PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 56 Fasc. 2 – 1999

# LOIS CONDITIONNELLES DES EXCURSIONS D'UN PROCESSUS DE MORKOV A NAISSANCE ET MORT ALEATOIRES

H. Boutabia

**Résumé:** On donne certaines lois conditionnelles des excursions et des couples d'excursions chevauchant des temps aléatoires quelconques d'un processus de Markov à naissance et mort aléatoires $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sans les hypothèses de dualité. $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ n'est pas supposé stationnaire comme dans [15], [16], [17]. Ceci étend les résultats de [17].

**Abstract:** We give certain conditional laws of excursions and of pairs of excursions straddling arbitrary random times for a right Markov process $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ with random times of birth and death without the duality hypotheses. $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ is not assumed to be stationary as was assumed in [15], [16], [17]. This extends results of [17].

## 1 – Introduction

Mitro [15] construit à partir de deux processus standards en dualité, un processus auxilliaire qui est un processus stationnaire à naissance et mort aléatoires, et construit dans [17] un "système de sortie mixte" permettant de décrire les couples d'excursions de ce processus auxilliaire.

Dans le présent article et en particulier dans les paragraphe 4 et 5, on étudiera dans diverses situations, pour un processus droit $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ à naissance et mort aléatoires et un ensemble aléatoire fermé et homogène $M$, l'indépendance conditionnelle des variables aléatoires $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$, où:

$$G = \sup\Big\{s \in M \colon\, s \le T\Big\}\,, \qquad D = \inf\Big\{s \in M \colon\, s \ge S\Big\}\ ,$$

$$\tau_G = (Y_{G+t})_{t\ge 0} \quad \text{ et } \quad \widetilde{\tau}_D = (Y_{(D-t)^-})_{t\ge 0}\ ,$$

*Received*: September 22, 1997; *Revised*: April 1, 1998.

lorsque $S$ et $T$ sont deux temps aléatoires quelconques. On ne fera aucune hypothèse de dualité ni de stationnarité. On démontrera l'extension de la formule obtenue dans [12] permettant de calculer, pour un processus $Z$ positif et $(F_{D_t})$-prévisible

$$\Big(D_t = \sup\Big\{s \in M,\ s > t\Big\},\quad t \in \mathbb{R}_+\Big)\ ,$$

l'expression de la forme:

$$P^x \sum_{s \in G^\circ} Z_s\, f(\theta_s)$$

$(\Omega, F, F_t, X_t, \theta_t, P^x)$ est la réalisation canonique du semi-groupe de transition de $(Y_t)$, et $G^\circ$ est l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à $M$.

Dans le paragraphe 2 on adaptera le résultat de base obtenu par Maisonneuve dans [14], où l'on exprimera à l'aide des mesures de sorties de $M$, la loi de $\tau_G$ par rapport au passé de $G$. De façon similaire on précise dans le paragraphe 3, la loi de $\widetilde{\tau}_D$ par rapport au passé de $-D$, relatif au processus de réserve $(\widehat{Y}_t) = (Y_{(-t)^-})$ que l'on supposera markovien pour la circonstance.

## 2 – Notations et résultats préliminaires

Soit $(\Omega, F, F_t, X_t, \theta_t, P^x)$ la réalisation canonique d'un semi groupe standard $(P_t)$, d'espace d'état $E$ supposé lusinien. On note $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}^*$) la tribu borélienne (resp. des ensembles universellement mesurables) de $E$, et l'on désigne par $\delta$ le point cimetière (hors de $E$).

On considère l'ensemble $W$ des applications $w$ de $\mathbb{R}$ dans $E \cup \{\delta\}$ satisfaisant la condition suivante: il existe un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ sur lequel $w$ est à valeur dans $E$, continue à droite avec des limites à gauche, et hors duquel $w = \delta$. Soient $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le processus des coordonées sur $W$ (i.e. $Y_t(w) = w(t)$; $t \in \mathbb{R}$), $(\Sigma^0_t)$ sa filtration naturelle et $\Sigma^0 = \sigma(Y_t\colon t \in \mathbb{R})$. Les variables aléatoires $\inf\{Y_t \in E\}$ et $\sup\{t\colon Y_t \in E\}$ seront notées respectivement $\alpha$ et $\beta$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $\tau_t$ la projection sur $\Omega$ telle que $X_s{\circ}\tau_t = Y_{t+s}$ sur $\{Y_t \in E\}$ $(s \geq 0)$, et par $\sigma_t$ l'application à valeurs dans $W$ telle que $\sigma_t = (Y_{t+u})_{u\in\mathbb{R}}$.

