V} = 0 \quad \text{ dans } \ \mathbb{R}^+$$

d'où (2.1).

On pose

$$u' = z\,, \qquad U = (u,z) \quad \text{ et } \quad \mathcal{A}U = (-z,\, Au + Bz)\ ,$$

on peut aussi écrire le système (1.2) sous la forme

$$U' + \mathcal{A}\,U = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^+\,, \qquad U(0) = (u^0, u^1)\ . \tag{2.2}$$

On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = V \times H$ et on considère l'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans $\mathcal{H}$ tel que

$$D(\mathcal{A}) = \Big\{U = (u,z) \in V \times V\colon\ Au + Bz \in H\Big\}\ .$$

Lemme 2.1. *$\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration: La croissance de g_i donne la monotonicité de $\mathcal{A}$. En effet, pour $U, \tilde{U} \in D(\mathcal{A})$ on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U - \mathcal{A}\tilde{U},\, U - \tilde{U}\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \tilde{z} - z,\, u - \tilde{u}\rangle_V + \langle Au - A\tilde{u} + Bz - B\tilde{z},\, z - \tilde{z}\rangle_H \\ &= -\langle z - \tilde{z},\, u - \tilde{u}\rangle_V + \langle Au - A\tilde{u} + Bz - B\tilde{z},\, z - \tilde{z}\rangle_{V',V} \\ &= \langle Bz - B\tilde{z},\, z - \tilde{z}\rangle_{V',V} \\ &= \int_\Omega \Big(g_i(z_i) - g_i(\tilde{z}_i)\Big)\,(z_i - \tilde{z}_i)\,dx \geq 0\ .\end{aligned}$$

On montre maintenant que l'opérateur $I + \mathcal{A}$ est surjectif. Soit $(u^0, z^0) \in \mathcal{H}$, on cherche $(u,z) \in D(\mathcal{A})$ tel que $(I+\mathcal{A})(u,z) = (u^0, z^0)$, c'est à dire

$$u = z + u^0 \quad \text{ et } \quad z + Az + Bz = z^0 - Au^0\ .$$

Donc il suffit de montrer que $I + A + B\colon\ V \to V'$ est surjectif et on prend $u = z + u^0$ et $z \in V$ tel que $(I + A + B)(z) = z^0 - Au^0$. Soit $f \in V'$, on pose $F\colon V \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \frac{1}{2}\,\|u\|_H^2 + \frac{1}{2}\,\|u\|_V^2 + \sum_{i=1}^n \int_\Omega G_i(u_i)\,dx - \langle f, u\rangle_{V',V}\ .$$

La fonction (voir (1.5) et remarquer que $0 \le G_i(x) \le x\, g_i(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$) F est définie, continue, différentiable et on a

$$F'(u)v = \Big\langle (I + A + B)\, u - f,\, v \Big\rangle_{V',V}\,, \qquad \forall\, u, v \in V\ .$$

De plus, la monotonocité de g_i implique la convexité de F. Et comme $F(v) \to +\infty$ quand $\|v\|_V \to +\infty$ (car $F(v) \ge (\frac{1}{2}\|v\|_V - \|f\|'_V)\, \|v\|_V$) alors F ataind son minimum dans un point u. Donc $F'(u) = 0$ c'est à dire $(I + A + B)\, u = f$.

On applique la théorie des semi-groupes non linéaires et on trouve le Théorème 1.1 et la première partie du Théorème 1.2.

La deuxième partie du Théorème 1.2 se déduit à partir du lemme suivant

Lemme 2.2. *On supose que la condition (1.1) est vérifiée et g_i est globalement Lipschitz, alors $D(\mathcal{A}) = W \times V$ et il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|u\|_W \le c\Big(\|Au + Bz\|_H + \|z\|_V\Big) \qquad \forall\, (u, z) \in D(\mathcal{A})\ . \tag{2.3}$$

Les propriétés (1.7), (2.1) impliquent que $u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ et $Au + Bu' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$. Comme g_i est globalement Lipschitz et d'après (2.3) on obtient (1.8).

