PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 56 Fasc. 2 – 1999

ANNEAUX DE POLYNOMES A COEFFICIENTS DANS UNE INTERSECTION DE PRODUITS FIBRES

A. Ayache

Résumé: Dans cet article, on considère l'intersection R d'anneaux R_i de constructions (T, M_i, D_i) en divers idéaux maximaux M_i $(1 \leq i \leq k)$ de T. On étudie la dimension de Krull de l'anneau de polynômes $R[m]$ ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'anneau de polynômes $R[m]$ soit de Jaffard ou localement de Jaffard. Suivent plusieurs applications, notamment lorsque les R_i sont issus d'une même algèbre de type fini sur un corps, ou des anneaux de la construction (V_i, M_i, D_i) où les V_i sont des anneaux de valuation deux à deux incomparables d'un même corps de fractions, ou encore des anneaux de pseudo-valuations de même corps de fractions.

Introduction

Tous les anneaux considérés sont commutatifs, unitaires, intègres et de dimension de Krull finie. Si A est un anneau, on note $k(A)$ son corps de fractions, $\dim A$ sa dimension de Krull, $\dim_\nu A$ sa dimension valuative et $A[m]$ l'anneau de polynômes en m indéterminées sur A. Si P est un idéal premier de A, on note $\mathrm{ht}_A P$ la hauteur de P dans A et $P[m]$ l'étendu de P à $A[m]$. Enfin si B est un anneau contenant A, on note d.t.$[B:A]$ le degré de transcendance de $k(B)$ sur $k(A)$. On rappelle et on précise les définitions qui servent de cadre à cet article:

Soient T un anneau, I un idéal de T, D un sous anneau du quotient T/I et R le sous anneau de T formé des éléments de T dont la classe modulo I est dans D. R est alors un produit fibré dit *l'anneau de la construction* (T, I, D) [11] et illustré par le carré cartésien suivant [13]:

$$\begin{array}{ccc} R & \rightarrow & R/I \cong D \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \rightarrow & T/I \end{array}$$

Received: March 8, 1997; *Revised*: March 4, 1998.

Dans cet article, on considère l'intersection R de constructions (T, M_i, D_i) en divers idéaux maximaux M_i $(1 \leq i \leq k)$ de T, qu'on peut aussi définir comme l'anneau de la construction (T, I, D) où I est l'intersection des M_i et D le produit des D_i. Une telle construction généralise sensiblement l'intersection des sous anneaux $D_i + M_i$ d'anneaux de valuation $V_i = K + M_i$ (deux à deux incomparables) d'un même corps de fractions [4, p. 400]. Notant R_i l'anneau de la construction (T, M_i, D_i), $k_i = T/M_i$, $d_i = \text{d.t.}[k_i : D_i]$ et $\eta_i = M_i \cap R$, on a les résultats suivants:

Lemme 0.1 ([6, Corollaire 1.2 et Proposition 1.3])**.**

(i) *Pour tout i, $R/\eta_i \cong R_i/M_i \cong D_i$.*

(ii) *Pour tout premier P de R ne contenant pas I, il existe un idéal premier Q de T tel que $Q \cap R = P$ et on a alors $R_P = T_Q$.*

(iii) *Tout premier P de R contenant I contient un et un seul η_i et il existe un idéal premier q_i de D_i tel que R_P est l'anneau de la construction $(T_{M_i}, M_iT_{M_i}, (D_i)_{q_i})$.*

(iv) *Si T est semi-local d'idéaux maximaux M_i $(1 \leq i \leq k)$ et R'_i est l'anneau de la construction $(T_{M_i}, M_iT_{M_i}, D_i)$, alors $R = \bigcap_{i=1}^k R'_i$ et $R'_i = S_i^{-1}R$ où S_i est l'ensemble des éléments de R égaux à 1 modulo M_i.*

Le premier paragraphe est consacré à l'étude de la dimension de Krull de $R[m]$. Rappelons que P.J. Cahen a établit un encadrement de $\dim R[m]$ [10, Théorème 2], [11, Lemme 3]:

$$(0.2)\quad \begin{aligned} &\textbf{(i)}\ \dim R[m] \leq \text{Max}_{1\leq i\leq k}\Big\{\dim T[m],\ \dim D_i[m] + \text{ht}_{T[m]} M_i[m] + \inf(m, d_i)\Big\}.\\ &\textbf{(ii)}\ \dim R[m] \geq \text{Max}_{p+q=m,\,1\leq i\leq k}\Big\{\dim D_i[m] + \text{ht}_{T[p]} M_i[p] + \inf(q, d_i)\Big\}.\end{aligned}$$

D'autres auteurs ont déterminé sa valeur dans des cas spéciaux [1, 7, 12]. De notre côté, on montre que $\dim R[m]$ est la valeur maximale des dimensions de Krull des $R_i[m]$ [Proposition 1.2]. Ceci permet de fournir, avec des hypothèses encore plus faibles, la valeur exacte de $\dim R[m]$ [Théorème 1.7].

Rappelons qu'un anneau A est dit de *Jaffard* si $\dim_\nu A = \dim A$, ou de façon équivalente $\dim A[m] = m + \dim A$ pour tout entier naturel m. Les anneaux noethériens et les anneaux de Prüfer sont des anneaux de Jaffard. D'autres classes d'anneaux de Jaffard ont été données par A. Bouvier à la suite de ses travaux en collaboration avec D. Dobbs, M. Fontana et S. Kabbaj [1], [8], puis par P.J.