Notons que:

$$\theta_s{\circ}\tau_t = \tau_{t+s} \quad\text{et}\quad \sigma_t{\circ}\sigma_u = \sigma_{t+u} \qquad (t, u \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ s \geq 0)\ .$$

Il est facile de voir (d'après un théorème de Kuznetsov [9]) que si $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une famille de mesure $\sigma$-finies sur $E$ telle que $\eta_{t+s} \geq \eta_t P_s$ $(t \in \mathbb{R},\ s > 0)$, alors il existe une unique mesure $Q$ sur $W$ telle que $\eta_t = Q(Y_t \in \cdot)$ sur $\mathcal{B}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $(Y_t)$

est markovien de semi-groupe $(P_t)$. Dans toute la suite nous supposerons que $Q$ est une telle mesure. En fait, $(Y_t)$ est fortement markovien sous $Q$ (cf. [1], [15]), au sens que sur $\{Y_U \in E\}$,

$$Q\Big(f \circ \tau_U \,|\, \Sigma_U\Big) = P^{Y_U}(f) \tag{1}$$

pour $f \geq 0$ et $F^\circ$-mesurable et $U$ un temps d'arrêt de $(\Sigma_t)$, où $\Sigma_t$ est la $Q$-complétion de la tribu $\Sigma^0_{t+}$ et $F^\circ = \sigma(X_s\colon\, s \geq 0)$ $(t \in \mathbb{R})$.

On note $\Sigma$ la $Q$-complétion de $\Sigma^0$.

Soit $(\widehat{Y}_t) = (Y_{(-t)^-})$ le processus de réserve de $(Y_t)$. Sur l'intervalle stochastique $]\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}[\, = \,]-\beta, -\alpha[$, $(\widehat{Y}_t)$ est continu à droite et posséde des limites à gauche dans $E$. Les objets analogues à $\Sigma^0_t$, $\Sigma_t$, $\tau_t$ et $\sigma_t$ correspondant à $(\widehat{Y}_t)$ seront notés respectivement $\widehat{\Sigma}^0_t$, $\widehat{\Sigma}_t$, $\widehat{\tau}_t$ et $\widehat{\sigma}_t$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $w \in W$ et $\omega \in \Omega$ on note $w\,/\,t\,/\,\omega$ la trajectoire $\overline{w}$ de $W$ égale à $w$ sur $]-\infty, t[$ et telle que $\overline{w}(u) = \omega(u-t)$ si $u \geq t$, on a alors $\tau_t(\overline{w}) = \omega$.

Ces trajectoires vont jouer un rôle clé dans les développements ultérieures.

On se donne un sous-ensemble aléatoire fermé de $]0, +\infty[$ défini sur $\Omega$ et noté $M$, que l'on supposera optionnel et homogène tel que la variable aléatoire $R = \inf M$ soit $F^*$-mesurable ($F^*$ étant la complétée universelle de la tribu $F^\circ$). Soit $(B, {}^*P)$ un système de sortie de $M$ (cf. [10], [11]).

A $M$ on associe le sous-ensemble fermé de $]\alpha, \beta[$ (noté encore $M$) défini par:

$$M = \bigcup_{\alpha < t < \beta} \{t + R \circ \tau_t\}\ ,$$

et à $B$ on associe la mesure aléatoire sur $W$ (notée encore $B$) portée par $]\alpha, \beta[$, telle que sur $\{Y_t \in E\}$ $(t \in R$ et $s > 0)$

$$B\Big(]t, t+s]\Big) = B_{s^\circ}\tau_t\ . \tag{2}$$

On notera que l'additivité de $B$ assure l'existence de $B$ sur $W$ (cf. [7]) et que sur $\{Y_t \in E\}$

$$(M - t) \cap\, ]0, +\infty[\, = M \circ \tau_t\ . \tag{3}$$

On désigne par $G^\circ$ (resp. $D^\circ$) l'ensemble des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles contigus à $M$, qui sont contenus dans $]\alpha, \beta[$.

La formule suivante est une extension du théorème (1.3) chapitre II [1]:

$$Q \sum_{t \in G^\circ} V_t f(\cdot, t, \tau_t) \; = \int_W Q(dw) \int_{\mathbb{R}} B(w, dt)\, V_t(w)\, {}^*P^{Y_t(w)}(f(w, t, \cdot)) \tag{4}$$

pour tout processus $V \geq 0$, $(\Sigma_t)$-optionnel et pour toute fonction $f \geq 0$, $\Sigma^0 \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes F^*$-mesurable ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose:

$$G_t = \sup\Big\{s \in M:\ s \leq t\Big\} \quad (\sup \oslash = -\infty)\ ,$$

$$g_t = \sup\Big\{s \in M:\ s < t\Big\}\ ,$$

$$D_t = \inf\Big\{s \in M:\ s > t\Big\} \quad (\inf \oslash = +\infty)\ ,$$

$$A_t = t - G_t\,, \quad R_t = R \circ \tau_t\,, \quad r_t = R_{t^-} \quad \text{et} \quad d_t = D_{t^-}\ ,$$

et on note $(\Re_t)$ et $(\widehat{\Re}_t)$ les filtrations de $(\Sigma)$ respectives $(\Sigma_{D_t})$ et $(\widehat{\Sigma}_{-g_{-t}})$.