Démonstration du Lemme 2.2: On montre premièrement que $W \times V = D(\mathcal{A})$. Soit $(u, z) \in W \times V$; il faut montrer que $Au + Bz \in H$. Or $u \in W$ implique que $Au = \sigma_{ij,j}(u) \in H$, il suffit donc de vérifier l'estimation

$$|\langle Bz, v\rangle_{V',V}| \le c'\, \|v\|_H\,, \qquad \forall\, v \in V\ , \tag{2.4}$$

pour une constante c'. Comme g_i est globalement Lipschitz donc on a

$$\begin{aligned} |\langle Bz, v\rangle_{V',V}| &= \Big|\int_\Omega g_i(z_i)\, v_i\, dx\Big| \\ &\le \Big(\int_\Omega g_i(z_i)\, g_i(z_i)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega v_i\, v_i\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le c\Big(\int_\Omega z_i\, z_i\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \|v\|_H \\ &\le \|z\|_V\, \|v\|_H\ . \end{aligned}$$

D'où (2.4). D'autre part, soit $(u, z) \in D(\mathcal{A})$ c'est à dire $u, z \in V$ et $Au + Bz \in H$, il faut montrer que $u \in W$. Comme $Au + Bz \in H$ alors on fixe $v \in V$ on obtient

$$\langle Au + Bz,\, v\rangle_{V',V} = \langle Au + Bz,\, v\rangle_H\ ,$$

et par suite

$$\int_\Omega a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx = \int_\Omega f.v\,dx$$

où $f = Au+Bz-g(z)$. Alors $f\in H$. En effet, on a $Au+Bz\in H$ par hypothèse et comme g_i est globalement Lipschitz on a

$$\|g(z)\|_H^2 = \int_\Omega g_i(z_i)\,g_i(z_i)\,dx \le c\int_\Omega z_i\,z_i\,dx \le c\,\|z\|_V^2 < \infty\;.$$

Donc on applique la théorie de la régularité et on conclut que $u\in W$ et

$$\|u\|_W \le c_1\,\|f\|_H \le c_1\Big(\|Au+Bz\|_H + \|g(z)\|_H\Big) \le c_2\Big(\|Au+Bz\|_H + \|z\|_V\Big)$$

d'où (2.3). La démonstration du Lemme 2.2 est terminée. ∎

3 – Démonstration du Théorème 1.3

On va montrer les estimations (1.13) et (1.14) pour les solutions fortes. Par des arguments de densité (voir Lemme 2.2 et Komornik [10] pour plusieurs details), le résultat se généralise pour les solutions faibles.

Lemme 3.1. *La fonction $E\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ est décroissante, localement absolument continue et*

$$\int_S^T\!\int_\Omega u_i'\,g_i(u_i')\,dx\,dt = E(S)-E(T) \le E(S) \tag{3.1}$$

pour tout $0\le S<T<\infty$.

Démonstration: On fixe $0\le S<T<\infty$, on conclut d'après (1.2) et (1.3) que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_S^T\!\int_\Omega \Big(u_i''-\sigma_{ij,j}+g_i(u_i')\Big)\,u_i'\,dx\,dt\\
&= \int_S^T\!\int_\Omega \Big(u_i''\,u_i'+\sigma_{ij}\,u_{i,j}'+u_i'\,g_i(u_i')\Big)\,dx\,dt\\
&= E(T)-E(S)+\int_S^T\!\int_\Omega u_i'\,g_i(u_i')\,dx\,dt
\end{aligned}$$

i.e.

$$E(S)-E(T) = \int_S^T\!\int_\Omega u_i'\,g_i(u_i')\,dx\,dt\,,\qquad 0\le S<T<\infty\;. \tag{3.2}$$

La deuxième partie de (3.2) est positive par hypothèse sur g_i; alors E est décroissante. L'identité (3.2) implique aussi que E est localement absolument continue et comme E est positive alors (3.1) est satisfaite. ∎

Lemme 3.2. *On a*

$$\begin{aligned} 2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt = &-\Big[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i\,u_i'\,dx\Big]_S^T \\ &+\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,E'(t)\int_\Omega u_i\,u_i'\,dx\,dt \\ &+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega\Big(2\,u_i'\,u_i'-u_i\,g_i(u_i')\Big)\,dx\,dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

pour tout $0\le S<T<\infty$.