Cahen [11] et A. Ayache [5], mais contrairement aux anneaux noethériens et de Prüfer, les localisés d'un anneau de Jaffard ne sont pas de Jaffard. Un anneau A est dit *localement de Jaffard* si A_P est un anneau de Jaffard pour tout idéal premier P de A, ou de façon équivalente $\mathrm{ht}_{A[m]} P[m] = \mathrm{ht}_A P$ pour tout entier naturel m et pour tout idéal premier P de A.

Dans le second paragraphe, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'anneau $R[m]$ soit de Jaffard ou localement de Jaffard [Théorème 2.2], [Théorème 2.5], [Théorème 2.7]. Noter que pour $m = 0$, on retrouve les résultats connus du transfert de la notion de Jaffard à l'anneau R [1, Théorème 2.6 et Corollaire 2.12].

Enfin au troisième et dernier paragraphe, on donne plusieurs applications intéressantes de cette étude, notamment lorsque les R_i sont des anneaux de la construction (V_i, M_i, D_i) où les V_i sont des anneaux de valuation deux à deux incomparables d'un même corps de fractions [Théorème 3.2], ou des anneaux de pseudo-valuations [Corollaire 3.3], ou encore des sous anneaux issus d'une même algèbre de type fini sur un corps [Théorème 3.1]. Suivent des exemples de telles constructions.

1 – Dimension de l'anneau de polynômes

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier la dimension de l'anneau de polynômes $R[m]$ pour tout entier naturel m et on commence par le lemme préparatoire suivant:

Lemme 1.1. $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1\le i\le k}\Big\{\dim T[m], \mathrm{Sup}_{\eta_i\subseteq P} \dim R_P[m]\Big\}$.

Démonstration: D'après [4, Corollaire 2.10], on a

$$\dim R[m] = \mathrm{Sup}_{P\in \mathrm{Spec}\, R} \dim R_P[m]\ ,$$

soit encore

$$\dim R[m] = \mathrm{Max}\Big\{\mathrm{Sup}_{I\not\subseteq P} \dim R_P[m],\ \mathrm{Sup}_{I\subseteq P} \dim R_P[m]\Big\}\ . \tag{1}$$

D'une part, on a

$$\mathrm{Sup}_{I\not\subseteq P} \dim R_P[m] = \mathrm{Sup}_{1\le i\le k}\Big\{\dim T_Q[m]\colon\ Q \neq M_i\Big\}\ . \tag{2}$$

D'autre part, pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, $\eta_i \supseteq I$ et R_{η_i} est l'anneau de la construction $(T_{M_i}, M_i T_{M_i}, k(D_i))$ [Lemme 0.1(iii)]. Alors les deux anneaux $T_{M_i}[m]$,

$R_{\eta_i}[m]$ partagent le même idéal $M_iT_{M_i}[m]$ et on peut écrire $\mathrm{ht}_{T_{M_i}[m]}\, M_iT_{M_i}[m] \leq \mathrm{ht}_{R_{\eta_i}[m]}\, M_iT_{M_i}[m]$ [10, Proposition 5]. Donc $\dim T_{M_i}[m] = m + \mathrm{ht}_{T[m]}\, M_i[m] \leq \dim R_{\eta_i}[m] \leq \mathrm{Sup}_{I \subseteq P} \dim R_P[m]$. Ainsi on a

$$\mathrm{Sup}_{1 \leq i \leq k} \dim T_{M_i}[m] \leq \mathrm{Sup}_{I \subseteq P} \dim R_P[m]\ . \tag{3}$$

En combinant (1) et (2), on déduit la formule:

$$\dim R[m] = \mathrm{Max}\Big\{\mathrm{Sup}_{1 \leq i \leq k}\Big\{\dim T_Q[m] \colon\ Q \neq M_i\Big\},\ \mathrm{Sup}_{I \subseteq P} \dim R_P[m]\Big\}\ .$$

Utilisant l'inégalité (3), on peut aussi écrire $\dim R[m]$ sous la forme:

$$\dim R[m] = \mathrm{Max}\Big\{\mathrm{Sup}_{1 \leq i \leq k}\Big\{\dim T_Q[m] \colon\ Q \neq M_i\Big\},\\ \mathrm{Sup}_{1 \leq i \leq k} \dim T_{M_i}[m],\ \mathrm{Sup}_{I \subseteq P} \dim R_P[m]\Big\}\ ,$$

soit encore $\dim R[m] = \mathrm{Max}\{\dim T[m], \mathrm{Sup}_{I \subseteq P} \dim R_P[m]\}$ puisque par ailleurs, on a la relation:

$$\dim T[m] = \mathrm{Max}\Big\{\mathrm{Sup}_{1 \leq i \leq k}\Big\{\dim T_Q[m] \colon\ Q \neq M_i\Big\},\ \mathrm{Sup}_{1 \leq i \leq k} \dim T_{M_i}[m]\Big\}\ .$$

D'où en définitive

$$\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\Big\{\dim T[m],\ \mathrm{Sup}_{\eta_i \subseteq P} \dim R_P[m]\Big\}\ . \ \blacksquare$$

Proposition 1.2. *On a* $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\{\dim R_i[m]\}$. *Si en particulier* T *est un anneau semi-local d'idéaux maximaux* M_i *et* R'_i *est l'anneau de la construction* $(T_{M_i}, M_iT_{M_i}, D_i)$ *où* $1 \leq i \leq k$*, alors on a* $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\{\dim R'_i[m]\}$.