Soit maintenant $T$ un temps aléatoire sur $(W, \Sigma)$, qui sera fixé dans toute la suite, tel que $T < D_T$ sur $\{Y_G \in E\}$ où l'on a posé $G = G_T$ et $d = D_T$.

On notera que $Q$ est $\sigma$-finie sur la tribu $\Sigma_G \cap \{Y_G \in E\}$; en effet:

$$\{Y_G \in E\} = \bigcup_{r \text{ rationnel}} \bigcup_{n \in N} \{Y_r \in E_n^r\} \cap \{r \leq G\} \cap \{Y_G \in E\} \tag{5}$$

où $(E_n^r)$ est une suite croissante de $\mathcal{B}$ convergeant vers $E$, telle que

$$Q(Y_r \in E_n^r) < +\infty\ .$$

Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $w \in \{Y_G \in E\}$ on pose

$$A^w(\omega) = T(w \,/\, G(w) \,/\, \omega) - G(w)\ .$$

Nous utiliserons dans toute la suite la notation habituelle $\nu(\cdot|A) = \frac{\nu(\,\cdot\,;A)}{\nu(A)}$ si $0 < \nu(A) < +\infty$ et 0 ailleurs, pour toute mesure $\nu$ sur $(\Omega, F^*)$ et $A \in F^*$.

La formule (4) et une application du théorème 5.4 [14] nous permettent d'affirmer que sur $\{Y_G \in E\}$ la loi conditionnelle du futur de $G$ par rapport à son passé est ${}^*P^{Y_G}$ après conditionnement par $\{0 \leq A^{\cdot} < R\}$, et par $\{A^{\cdot} < R\}$ lorsque $T$ est un temps d'arrêt de $(\Re_t)$, d'où le résultat suivant:

**Théorème 1.** *Pour toute fonction $F \geq 0$ et $F^*$ mesurable, on a pour presque tout $w \in \{Y_G \in E\}$:*

**(i)**

$$Q\Big(f(\tau_G) \,|\, \Sigma_G\Big)(w) = {}^*P^{Y_G(w)}\Big(f | 0 \leq A^w < R\Big)\ ; \tag{6}$$

**(ii)** *La mesure ${}^*P^{Y_G(w)}$ est portée par:*

$$\Big\{G(w) \in G^\circ(w \,/\, G(w) \,/\, \cdot)\Big\}\ ;$$

(**iii**) *De plus si $T$ est un temps d'arrêt de $(\Re_t)$ on a:*

$$Q\Big(f(\tau_G)\,|\,\Sigma_G\Big)(w) = {}^*P^{Y_G(w)}\Big(f|A^w < R\Big)\ . \tag{7}$$

Comme dans [14], la condition $0 \le A^w < R$ peut être remplacée par $A^w = 0$ si $T \in G^\circ$ sur $\{Y_T \in E\}$ et par $0 < A^w < R$ si $G < T$ sur $\{Y_G \in E\}$.

Soit la famille de mesures $P^{x,l,y}$ sur $(\Omega, F)$, définie pour $(x, \ell, y) \in E \times \mathbb{R}_+ \times E$ par:

$$P^{x,\ell,y} = {}^*P^x\Big(\cdot|R = \ell,\ X_R = y\Big)$$

et introduite dans le lemme 5.1 [14].

Pour tout $w \in \{Y_G \in E\}$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on pose:

$$A^w_d(\omega) = A^w\Big(\omega\,/\,d(w) - G(w)\,/\,\tau_d(w)\Big)\ ,$$

où les trajectoires $\omega/s/\omega'$ sont définies pour $\omega, \omega' \in \Omega$ et $s > 0$ comme les trajectoires, $w/s/\omega$ avec $w \in W$, $\omega \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$ (cf. [14]).

Dans ce cas les formules du théorème (5.4) de [14] s'adaptent également à notre situation, et on a pour presque tout $w \in \{Y_G \in E\}$ la loi conditionnelle de $\tau_G$ (resp. $k_R \circ \tau_G$) par rapport à la tribu engendrée par $\Sigma_G$, $d$, $Y_d$ (resp. $\Sigma_G$, $d$, $\tau_d$) est $\eta^w(\cdot|0 \le A^w < R)$ (resp. $\eta^w(k_R \in \cdot|0 \le A^w_d < R)$), où $\eta^w = P^{Y_G(w), d(w)-G(w), Y_d(w)}$. On notera que $k_R \circ \tau_G$ est l'excursion chevauchant $T$, où l'on a désigné par $k_t$ l'opérateur de meurtre à $t$ (i.e. $X_s(k_t) = X_s$ si $s < t$, $\delta$ si $s \ge t$).