Démonstration: On a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i\Big(u_i''-\sigma_{ij,j}+g_i(u_i')\Big)\,dx\,dt \\ &= \Big[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i\,u_i'\,dx\Big]_S^T-\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,E'(t)\int_\Omega u_i\,u_i'\,dx\,dt \\ &\quad+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega\Big(-u_i'\,u_i'+\sigma_{ij}\,u_{i,j}+u_i\,g_i(u_i')\Big)\,dx\,dt\ . \end{aligned}$$

On utilise la définition du l'énergie et on obtient (3.3). ∎

Lemme 3.3. *On a*

$$2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt\le c\,E^{\frac{p+1}{2}}(S)+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega\Big(2\,u_i'\,u_i'-u_i\,g_i(u_i')\Big)\,dx\,dt \tag{3.4}$$

pour tout $0\le S<T<\infty$.

A partir de ce lemme, c désigne une constante positive indépendante de (u^0,u^1), S et de T.

Démonstration: On utilise l'inégalité de Korn, la condition au bord dans (1.2) et on obtient

$$\begin{aligned} \Big|E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i\,u_i'\,dx\Big| &\le\frac{1}{2}\,E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega(u_i\,u_i+u_i'\,u_i')\,dx \\ &\le c\,E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega(u_i'\,u_i'+\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij})\,dx\le c\,E^{\frac{p+1}{2}}(t)\ . \end{aligned}$$

(On utilise la décroissance de E). Alors

$$-\Big[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i\,u_i'\,dx\Big]_S^T \le c\,E^{\frac{p+1}{2}}(S)+c\,E^{\frac{p+1}{2}}(T)\le c\,E^{\frac{p+1}{2}}(S)\ .$$

D'autre part, et de la même manière on a

$$\begin{aligned}\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,E'(t)\int_\Omega u_i\,u_i'\,dx\,dt \le&\\ &\le c\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,(-E'(t))\int_\Omega(u_i'\,u_i'+\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij})\,dx\,dt\\ &\le c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,(-E'(t))\,dt\le c[E^{\frac{p+1}{2}}(t)]_T^S\le c\,E^{\frac{p+1}{2}}(S)\ .\end{aligned}$$

On utilise ces deux estimations dans (3.3) et on trouve (3.4). ∎

Lemme 3.4. *Pour tout $\epsilon>0$ il existe une constante $c(\epsilon)>0$ telle que*

$$2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i'\,u_i'\,dx\,dt\le\epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt+c(\epsilon)\,E(S)+c\,E^{\frac{p+1}{2}}(S) \tag{3.5}$$

pour tout $0\le S<T<\infty$.

Démonstration: On fixe $t\in\mathbb{R}^+$, soient (comme dans [14])

$$\Omega_i^+=\Big\{x\in\Omega\colon\ |u_i'|>1\Big\}\quad\text{et}\quad\Omega_i^-=\Big\{x\in\Omega\colon\ |u_i'|\le1\Big\}\ . \tag{3.6}$$

On utilise (1.9), (1.10) et on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_i'\,u_i'\,dx&=\int_{\Omega_i^+}u_i'\,u_i'\,dx+\int_{\Omega_i^-}u_i'\,u_i'\,dx\le c\int_{\Omega_i^+}u_i'\,g_i(u_i')\,dx+\int_{\Omega_i^-}(u_i')^{\frac{2}{p+1}}\,(u_i')^{\frac{2p}{p+1}}\,dx\\ &\le -c\,E'(t)+c\int_{\Omega_i^-}(u_i'\,g_i(u_i'))^{\frac{2}{p+1}}\,dx\le -c\,E'(t)+c\Big(\int_\Omega u_i'\,g_i(u_i')\,dx\Big)^{\frac{2}{p+1}}\\ &=-c\,E'(t)+c(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}\ ,\end{aligned}$$

et par suite

$$2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i'\,u_i'\,dx\,dt\le -c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,E'(t)\,dt+c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}\,dt\ .$$