Démonstration: On a $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\{\dim T[m],\ \mathrm{Sup}_{\eta_i \subseteq P} \dim R_P[m]\}$. Comme, à tout idéal premier P de R contenant η_i correspond l'idéal premier $Q = P + M_i$ de R_i contenant M_i, et on a en outre $R_P = (R_i)_Q$, alors on peut écrire

$$\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\Big\{\dim T[m],\ \mathrm{Sup}_{M_i \subseteq Q} \dim (R_i)_Q[m]\Big\}\ .$$

Ainsi, en appliquant le Lemme 1.1 à chaque anneau R_i (qui représente l'anneau de la construction (T, M_i, D_i)), on obtient $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\{\dim R_i[m]\}$.

Si T est semi-local, on peut tirer donc la formule

$$\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\Big\{\dim T_{M_i}[m],\ \mathrm{Sup}_{M_i \subseteq Q} \dim (R_i)_Q[m]\Big\}\ .$$

Comme cette fois, à tout idéal premier Q de R_i contenant M_i correspond un idéal premier Q' de R'_i contenant $M_iT_{M_i}$, et on a aussi $(R_i)_Q = (R'_i)_{Q'}$ (puisque $R'_i = S_i^{-1}R$, où $S_i = \{x \in R : x \equiv 1(M_i)\}$ [Lemme 0.1(iv)]), alors on peut affirmer que

$$\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\Big\{\dim T_{M_i}[m], \mathrm{Sup}_{M_iT_{M_i}\subseteq Q'} \dim(R'_i)_{Q'}[m]\Big\} .$$

Soit encore $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim R'_i[m]\}$ en appliquant le Lemme 1.1 à chaque R'_i. ∎

En peut, en conséquence, déduire la dimension valuative de R en utilisant le fait que $\dim_\nu R = \lim_{m\to\infty} \dim R[m] - m$:

Corollaire 1.3 ([1, Proposition 2.18]).

(**i**) $\dim_\nu R = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim_\nu R_i\} = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim_\nu T, \dim_\nu D_i + \dim_\nu T_{M_i} + d_i\}$.

En particulier si T est semi-local d'idéaux maximaux M_i $(1 \leq i \leq k)$, alors

(**ii**) $\dim_\nu R = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim_\nu R'_i\} = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim_\nu D_i + \dim_\nu T_{M_i} + d_i\}$.

Donc déterminer $\dim R[m]$ (resp. $\dim_\nu R$) pour une intersection R de produits fibrés R_i revient à chercher séparément $\dim R_i[m]$ (resp. $\dim_\nu R_i$).

Si A est un anneau local d'idéal maximal M, alors $\dim A[m] = \mathrm{ht}_{A[m]} M[m] + m$ pour tout entier naturel m. On tire immédiatement le résultat suivant, qui nous sera utile pour la suite.

Lemme 1.4. *Soient A un anneau local d'idéal maximal M et r un entier naturel. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(**i**) *$A[r]$ est un anneau de Jaffard.*

(**ii**) $\mathrm{ht}_{A[m]} M[m] = \mathrm{ht}_{A[r]} M[r]$ *pour tout entier $m \geq r$.*

Dans les résultats qui suivent, on fournit la valeur exacte de $\dim R[m]$ dans des cas très intéressants, généralisant ainsi tous les résultats qui figurent dans la littérature [1, Proposition 2.3], [7, Théorème 5.4], [12, Théorème 3.1]. On commence d'abord par le cas local.

Lemme 1.5. *Soit T un anneau local d'idéal maximal M et de corps résiduel k, et soit R l'anneau de la construction (T, M, D). Posant $d = \mathrm{d.t.}[k : D]$, alors on a*

$$\dim R[m] = \mathrm{Max}\Big\{\dim T[m], \dim D[m] + \mathrm{ht}_{T[m]} M[m] + \inf(m, d)\Big\}$$

dans les trois cas suivants:

(**i**) *Pour tout m, si $d = 0$.*

(**ii**) *Pour tout m, si T est un anneau de Jaffard.*

(**iii**) *Pour $m \geq s + d$, si $T[s]$ est un anneau de Jaffard pour un entier s.*

Démonstration: Soient p et q deux entiers naturels tel que $p + q = m$. Alors, compte tenu de [0.2], on a les inégalités

$$\begin{aligned}\dim D[m] + \mathrm{ht}_{T[p]} M[p] + \inf(m, q) &\leq \dim R[m] \\ &\leq \dim D[m] + \mathrm{ht}_{T[m]} M[m] + \inf(m, d)\ .\end{aligned}$$

On obtient des égalités dans les trois cas suivant:

(**i**) Si $d = 0$, on choisit $p = m$ (donc $q = 0$).

(**ii**) Si T est un anneau de Jaffard, on choisit $p = 0$ (donc $q = m$), puisque $\mathrm{ht}_{T[m]} M[m] = \mathrm{ht}_T M$ [Lemme 1.4].