## 3 – L'excursion du processus de reserve chevauchant un temps aléatoire quelconque

Soit $S$ un temps aléatoire sur $(W, \Sigma)$, qui sera également fixé dans toute la suite, tel que $g_s < S$ sur $\{Y_{D^-} \in E\}$, où l'on a posé $D = d_s$.

Pour les analogues des résultats cités plus haut et toute suite, nous ferons l'hypothèse que le processus $(\widehat{Y}_t)$ est également markovien sous $Q$, relativement à un autre semi-groupe standard $(\widehat{P}_t)$ et sa filtration naturelle. La réalisation canonique de $(\widehat{P}_t)$ sera notée $(\Omega, F, \widehat{F}_t, X_t, \theta_t, \widehat{P}^x)$. Notons que dans les situations étudiées par Mitro ([15], [16], [17]) $\eta_t$ ne dépend pas de $t$. Dans ce cas les processus $(Y_t)$ et $(\widehat{Y}_t)$ sont stationnaires.

Soit $\widehat{M}$ un ensemble aléatoire, défini sur $\Omega$, de la même manière que $M$ a ceci-près qu'il est $(\widehat{F}_t)$-optionnel, au lieu d'être $(F_t)$-optionnel, et tel que la variable aléatoire $\widehat{R} = \inf \widehat{M}$ soit $F^*$-mesurable. On note encore $\widehat{M}$ le sous-ensemble de $]\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}[$, défini par:

(8) $$\widehat{M} = \bigcup_{\widehat{\alpha}<t<\widehat{\beta}} \{t+\widehat{R} \circ \widehat{\tau}_t\}$$

et on supposera dans toute la suite que $\widehat{M} = -M$, de sorte que si $t$ est une extrémité gauche d'un intervalle contigu à $\widehat{M}$, alors $(-t)$ est une extrémité droite d'un intervalle contigu à $M$. L'exemple le plus important est celui considéré par Getoor et Sharpe [6], où

$$M = \Big\{s \geq 0\colon\ (X_s-, X_s) \in \Gamma\Big\},\quad \widehat{M} = \Big\{s \geq 0\colon\ (X_s-, X_s) \in \widehat{\Gamma}\Big\} \quad \text{sur}\ \ \Omega\ ,$$

$\Gamma$ étant un borélien de $E \times E$ et $\widehat{\Gamma} = \{(x,y)\colon\ (y,x) \in \Gamma\}$.

$$\text{Sur}\ \ W\,, \qquad M = \Big\{s \in \mathbb{R}\colon\ (Y_s-, Y_s) \in \Gamma\Big\},\quad \widehat{M} = \Big\{s \in \mathbb{R}\colon\ (\widehat{Y}_s-, \widehat{Y}_s) \in \widehat{\Gamma}\Big\}\ .$$

**Remarque 1.** Il est intéressant de noter que: $M = M \circ \widehat{\sigma}_0$ et $D^\circ = D^\circ \circ \widehat{\sigma}_0$, en particulier on a:

$$g_t \circ \widehat{\sigma}_0 = g_t \ (\text{pour tout } t \in \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad g_s \circ \widehat{\sigma}_0 = g_{s \circ \widehat{\sigma}_0}\ .$$

En effet, $M = M \circ \widehat{\sigma}_0$ provient de la définition (8) de $\widehat{M}$ et $D^\circ = D^\circ \circ \widehat{\sigma}_0$ découle de l'égalité:

$$D^\circ = \Big\{t \in \mathbb{R}\colon\ \widehat{R} \circ \widetilde{\tau}_t > 0 \ \text{ et }\ \widehat{R} \circ \widehat{\tau}_{(-t)}- = 0\Big\}\ .$$

Pour les résultats qui vont suivre, il est commode d'exprimer les formules faisant intervenir le processus $(\widehat{Y}_t)$, à l'aide des opérateurs:

$$\widetilde{\tau}_t = \widehat{\tau}_{-t} \qquad (X_s \circ \widetilde{\tau}_t = Y_{(t-s)^-} \ \text{ pour }\ s \geq 0)$$

et des tribus $\widetilde{\Sigma}_t = \widehat{\Sigma}_{-t}$. La tribu $\widetilde{\Sigma}_t$ est alors engendrée par les ensembles de $Q$-mesures nulles et les variables aléatoire $Y_{u^-}$ tel que $u > t$.

Pour tout $w \in \{Y_{D^-} \in E\}$ et pour tout $\omega \in \Omega$ on pose:

$$r^w(\omega) \ = \ D(w) - S(w \,/\, {-D(w)} \,/\, \omega)\ .$$

Pour l'analogue du théorème 1, on a sur $\{Y_{D^-} \in E\}$ la loi conditionnelle du futur de $-D$ par rapport à son passé, relativement au processus $(\widehat{Y}_t)$, est ${}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}$ après conditionnement par $\{0 \leq r^\cdot < \widehat{R}\}$, et par $\{r^\cdot < \widehat{R}\}$ lorsque $-S$ est un temps d'arrêt de $(\widehat{\Re}_t)$, où $(\widehat{B}, {}^*\widehat{P})$ est un système de sortie optionnel de $\widehat{M}$.