Par l'utilisation de l'inégalité de Young sur le dernier terme on obtient

$$\begin{aligned}2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i'\,u_i'\,dx\,dt&\le c[E^{\frac{p+1}{2}}(t)]_T^S-c(\epsilon)\int_S^T E'(t)\,dt+\epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt\\ &\le\epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}\,dt+c(\epsilon)\,E(S)+c\,E^{\frac{p+1}{2}}(S)\ .\end{aligned}$$

D'où l'inégalité (3.5). ∎

Lemme 3.5. *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $c(\epsilon) > 0$ telle que*

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i\, g_i(u_i')\,dx\,dt\Big| \le \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + c(\epsilon)\,E(S) \tag{3.7}$$

pour tout $0 \le S < T < \infty$.

Démonstration: On définit Ω_i^+ et Ω_i^- par (3.6). On utilise l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young et on trouve

$$\Big|\int_\Omega u_i\, g_i(u_i')\,dx\Big| \le \Big|\int_{\Omega_i^+} u_i\, g_i(u_i')\,dx\Big| + \Big|\int_{\Omega_i^-} u_i\, g_i(u_i')\,dx\Big| \le$$

$$\le \Big(\int_{\Omega_i^+}|u_i|^{q+1}\,dx\Big)^{\frac{1}{q+1}}\Big(\int_{\Omega_i^+}|g_i(u_i')|^{\frac{q+1}{q}}\,dx\Big)^{\frac{q}{q+1}} + \frac{\epsilon_1}{2}\int_{\Omega_i^-}u_i\,u_i\,dx + c(\epsilon_1)\int_{\Omega_i^-}g_i^2(u_i')\,dx$$

($\epsilon_1 > 0$). On utilise (1.9), (1.11), l'inégalité de Young et l'injection de Sobolev (voir (1.12))

$$V \subset (L^{q+1}(\Omega))^n\ ,$$

on a

$$\Big|\int_\Omega u_i\, g_i(u_i')\,dx\Big| \le \epsilon_1\,E^{\frac{q+1}{2}}(t) + c(\epsilon_1)\int_{\Omega_i^+}u_i'\,g_i(u_i')\,dx + \epsilon_1\,E(t) + c(\epsilon_1)\,(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}$$

$$\le \epsilon_1\Big(E^{\frac{q+1}{2}}(t) + E(t)\Big) + c(\epsilon_1)\,\Big((-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} - E'(t)\Big)\ ,$$

et par suite

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i\, g_i(u_i')\,dx\,dt\Big| \le$$

$$\le \epsilon_1\int_S^T\Big(E^{\frac{p+q}{2}}(t)+E^{\frac{p+1}{2}}(t)\Big)\,dt + c(\epsilon_1)\,[E^{\frac{p+1}{2}}(t)]_T^S + c(\epsilon_1)\int_S^T(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}\,E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,dt\ .$$

On utilise l'inégalité de Young sur le dernier terme, l'inégalité triviale $p+q \ge p+1$ et on arrive à (pour $\epsilon > 0$)

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i\, g_i(u_i')\,dx\Big| \le \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + c(\epsilon)\,E(S)\ .$$

D'où (3.7). ∎

Lemme 3.6. *L'énergie E vérifie l'estimation*

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \le c\,E(S) \tag{3.8}$$

pour tout $0 \le S < T < \infty$.