(**iii**) Si $T[s]$ est un anneau de Jaffard pour un entier naturel s et $m \geq s+d$, on choisit $p = m-d$ (donc $q = d$), puisque $\mathrm{ht}_{T[m]} M[m] = \mathrm{ht}_{T[m-d]} M[m-d]$ [Lemme 1.4]. ∎

Remarque 1.6. On peut noter que la relation donnée par le lemme précédent

$$\text{“}\ \dim R[m] = \mathrm{Max}\Big\{\dim T[m],\ \dim D[m] + \mathrm{ht}_{T[m]} M[m] + \inf(m, d)\Big\}\ \text{”}$$

ne peut être la formule générale qui donne la dimension de $R[m]$. Par exemple, partons d'un anneau local T d'idéal maximal M et de corps résiduel K tels que $\dim T = 1$ et $\dim_\nu T = 2$ et d'un sous corps k de K tel que d.t.$[K:k] = d \geq 1$ ($d < \infty$), puis considérons l'anneau R de la construction (T, k, M). On constate [Lemme 1.5] que la formule précédente est valable pour $m > d$ puisque $T[s]$ est un anneau de Jaffard pour $s = 1$. Par contre, cette formule n'est plus correcte pour $m \leq d$, puisqu'elle donne la valeur $2m+2$, alors qu'on a, en réalité, $\dim R[m] = 2m + 1$ ($\dim R[m] \leq 2m + 1$ puisque $\dim R = 1$ [14, Corollaire 30.3] et $\dim R[m] \geq 2m + 1$ en appliquant [0.2(ii)] avec $p = 0$ et $q = m$).

Ainsi, en combinant [Proposition 1.2] et [Lemme 1.5], on obtient facilement:

Théorème 1.7. *Si pour tout entier i, $d_i = 0$ ou $T_{M_i}[s_i]$ est un anneau de Jaffard pour un entier s_i, alors, posant $\delta_i = 0$ si $d_i = 0$ ou $s_i = 0$, et $\delta_i = d_i + s_i$ dans le cas contraire, on a $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim T[m], \dim D_i[m] + \mathrm{ht}_{T[m]} M_i[m] + \inf(m, d_i)\}$ pour tout $m \geq \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\delta_i\}$.*

2 – Propriétés de Jaffard

On garde toujours les mêmes notations et on commence par la remarque suivante:

Remarque 2.1. Si $d_i = \infty$ pour un certain entier i, alors pour tout entier naturel m, l'anneau de polynômes $R[m]$ n'est pas de Jaffard (a fortiori $R[m]$ n'est pas localement de Jaffard) car on a $\dim_\nu R = +\infty$ [Corollaire 1.3] (a fortiori $\dim_\nu R[m] = +\infty$).

Supposons désormais que $d_i < \infty$ pour tout entier $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Théorème 2.2. *Si pour tout i, $T_{M_i}[s_i]$ est un anneau de Jaffard pour un entier s_i, $D_i[t_i]$ est un anneau de Jaffard pour un entier t_i et $T[s]$ est un anneau de Jaffard pour un entier s, alors $R[m]$ est un anneau de Jaffard pour tout $m \geq \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{d_i + s_i,\, s,\, t_i\}$.*

Démonstration: D'après [Théorème 1.7], on a pour tout entier $r \geq 0$,

$$\dim R[m+r] = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\Big\{\dim T[m+r],\ \dim D_i[m+r] + \mathrm{ht}_{T[m+r]}\, M_i[m+r] + d_i\Big\}\ .$$

Comme T_{M_i} est local et $T_{M_i}[s_i]$ est un anneau de Jaffard, alors $\mathrm{ht}_{T[m+r]} M_i[m+r] = \mathrm{ht}_{T[m]}\, M_i[m]$ [Lemme 1.4]. Par ailleurs $T[s]$ et $D[t_i]$ étant des anneaux de Jaffard, alors on a simultanément $\dim T[m+r] = r + \dim T[m]$ et $\dim D_i[m+r] = r + \dim D_i[m]$. D'où

$$\begin{aligned}\dim R[m+r] &= \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\Big\{r + \dim T[m],\ r + \dim D_i[m] + \mathrm{ht}_{T[m]}\, M_i[m] + d_i\Big\}\\ &= r + \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\Big\{\dim T[m],\ \dim D_i[m] + \mathrm{ht}_{T[m]}\, M_i[m] + d_i\Big\}\\ &= r + \dim R[m]\ . \ \blacksquare\end{aligned}$$

On peut noter dans le théorème précédent que, si T est un anneau semi-local d'idéaux maximaux M_i $(1 \leq i \leq k)$, alors $T[s]$ est un anneau de Jaffard pour $s \geq \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{s_i\}$. Dans ce cas, la condition sur l'entier m se réduit à $m \geq \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{d_i + s_i,\, t_i\}$.

Lemme 2.3. *Supposons que T est local d'idéal maximal M.*

(i) *Si $T[s]$, $D[t]$ sont des anneaux de Jaffard et $m \geq \mathrm{Max}(d+s, t)$, alors $R[m]$ est un anneau de Jaffard.*

(ii) *Si $R[m]$ est un anneau de Jaffard, alors $T[m]$, $D[m]$ sont des anneaux de Jaffard et $m \geq d$.*

En outre, si T est un anneau de Jaffard, alors $R[m]$ est un anneau de Jaffard si et seulement si $D[m]$ est un anneau de Jaffard et $m \geq d$.