**Théorème 2.** *Pour toute fonction $\widehat{f} \geq 0$ et $F^*$-mesurable, on a pour presque tout $w \in \{Y_{D^-} \in E\}$:*

**(i)**

(9) $$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big)(w) = {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}\Big(\widehat{f}|0 \leq r^w < \widehat{R}\Big) \ ;$$

**(ii)** *la mesure ${}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}$ est portée par:*

$$\Big\{D(w) \in D^\circ(w \,/\, -D(w) \,/\, \cdot)\Big\} \ ;$$

**(iii)** *de plus si $S$ est un temps d'arrêt de $(\widetilde{\Re}_t) = (\widetilde{\Sigma}_{g_t})$ on a:*

(10) $$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big)(w) = {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}\Big(\widehat{f} \,|\, r^w < \widehat{R}\Big) \ .$$

**Démonstration:** Observons d'abord que $D = D \circ \widehat{\sigma}_0$ sur $\{Y_{D^-} \in E\}$. En vertu de la remarque 1, il suffit de voir que:

$$S \circ \widehat{\sigma}_0 \in \, ]g_S, D] \quad \text{sur} \ \ \{Y_{D^-} \in E\} \ ,$$

or si tel n'est pas le cas alors on aura:

$$S \circ \widehat{\sigma}_0 \notin \, ]g_S \circ \widehat{\sigma}_0, D \circ \widehat{\sigma}_0], \quad \text{sur} \ \ \{Y_{D^-} \circ \widehat{\sigma}_0 \in E\} \ ,$$

ce qui contredirait l'hypothèse faite sur $S$.

Ainsi, en posant $\widehat{w} = \widehat{\sigma}_0(w)$ pour tout $w \in \{Y_{D^-} \in E\}$, $t = D(w)$ est l'unique $t = D^\circ(w)$ tel que:

$$0 \ \leq \ t - S(\widehat{w} \,/\, -t \,/\, \widetilde{\tau}_t(w)) \ < \ \widehat{R} \circ \widetilde{\tau}_t(w) \ .$$

Ceci permet alors de raisonner comme dans le théorème 3.2 [14] et on obtient la formule:

(11) $$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big)(w) \ = \ {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}\Big(\widehat{f}|0 \leq D(w) - S(\widehat{w}/-D(w)/\cdot) < \widehat{R}\Big)$$

pour presque tout $w \in \{Y_{D^-} \in E\}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, la condition

$$0 \ \leq \ D - S(\widehat{\sigma}_0 \,/\, -D \,/\, \omega) \ < \ \widehat{R}(\omega)$$

est équivalente à

$$0 \leq r^{\cdot}(\omega) < \widehat{R}(\omega) \quad \text{sur} \ \ \{Y_{D^-} \in E\} \ .$$

La formule (9) découle de (11), et la suite du théorème se démontre comme pour le théorème 1. ∎

## 4 – Loi de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$

On se place dans la situation du paragraphe précédent et on suppose que

$$\sigma(G) \cap A \subset \widetilde{\Sigma}_D \quad \text{et} \quad \sigma(D) \cap A \subset \Sigma_G \ ,$$

où l'on a posé $A = \{\alpha < D < G < \beta\}$. Noter que ces hypothèses entraînent la $\sigma$-finitude de $Q$ sur la tribu $(\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D) \cap A$. En effet, on a

$$A = \bigcup_{r \text{ rationnel}} \ \bigcup_{n \in N} \{D < r \le G\} \cap \{Y_r \in E^r_n\} \cap A \ ,$$

où $(E^r_n)$ est la suite considérée dans (5).

Pour tout $w \in A$, considérons les mesures $\nu^w$ et $\widehat{\nu}^{\,w}$ sur $(\Omega, F^*)$ définies par:

$$\nu^w = {}^*P^{Y_G(w)}(\cdot|0 \le A^w < R) \ , \qquad \widehat{\nu}^w = {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}(\cdot|0 \le r^w < \widehat{R}) \ . \tag{12}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de cet article.

**Théorème 3.** *Pour presque tout $w \in A$ on a:*

$$Q\Big(F(\tau_G, \widetilde{\tau}_D) \mid \Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D\Big)(w) \ = \ \nu^w \otimes \widehat{\nu}^w(F) \tag{13}$$

*pour toute fonction $F \ge 0$, $F^* \otimes F^*$-mesurable.*

En particulier sur $A$, $\nu^{\cdot} \otimes \widehat{\nu}^{\cdot}$ est la loi conditionnelle du couple $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$. Noter qu'un résultat similaire peut être obtenu à partir de la formule du "système de sortie mixte" (cf. [17]), sous les hypothèses de dualité.