Démonstration: Il suffit d'utiliser (3.5), (3.7) dans (3.4) avec $\epsilon = \frac{1}{2}$, la décroissance de E et d'obtenir directement (3.8). ∎

Le Lemme 3.1 et 3.6 impliquent que $E\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante qui vérifie l'inégalité

$$\int_t^\infty E^{\frac{p+1}{2}}(s)\,ds \le c\,E(t)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Alors on obtient les estimations (1.13)–(1.14) par l'application de la proposition suivante

Proposition 3.7. *Soit $E\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante qui vérifie pour deux constantes $\alpha \ge 0$ et $c > 0$ l'inégalité*

$$\int_t^\infty E^{\alpha+1}(s)\,ds \le c\,E^\alpha(0)\,E(t)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Alors on a

$$E(t) \le E(0) \left(\frac{c+\alpha\,t}{c+\alpha\,c}\right)^{\frac{-1}{\alpha}}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+ \ \text{ si } \alpha > 0$$

et

$$E(t) \le E(0)\,e^{1-\frac{1}{c}t}\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+ \ \text{ si } \alpha = 0 \ .$$

Pour la démonstration de cette proposition, voir Komornik [9].

4 – Démonstration du Théorème 1.4

On prend $(u_0, u_1) \in W \times V$ tel que $g_i(u_i^1) \in L^2(\Omega)$, donc la solution du système (1.2) a la régularité (1.7). (Remarquer que dans ce théorème les constante c et ω dépendent de la solution u ce qui ne nous permet pas de généraliser les estimations (1.13) et (1.14) par des arguments de densité pour les solutions faibles).

Dans la démonstration du Théorème 1.3, les estimations (3.4) et (3.7) (remarquer que sont satisfaites sans la condition (1.10) et choisissons $\epsilon = 1$ dans (3.7)) impliquent que

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \le c\,E^{\frac{p+1}{2}}(S) + c\,E(S) + 2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega u_i'\,u_i'\,dx\,dt \ . \tag{4.1}$$

Donc il nous reste à majorer la dernière intégrale dans (4.1). Comme dans la démonstration du Lemme 3.4, on a

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega_i^-} u_i' \, u_i' \, dx \, dt \le \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt + c(\epsilon) \, E(S) \tag{4.2}$$

pour tout $\epsilon > 0$. D'autre part on a

Cas: $n = 1$**.** On observe que (1.9) et la décroissance de g_i impliquent $\inf\{|g_i(x)| \; : \; |x| \ge 1\} > 0$. Alors on utilise (1.7), (3.1) et l'injection $V \subset (H^1(\Omega))^n \subset (L^\infty(\Omega))^n$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_i^+} u_i' \, u_i' \, dx &\le c \int_{\Omega_i^+} |u_i'| \, u_i' \, g_i(u_i') \, dx \\ &\le c \, \|u'\|_{(L^\infty(\Omega))^n} (-E'(t)) \le -c \, E'(t) \ ,\end{aligned}$$

et par suite

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega_i^+} u_i' \, u_i' \, dx \, dt \le -c \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \, E'(t) \, dt \le c \, E^{\frac{p+1}{2}}(S) \ . \tag{4.3}$$

Cas: $n \ge 2$**.** On a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_i^+} u_i' \, u_i' \, dx &\le c \int_{\Omega_i^+} |u_i'|^{\frac{2p}{p+1}} \, (u_i' \, g_i(u_i'))^{\frac{2}{p+1}} \, dx \\ &\le c \Big(\int_\Omega |u_i'|^{\frac{2p}{p-1}} \, dx \Big)^{\frac{p-1}{p+1}} \Big(\int_\Omega u_i' \, g_i(u_i') \, dx \Big)^{\frac{2}{p+1}} \\ &\le c \, \|u'\|^{\frac{2p}{p+1}}_{(L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega))^n} \, (-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} \ .\end{aligned} \tag{4.4}$$