Démonstration: La première assertion est un cas particulier du Théorème 2.2. Prouvons la seconde: si $R[m]$ est un anneau de Jaffard, alors

$$\dim R[m] = \dim_\nu R[m] = \dim_\nu R + m = \dim_\nu D + \dim_\nu T + d + m \ .$$

Or de l'inégalité [0.2(i)], on tire $\dim R[m] \leq \dim D[m] + \dim T[m] - m + \inf(m,d)$. Alors

$$\dim_\nu D[m] + \dim_\nu T[m] + d \ \leq \ \dim D[m] + \dim T[m] + \inf(m,d) \ .$$

d'où

$$\dim_\nu D[m] = \dim D[m]\,, \quad \dim_\nu T[m] = \dim T[m] \quad \text{et} \quad m \geq d \ .$$

Enfin la dernière assertion découle de (i) et (ii) et du fait que si T est un anneau de Jaffard, il en est de même pour $T[s]$ [1, Proposition 1.2]. ∎

Lemma 2.4. *Soient B un anneau de dimension de Krull finie et $(B_i)_{1\leq i\leq k}$ des suranneaux de B tels que $\dim B[m] = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim B_i[m]\}$ pour un entier naturel m, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(**i**) *$B[m]$ est un anneau de Jaffard.*

(**ii**) *Il existe $j \in \{1,2,...,k\}$ tel que $\dim_\nu B = \dim_\nu B_j$ et $B_j[m]$ est de Jaffard.*

Démonstration: Si $B[m]$ est un anneau de Jaffard, comme il existe $j \in \{1,2,...,k\}$ tel que $\dim B[m] = \dim B_j[m]$, alors $\dim_\nu B[m] = \dim B[m] = \dim B_j[m] \geq \dim_\nu B_j[m]$. D'où $\dim B_j[m] = \dim_\nu B_j[m]$ et $\dim_\nu B[m] = \dim_\nu B_j[m]$. Inversement, si $\dim_\nu B = \dim_\nu B_j$ pour un anneau B_j tel que $B_j[m]$ est de Jaffard, alors

$$\dim B[m] \geq \dim B_j[m] = \dim_\nu B_j[m] = \dim_\nu B[m] \ .$$

Donc nécessairement $\dim_\nu B[m] = \dim B[m]$. ∎

En combinant [Proposition 1.2], [Corollaire 1.3] et [Lemmes 2.3 et 2.4], on tire directement le résultat suivant:

Théorème 2.5. *Si T est semi-local d'idéaux maximaux M_i ($1 \leq i \leq k$) et localement de Jaffard, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(**i**) *$R[m]$ est un anneau de Jaffard.*

(**ii**) *Il existe $j \in \{1,2,...,k\}$ tel que $m \geq d_j$, $\dim_\nu R = \dim_\nu D_j + \mathrm{ht}_T M_j + d_j$ et $D_j[m]$ est de Jaffard.*

Pour passer du cas local au cas global, on a besoin du lemme suivant qui découle aisément de [11, Lemme 1]:

Lemme 2.6. *Soient A un anneau et m un entier naturel. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(**i**) *$A[m]$ est localement de Jaffard.*

(**ii**) *$A_M[m]$ est localement de Jaffard pour tout idéal maximal M de A.*

(**iii**) *$A_P[m]$ est de Jaffard pour tout idéal premier P de A.*

Théorème 2.7.

(**i**) *Si pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, $T[s]$, $D_i[t_i]$ sont des anneaux localement de Jaffard et $m \geq \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\{d_i + s, t_i\}$, alors $R[m]$ est un anneau localement de Jaffard.*

(**ii**) *Si $R[m]$ est un anneau localement de Jaffard, alors $T[m]$, $D_i[m]$ sont des anneaux localement de Jaffard pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$ et $m \geq \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\{d_i\}$.*

En outre, si T est un anneau localement de Jaffard, alors $R[m]$ est un anneau localement de Jaffard si et seulement $D_i[m]$ est localement de Jaffard pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$ et $m \geq \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\{d_i\}$.

Démonstration: (**i**) Soit P un idéal premier de R. Compte tenu de [Lemme 2.6], il s'agit de prouver que $R_P[m]$ est un anneau de Jaffard. Deux cas peuvent se présenter:

Si $I \not\subset P$, il existe un idéal premier Q de T tel que $Q \cap R = P$ et $R_P = T_Q$ [Lemme 0.1]. Comme $T_Q[s]$ est un anneau de Jaffard, il en est de même pour $R_P[s]$, donc $R_P[m]$ est aussi un anneau de Jaffard [1, Proposition 1.2].

Si $I \subseteq P$, alors I contient un et un seul η_i et il existe un idéal premier q_i de D_i tel que R_P est l'anneau de la construction $(T_{M_i}, M_i T_{M_i}, (D_i)_{q_i})$, où T_{M_i} est évidemment local [Lemme 0.1], alors $R_P[m]$ est un anneau de Jaffard [Lemme 2.3].

(**ii**) Si q_i un idéal premier arbitraire de D_i et P son image réciproque par la surjection canonique $T \to T/M_i$, alors R_P est l'anneau de la construction $(T_{M_i}, M_i T_{M_i}, (D_i)_{q_i})$, et par conséquent $(D_i)_{q_i}[m]$, $T_{M_i}[m]$ sont des anneaux de Jaffard et $m \geq d_i$ [Lemme 2.3]. Il reste à prouver que $T_Q[m]$ est un anneau de Jaffard pour tout idéal premier Q de T distinct de M_i, c'est à dire ne contenant pas I, or dans ce cas, on a $R_{P'} = T_Q$ où $P' = Q \cap R$. Comme $R_{P'}[m]$ est un anneau de Jaffard, alors $T_Q[m]$ aussi. Ainsi [Lemme 2.6] permet de conclure.