**Démonstration:** Soit $f$, $\widehat{f}$ deux fonctions positives $F^*$-mesurables, et

$$\Lambda \in \Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D \quad \text{tel que} \ \ Q(A \cap \Lambda) < +\infty \ .$$

Pour prouver (13), il suffit d'établir la formule suivante:

$$Q\Big(f(\tau_G)\, \widehat{f}(\widetilde{\tau}_D)\, I_{A\cap\Lambda}\Big) \ = \ \int_W Q(dw)\, \nu^w(f)\, \widehat{\nu}^w(\widehat{f})\, I_{A\cap\Lambda}(w) \ . \tag{14}$$

Comme $f(\tau_G) I_A = \varphi(D, \tau_D, G) I_A$ où $\varphi(s, \omega, t) = f(\theta_{t-s}(\omega))$ pour $(s, \omega, t) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}$ $(s < t)$, et comme $\tau_D$ est $\widetilde{\Sigma}_D$-mesurable (car le processus $(\tau_{-t})$ est $(\widehat{\Sigma}_t)$-optionnel) alors $f(\tau_G)\, I_A$ est $\widetilde{\Sigma}_D$-mesurable. De la même façon on a $\sigma(Y_G) \cap A \subset \widetilde{\Sigma}_D$, et de manière similaire on montre que $\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D)\, I_A$ est $\Sigma_G$-mesurable et $\sigma(Y_{D^-}) \cap A \subset \Sigma_G$.

En utilisant la formule (9) et le fait que $w = w\,/\,G(w)\,/\,\tau_G(w)$, le premier membre de (14) devient

$$\int_w Q(dw)\, f(\tau_G(w))\, {}^*\widehat{P}^{Y_{D-}(w)}\Big(\widehat{f}|0 \leq \\ \leq D(w) - S\Big((w\,/\,G(w)\,/\,\tau_G(w))\,/\,-D(w)\,/\,.\Big) < \widehat{R}\Big)\, I_{A\cap\Lambda}(w)\ ,$$

et d'après une extension de la formule (6), on obtient:

$$Q\Big(f(\tau_G)\,\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D)\,I_{A\cap\Lambda}\Big) =$$

$$(15)\qquad = \int_w Q(dw) \int_\Omega \nu^w(d\omega)\, f(\omega)\, {}^*\widehat{P}^{Y_{D-}(w)}\Big(\widehat{f}|0 \leq \\ \leq D(w) - S\Big((w\,/\,G(w)\,/\,\omega)\,/\,-D(w)\,/\,\cdot\Big) < \widehat{R}\Big)\, I_{A\cap\Lambda}(w)\ .$$

Observons que pour presque tout $w \in A$ on a: $H(w,\, w/G(w)/\cdot) = H(w,w)\,\nu^w$ p.s., pour toute fonction $H \geq 0$ et $\Sigma_G \otimes \Sigma$-mesurable. En effet, une extension de la formule (6) nous permet d'écrire:

$$\int_A Q(dw)\,\nu^w\Big(H(w,\, w/G(w)/\cdot) \neq H(w,w)\Big) = Q(H \neq H; A) = 0\ .$$

En posant:

$$H(w,w') = {}^*\widehat{P}^{Y_{D-}(w)}\Big(\widehat{f}\,|0 \leq D(w) - S(w'/-D(w)/\cdot) < \widehat{R}\Big)$$

alors on a pour presque tout $w \in A$ (en utilisant la définition (12) de $\widehat{\nu}^w$):

$$\int_\Omega \nu^\omega(d\omega)\, f(\omega)\, {}^*\widehat{P}^{Y_{D-}(w)}\Big(\widehat{f}\,|0 \leq \\ \leq D(w) - S\Big((w/G(w)/\omega)\,/\,-D(w)\,/\,\cdot\Big) < \widehat{R}\Big)\, I_{A\cap\Lambda}(w) = \nu^w(f)\,\widehat{\nu}^w(\widehat{f})$$

et en reportant dans le second membre de (15), on obtient la formule (14). ∎

**Remarque 2.** On notera que sur $A$ la tribu $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$ contient l'information fournie par $(Y_u)_{D<u<G}$ et par $Y_G$ et $Y_{D-}$.