Par (1.7) et l'injection (voir (1.15))

$$V \subset (H^1(\Omega))^n \subset (L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega))^n$$

on conclut à partir de (4.4)

$$\int_{\Omega_i^+} u_i' \, u_i' \, dx \le c(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} \ ,$$

par l'utilisation de l'inégalité de Young on trouve

$$\begin{aligned}\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega_i^+} u_i' \, u_i' \, dx \, dt &\le c \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \, (-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} \, dt \\ &\le \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt - c(\epsilon) \int_S^T E'(t) \, dt \ ,\end{aligned}$$

donc

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega_i^+} u_i' \, u_i' \, dx \, dt \le \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt + c(\epsilon) \, E(S) \ . \tag{4.5}$$

Les inégalités (4.3) et (4.5) impliquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega_i^+} u_i' \, u_i' \, dx \, dt \le \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt + c(\epsilon) \, E(S) + c \, E^{\frac{p+1}{2}}(S) \ ,$$

on choisit $\epsilon = \frac{1}{6}$ dans cette inégalité et dans (4.2), on remplace ensuite dans (4.1) et on obtient (3.8). Ansi les estimation (1.13) et (1.14) se déduisent par l'application de la proposition 3.7. ∎

Remarque. Si les fonctions g_i vérifient (1.9) pour $p = 1$ alors cette condition est vérifiée pour tout $p \ge 1$, on choisit p le plus petit nombre qui vérifie (1.15), c'est à dire $p = 1$ si $n = 1$, $p = 1 + \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$ si $n = 2$ et $p = \frac{n}{2}$ si $n \ge 3$. On constate dans ce cas là que toute solution forte du système (1.2) vérifie l'estimation (1.14) si $n = 1$,

$$E(t) \le c \, t^{-2m} \quad \forall \, t \in \mathbb{R}^+, \ \ \forall \, m \in \mathbb{N}^* \ \text{ si } n = 2$$

et

$$E(t) \le c \, t^{\frac{-4}{n-2}} \quad \forall \, t \in \mathbb{R}^+ \ \text{ si } n \ge 3 \ .$$

REMERCIEMENTS – L'auteur tient à remercier le référé pour ses suggestions et remarques fructueuses

RÉFÉRENCES

[1] Alabau, F. and Komornik, V. – *Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastrodynamic systems*, to appear.

[2] Barbu, V. – *Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems*, Academic Press, New York, 1993.

[3] Brézis, H. – Problèmes unilatéreaux, *J. Math. Appl.,* 51 (1972), 1–168.

[4] Conrad, F. and Pierre, M. – Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, *Ann. Inst. Henri Poincaré,* 11 (1994), 485–515.

[5] Conrad, F. and Rao, B. – Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, *Asymptotic Anal.,* 7 (1993), 159–177.

[6] Duvaut, G. et Lions, J.-L. – *Les inégalités en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[7] Haraux, A. – *Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains*, Mathematical Reports, J. Dieudonné editor, Harwood Academic Publishers, Gordon and Breach, 1987.

[8] Haraux, A. – *Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéaires*, preprint n: 78010, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

[9] Komornik, V. – *Exact controlability and stabilization. The multiplier method*, Masson, Paris and John Wiley & Sons, 1994.

[10] Komornik, V. – Well-posedness and decay estimates for a petrovsky system by a semigroup approach, *Acta Sci. Math.,* 60 (1995), 451–466.

[11] Komornik, V. – *Decay estimates for the wave equation with internal damping, Proceedings of the Conference on Control Theory*, Vorau, 1993, International Series Num. Analysis, Vol. 118, Birkhauser Verlag, Basel, 1994, 253–266.

[12] Lagnese, J.E. – Boundary stabilization of linear elastodynamic systems, *SIAM J. Control Opt.,* 21 (1983), 968–984.

[13] Lions, J.-L. – Exact controllability, stabilizability, and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.,* 30 (1988), 1–68.

[14] Zuazua, E. – Stability and decay for a class of non linear hyperbolic problems, *Asymptotic Anal.,* 1, 2 (1988), 161–185.

Aissa Guesmia,
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg – FRANCE
E-mail: guesmia@math.u-strasbg.fr