La dernière assertion découle de (i) et (ii) et du fait que si T est un anneau localement de Jaffard, il en est de même pour $T[s]$ [11, Lemme 1]. ∎

Remarque 2.8. L'hypothèse $m \geq \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{d_i+s, t_i\}$ est essentielle dans le premier point de chacun des résultats [Lemme 2.3 et Théorème 2.7] comme l'indique l'exemple suivant: considérons l'exemple de la Remarque 1.6, où T est local d'idéal maximal M et de corps résiduel K et où $\dim T = 1$ et $\dim_\nu T = 2$, k un sous corps de K avec $\mathrm{d.t.}[K:k] = d \geq 1$ et R l'anneau de la construction (T, k, M). Dans ce cas, on a $s = 1$, $t = 0$ et $\mathrm{Max}\{d+s, t\} = d+1$. Pour tout entier $m \geq d+1$, l'anneau $R[m]$ est localement de Jaffard [Théorème 2.7]. Par contre, pour $m < d+1$, l'anneau $R[m]$ n'est pas (localement) de Jaffard, car $\dim R[m] = 2m+1$, alors que l'on a

$$\dim_\nu R[m] = \dim_\nu R + m = \dim_\nu T + d + m = 2 + m + d\ .$$

3 – Applications

Une première application consiste à prendre pour T une algèbre de type fini sur un corps, c'est évidemment un anneau localement de Jaffard. En combinant alors [Théorème 1.7], [Lemme 2.4] et [Théorème 2.7] avec l'étude des sous anneaux de la forme $D+I$ développée dans l'article [5], on tire aisément:

Théorème 3.1. *Soient T une algèbre de type fini sur un corps K, M_i des idéaux maximaux de T et D_i des sous anneaux de K $(1 \leq i \leq k)$. Si $R_i = D_i + M_i$ et $d_i = \mathrm{d.t.}[K:D_i]$, posant $R = \bigcap_i R_i$ et $d = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{d_i\}$, on a:*

- (**i**) $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim D_i[m] + \dim T + \inf(m, d_i)\}$.
- (**ii**) *$R[m]$ est un anneau de Jaffard si et seulement s'il existe $j \in \{1,2,...,k\}$ tel que $\dim_\nu R = \dim_\nu D_j + \dim T + d_j$, $D_j[m]$ est un anneau de Jaffard et $m \geq d_j$.*
- (**iii**) *$R[m]$ est un anneau localement de Jaffard si et seulement si $m \geq d$ et $D_i[m]$ est un anneau localement de Jaffard pour tout $i \in \{1,2,...,k\}$.*

Une seconde application consiste à prendre pour R_i des anneaux de la construction (V_i, M_i, D_i) où les V_i sont des anneaux de valuation deux à deux incomparables d'un même corps de fractions.

Théorème 3.2. *Soient $\{V_i\}_{1\leq i\leq k}$ des anneaux de valuation deux à deux incomparables de même corps de fractions L et respectivement d'idéaux maximaux M_i et de corps résiduel k_i. Si pour tout $i \in \{1,2,...,k\}$, D_i est un sous anneaux de k_i tels que $d_i = \mathrm{d.t.}[k_i:D_i]$ et R'_i est l'anneau de la construction (V_i, M_i, D_i), posant $R = \bigcap_i R'_i$ et $d = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{d_i\}$, on a:*

(**i**) $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim D_i[m] + \dim V_i + \inf(m, d_i)\}$.

(**ii**) *$R[m]$ est un anneau de Jaffard si et seulement s'il existe $j \in \{1, 2, ..., k\}$ tel que* $\dim_\nu R = \dim_\nu D_j + \dim V_j + d_j$, *$D_j[m]$ est un anneau de Jaffard et $m \geq d_j$.*

(**iii**) *$R[m]$ est un anneau localement de Jaffard si et seulement si $m \geq d$ et $D_i[m]$ est un anneau localement de Jaffard pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$.*

Démonstration: Posons $T = \bigcap_{i=1}^{k} V_i$. L'anneau T est de Prüfer semi-local d'idéaux maximaux $\mathcal{M}_i = M_i \cap T$ tels que $V_i = T_{\mathcal{M}_i}$ et $\mathcal{M}_i T_{\mathcal{M}_i} = M_i$ $(1 \leq i \leq k)$. Donc R'_i est l'anneau de la construction $(T_{\mathcal{M}_i}, \mathcal{M}_i T_{\mathcal{M}_i}, D_i)$. Ainsi (i) découle du Théorème 1.7, (ii) du Théorème 2.5 et (iii) du Théorème 2.7. ∎

Rappelons qu'un anneau R est dit de *pseudo-valuation* si tout idéal premier P de R est fortement premier, c'est à dire $x \in k(R)$, $y \in k(R)$ et $xy \in P$ implique $x \in P$ ou $y \in P$ [15]. D.F. Anderson et D.E. Dobbs [2, Proposition 2.6] ont montré qu'un anneau de pseudo-valuation R est local d'idéal maximal M et que c'est l'anneau de la construction (V, M, k) où $V = (M : M)$ est un anneau de valuation appelé *l'anneau de valuation associé à* R et k est un sous corps du corps résiduel de R. Le résultat suivant est un cas particulier du Théorème 3.2 (chaque D_i étant ici un corps).