**Exemple 1.** Soit $U$ un temps aléatoire sur $(\Omega, F^*)$ strictement terminal et exact:

$$U = s + U \circ \theta_s \ \text{ sur } \{U \geq s\} \quad \text{et} \quad s + U \circ \theta_s \downarrow U$$

lorsque $s \downarrow 0$. On pose:

$$T = \inf_{\alpha<s<\beta}\{s + U \circ \theta_s\} \quad \text{et} \quad S = \sup_{\alpha<s<\beta}\{s - U \circ \widetilde{\tau}_s\}\ .$$

Il est aisé de voir que $T = t + U \circ \tau_t$ sur $\{T \geq t;\, Y_t \in E\}$ et que $S = t - U \circ \widetilde{\tau}_s$ sur $\{S \leq t;\, Y_{t^-} \in E\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La condition $A^w \geq 0$ (resp. $r^w \geq 0$) entraîne $A^w = U$ (resp. $r^w = U$), il résulte alors des formules (6) et (9) que sur $\{Y_G \in E\}$

$$Q\Big(f(\tau_G) \,|\, \Sigma_G\Big) = {}^*P^{Y_G}\Big(f|0 \leq U < R\Big) \tag{16}$$

et sur $\{Y_{D^-} \in E\}$

$$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big) = {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}}\Big(\widehat{f}\,|0 \leq U < \widehat{R}\Big) \quad \text{sur} \quad \{Y_{D^-} \in E\}\ , \tag{17}$$

de plus si $U$ est un temps d'arrêt de $(F_s)_{s\geq 0}$ alors $T$ (resp. $-S$) est un temps d'arrêt de $(\Sigma_t)$ (resp. $(\widehat{\Sigma}_t)$), et de ce fait la condition $0 \leq U$ peut être supprimés dans les formules (16) et (17). Ainsi le théorème 3 signifie que sur $A$ la loi du couple $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$ est

$${}^*P^{Y_G}\Big(\cdot|0 \leq U < R\Big) \otimes {}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}}\Big(\cdot|0 \leq U < \widehat{R}\Big)\ ,$$

par conséquent les variables aléatoires $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ sont conditionnellement indépendantes étant donné $(Y_G, Y_{D^-})$.

**Exemple 2.** Soit $T$ un temps d'arrêt de la filtration $(\Sigma_{G_t})_+$. D'après la discussion de l'exemple 6 [14] (adaptée à notre situation) on a sur $\{Y_G \in E\}$

$$Q\Big(f(\tau_G) \,|\, \Sigma_G\Big) = P^{A_T, Y_G}(f) \tag{18}$$

où l'on a posé pour tout $0 \leq a < +\infty$ et pour $x \in E \cup \{\delta\}$:

$$P^{a,x} = \begin{cases} {}^*P^x(\cdot|R > a) & \text{si } a > 0, \\ P^x & \text{si } a = 0\ . \end{cases}$$

Si maintenant $S$ est tel que $-S$ soit un temps d'arrêt de filtration $(\widetilde{\Sigma}_{d_{-s}})_+$, alors on a de la même façon, la formule suivante:

$$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Sigma}_D\Big) = \widehat{P}^{r_s, Y_{D^-}}(\widehat{f}) \tag{19}$$

sur $\{Y_{D^-} \in E\}$ où $\widehat{P}^{a,x}$ est l'analogue de la mesure $P^{a,x}$ définie à l'aide de ${}^*\widehat{P}^x$.

Il résulte du théorème 3 que sur $A$, la loi conditionnelle de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$ est $P^{A_T, Y_G} \otimes \widehat{P}^{r_s, Y_{D^-}}$. Dans ce cas les variables aléatoires $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ sont conditionnellement indépendantes étant donné $(Y_G, A_T, Y_{D^-}, r_s)$.

**Exemple 3.** Soient $a > 0$, $b > 0$, $T = \inf\{t\colon A_t > a\}$ et $S = \sup\{s\colon r_s > b\}$. D'après [11] $T$ (resp. $-S$) est un temps d'arrêt de $(\Sigma_{G_t})$ (resp. $(\widetilde{\Sigma}_{d_{-s}})$) et comme $A_T = a$, $r_s = b$ sur $A$, alors d'après l'exemple précédent la loi de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Sigma_G \cap \widetilde{\Sigma}_D$ est $P^{a,Y_G} \otimes \widehat{P}^{b,Y_{D^-}}$, et on a l'indépendance conditionnelle de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $(Y_u)_{D<u<G}$, étant donné $(Y_G, Y_{D^-})$.

## 5 – Loi de $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-}$

Rappelons qu'un ensemble $A \in \Re_{G^-}$ (resp. $\widetilde{\Re}_{D^-}$) s'il existe un processus $V(\Re_t)$ (resp. $(\widehat{\Re}_t)$)-prévisible tel que $I_A = V_G$ (resp. $I_A = V_{-D}$).