Corollaire 3.3. *Soit R l'intersection d'un nombre fini k d'anneaux de pseudo-valuation R'_i de même corps de fractions L et respectivement d'idéaux maximaux M_i, deux à deux incomparables. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, soit $V_i = (M_i : M_i)$ l'anneau de valuation associé à R'_i et* $d_i = \mathrm{d.t.}[V_i/M_i : R'_i/M_i]$ *et* $d = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{d_i\}$, *on a alors:*

(**i**) $\dim R[m] = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq k}\{\dim V_i + m + \inf(m, d_i)\}$.

(**ii**) *$R[m]$ est un anneau de Jaffard si et seulement s' il existe $j \in \{1, 2, ..., k\}$ tel que* $\dim_\nu R = \dim V_j + d_j$ *et $m \geq d_j$.*

(**iii**) *$R[m]$ est un anneau localement de Jaffard si et seulement si $m \geq d$.*

Exemple 3.4. Soient k un corps, $T_1, T_2, ..., T_n$, $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ des indéterminées sur k et $K = k(T_1, T_2, ..., T_n)$. Dans l'anneau de polynômes $B_1 = k[T_1, T_2, ..., T_n]$, on considère les idéaux premiers incomparables: $M'_1 = (Z_1)$, $M'_2 = (Z_1 - 1, Z_2)$, ..., $M'_n = (Z_1 - 1, Z_2 - 1, ..., Z_n)$ et la partie multiplicative $S = B_1 \setminus \bigcup_i M'_i$. Posons $B = S^{-1}B_1$ et $M_i = S^{-1}M'_i$ $(1 \leq i \leq n)$. B est un anneau semi-local d'idéaux maximaux $M_1, M_2, ..., M_n$ tels que $\mathrm{ht}_B M_i = i$, $B/M_i \cong K(Z_{i+1}, Z_{i+2}, ..., Z_n)$ et $d_i = \mathrm{d.t.}[B/M_i : K] = n - 1$.

Soit enfin R_i l'anneau de la construction $(B, M_i, k[T_1, T_2, ..., T_n])$ et $R = \bigcap_i R_i$. On a alors:

$$\dim R_i = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\Big\{\dim B,\ \dim k[T_1, T_2, ..., T_n] + \mathrm{ht}_B\, M_i\Big\} = n + i\ ,$$

$$\dim_\nu R_i = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\Big\{\dim_\nu B,\ \dim_\nu k[T_1, T_2, ..., T_n] + \dim_\nu B_{M_i}\Big\} = 2\,n\ .$$

– R comme R_n est un anneau de Jaffard de dimension de Krull $2n$ mais R_i n'est pas de Jaffard pour $1 \leq i < n$, donc $R[m]$ est un anneau de Jaffard pour tout entier naturel m même si $m < d$ (contrairement au cas local, le Lemme 2.3 n'est pas valable pour une intersection de produits fibrés).

– $R[m]$ est localement de Jaffard si et seulement si $m \geq d = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq k}\{d_i\} = n - 1$.

Exemple 3.5. Soient k un corps, $X, Y, Z_1, Z_2, ..., Z_d$ $(d > 1)$ des indéterminées sur k et $K = k(Z_1, Z_2, ..., Z_d)$. Considérons les anneaux de valuations:

$$V_1 = K(X)[Y]_{(Y)} = K(X) + M_1 \quad \text{où} \quad M_1 = (Y)\,K(X)[Y]_{(Y)}\ ,$$

$$V_2' = K(X)[Y]_{(Y+1)} = K(X) + N_2' \quad \text{où} \quad N_2' = (Y+1)\,K(X)[Y]_{(Y+1)}\ .$$

V_1 et V_2' sont incomparables ayant le même corps de fractions $K(X, Y)$ (car si $V_1 \subseteq V_2'$, alors $N_2' \subseteq M_1$, donc $1 = (Y + 1) - 1 \in M_1$, ce qui est faux). Soit $V_2 = K[X]_{(X)} + N_2'$ le sous anneau de valuation de V_2' d'idéal maximal $N_2 = (X)\,K[X]_{(X)} + N_2'$. On voit de même que V_1 et V_2 sont aussi deux anneaux de valuations incomparables ayant le même corps de fractions $K(X, Y)$ tels que $V_1/M_1 \cong K(X)$ et $V_2/N_2 \cong K$.

Enfin soit R l'intersection de R_1' et R_2' qui sont respectivement les anneaux de la construction $(V_1, M_1, K[X])$ et (V_2, N_2, k). On a alors:

– $\dim R_1 = \dim_\nu R_1 = \dim K[X] + \dim V_1 = 2$, donc R_1 est de Jaffard.

– $\dim R_2 = \dim k + \dim V_2 = 2$ et $\dim_\nu R_2 = \dim k + \dim V_2 + d = 2 + d$, donc R_2 n'est pas de Jaffard.

– $\dim R = \dim R_1 = 2$ et $\dim_\nu R = \dim_\nu R_2 = 2 + d$, donc R n'est pas de Jaffard (on voit que les hypothèses $\dim R = \dim R_1$ et R_1 est de Jaffard ne peuvent suffire dans le Lemme 2.4 pour que R soit de Jaffard).

– $\dim R[m] = \mathrm{Max}\Big\{\dim K[X][m] + \dim V_1,\ \dim k[m] + \dim V_2 + \inf(m, d)\Big\} = m + 2 + \inf(m, d)$.

– $R[m]$ est de Jaffard (et même localement de Jaffard) si et seulement si $m \geq d$.

Exemple 3.6. Soient K un corps et $Z_1, Z_2, ..., Z_n, Z_{n+1}$ des indéterminées sur K. Considérons les anneaux de valuations:

$$V_1 = K(Z_1, Z_2, ..., Z_n)[Z_{n+1}]_{(Zn+1)} = K(Z_1, Z_2, ..., Z_n) + M_1 \ ,$$

$$\begin{aligned} V_2 &= K(Z_{n+1}) + Z_1\, K(Z_{n+1})[Z_1]_{(Z1)} + \cdots + Z_n\, K(Z_{n+1})[Z_n]_{(Zn)} \\ &= K(Z_{n+1}) + M_2 \ . \end{aligned}$$

V_1 et V_2 ont le même corps de fractions $K(Z_1, Z_2, ..., Z_n, Z_{n+1})$ et sont de dimension de Krull respectives 1 et n. On a $V_1/M_1 \cong K(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ et $V_2/M_2 \cong K(Z_{n+1})$. En outre V_1 et V_2 sont incomparables (car si $V_2 \subseteq V_1$, alors $M_1 \subseteq M_2$. Comme $Z_{n+1} \in M_2$ et $Z_{n+1}^{-1} \in V_2$, on aurait alors $1 = Z_{n+1}\, Z_{n+1}^{-1} \in M_2$, d'où une contradiction).

Enfin considérons l'intersection R des deux anneaux de pseudo-valuations R_1 et R_2 qui sont respectivement les anneaux de la construction (V_1, M_1, K) et (V_2, M_2, K). On a alors:

– $\dim R = \dim R_2 = n$ et $\dim_\nu R = \dim_\nu R_1 = \dim_\nu R_2 = n+1$. Donc R n'est pas de Jaffard.

– $$\begin{aligned} \dim R[m] &= \mathrm{Max}\Big\{m + \dim V_1 + \inf(m,n),\ m + \dim V_2 + \inf(m,1)\Big\} \\ &= m + n + \inf(m,1). \end{aligned}$$

– $R[m]$ est de Jaffard si et seulement si $m \geq 1$.

– $R[m]$ est localement de Jaffard si et seulement si $m \geq n$.

Remerciements – L'auteur tient à remercier le referee pour les corrections et les suggestions concernant quelques aspects du présent papier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Anderson, D.F., Bouvier, A., Dobbs, D.E., Fontana, M. and Kabbaj, S. – On Jaffard domains, *Expo. Math.,* 5 (1988), 145–175.

[2] Anderson, D.F. and Dobbs, D.E. – Pairs of rings with the same prime ideals, *Canad. J. Math.,* 32 (1980), 362–384.

[3] Arnold, J.T. – On the dimension theory of overrings of an integral domain, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 138 (1969), 313–326.

[4] Arnold, J.T. and Gilmer, R. – The dimension sequence of a commutative ring, *Amer. J. Math.,* 96 (1974), 385–408.

[5] Ayache, A. – Sous anneaux de la forme $D+I$ d'une K-algèbre intègre, *Portugaliae Mathematica,* 50(2) (1993).

[6] Ayache, A., Cahen, P.J. and Echi, O. – Intersection de produits fibrés et formule de la dimension, *Comm. Algebra,* 22(9) (1994), 3495–3509.

[7] Bastida, E. and Gilmer, R. – Overrings and divisorial ideals of rings of the form $D+M$, *Mich. Math. J.,* 20 (1973), 79–95.

[8] Bouvier, A. and Kabbaj, S. – Examples of Jaffard domains, *J. of Pure and Applied Algebra,* 54 (1988), 155–165.

[9] Brewer, W. and Rutter, E.A. – $D+M$ construction with general overrings, *Mich. Math. J.,* 23 (1976), 33–42.

[10] Cahen, P.J. – Couple d'anneaux partageant un idéal, *Arch der Math.,* 51 (1988), 505–514.

[11] Cahen, P.J. – Construction B, I, D et anneaux localement ou residuellement de Jaffard, *Arch. der Math.,* 54(2) (1990), 125–141.

[12] Costa, D., Mott, J.L. and Zafrullah, M. – Overrings and dimension of general $D+M$ construction, *J. of Natural Sciences and Math.,* 26(2) (1986), 7–14.

[13] Fontana, M. – Carrés cartésiens, anneaux divisés et localement divisés, *Prépublication de l'Université de Paris-Nord,* 21 (1980).

[14] Gilmer, R. – *Muliplicative Ideal Theory*, Marcel Dekker, New York, 1972.

[15] Hedstrom, J.R. and Houston, E.G. – Pseudo-valuation domains, *Pacific. J. Math.,* 32 (1978), 137–147.

Ahmed Ayache,
Sana'a University, Faculty of Sciences,
P.O. Box: 12460 Sana'a – REPUBLIC OF YEMEN