En notant encore $D_s$ la variable aléatoire sur $\Omega$, $\inf\{u \in M:\ u > s\}$ pour $s \geq 0$, et en posant

$$X_s^D = X_{D_s} \quad \text{et} \quad Y_t^D = Y_{D_t} \text{ (sur } W)$$

pour $t \in \mathbb{R}$, on a alors sur $\{Y_t \in E\}$

$$X_s^D \circ \tau_t = Y_{t+s}^D \ . \tag{20}$$

Soit $(L, {}^\circ P)$ un système de sortie $(F_{D_s})$-prévisible pour $M$ (cf. [12]). Pour tout processus $Z \geq 0$ et $(F_{D_s})$-prévisible, et pour toute fonction $f \geq 0$ mesurable sur $(\Omega, F^*)$ on peut écrire $\forall\, x \in E$

$$P^x \sum_{s \in G^\circ} Z_s\, f(\theta_s) \ = \ P^x \int_{\mathbb{R}_+} Z_s\, {}^\circ P^{X_{s^-}^D}(f)\, L(ds) \tag{21}$$

où l'on a noté encore $G^\circ$, l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à $M$ (sur $\Omega$).

Comme pour $B$, on définit la mesure aléatoire sur $W$ (notée encore $L$) portée par $]\alpha, \beta[$ et telle que sur $\{Y_t \in E\}$ $(t \in \mathbb{R}$ et $s > 0)$

$$L\Big(]t, t+s]\Big) = L_s \circ \tau_t \ . \tag{22}$$

On a alors le théorème suivant:

**Théorème 4.** *Pour tout processus $V \geq 0$, $(\Re_t)$-prévisible et pour toute fonction $f$ comme dans (21), on a:*

$$Q\Big(\sum_{t \in G^\circ} V_t\, f(\tau_t)\Big) \ = \ Q\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} V_t\, {}^\circ P^{Y_{t^-}^D}(f)\, L(dt)\Big) \ . \tag{23}$$

**Remarque 3.** Une application directe du théorème (4.1) [12] permet d'obtenir une telle formule, mais au lieu de ${}^{\circ}P^{Y^D_{t^-}}$ on a un noyau $N$ de $(\mathbb{R}\times W, P)$ dans $(\Omega, F^{\circ})$, où $P$ est la tribu $(\Re_t)$-prévisible sur $\mathbb{R}\times W$.

Pour démontrer le théorème 4, nous avons besoin des deux propositions suivantes:

**Proposition 1.** *On a pour tout processus $V$ et pour toute fonction $f$ comme dans (23): $\forall\, u \in \mathbb{R}$*

$$Q\Big(I_{\{Y_u\in E\}} \sum_{\substack{t\in G^{\circ}\\ t>u}} V_t\, f(\tau_t)\Big) \;=\; Q\Big(I_{\{Y_u\in E\}} \int_u^{+\infty} V_t\, {}^{\circ}P^{Y^D_{t^-}}(f)\, L(dt)\Big)\;. \tag{24}$$

**Proposition 2.** *Pour tout processus $V$, $(\Re_t)$-prévisible, le processus indexé par $\mathbb{R}_+$, $Z_s = V_{s+u}(w/u/\cdot)$ est $(F_{D_s})$-prévisible, quelque soit $w \in W$ et $u \in \mathbb{R}$ fixés.*

**Démonstration de la Proposition 2:** D'après un argument de classes monotones, il suffit de montrer que si $V$ est $(\Re_t)$-adapté alors $Z$ est $(F_{D_s})$-adapté, car la tribu $(\Re_t)$ (resp. $(F_{D_s})$)-prévisible est engendrée par les processus $(\Re_t)$ (resp. $(F_{D_s})$)-adaptés continus à gauche. On est donc ramené à montrer que l'application: $\omega \mapsto (w/u/\omega)$ est mesurable de $(\Omega, F_{D_s})$ dans $(W, \Re_{s+u})$.

Rappelons qu'un ensemble $A \in \Re_{s+u}$ (resp. $B \in F_{D_s}$) si $A\cap\{D_{s+u} \le t\} \in \Sigma_t$, pour tout $t$ appartenant à $\mathbb{R}$ (resp. $B \cap \{D_s \le t\} \in F_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$), et remarquons que l'application citée plus haut est mesurable de $(\Omega, F_t)$ dans $(W, \Sigma_{t+u})$, $t \ge 0$.

Pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$, et pour tout $A \in \Re_{s+u}$, on a:

$$\{\omega\colon\; w/u/\omega \in A\} \cap \{D_s \le t\} = \Big\{\omega\colon\; w/u/\omega \in A \cap \{D_{s+u} \le t+u\}\Big\} \in F_t\;,$$

car

$$A \cap \{D_{s+u} \le t+u\} \;\in\; \Sigma_{t+u}\;,$$

ce qui signifie que $\{\omega : w/u/\omega \in A\} \in F_{D_s}$. ∎

**Démonstration de la Proposition 1:** En vertu de la formule (1) et un raisonnement de classes monotones, on a pour toute variable aléatoire positive $\psi$, $\Sigma_U$-mesurable, et pour toute fonction positive $g$, $\Sigma_U\otimes F^{\circ}$-mesurable:

$$\int_{\{Y_U\in E\}} Q(dw)\, \psi(w)\, g(w, \tau_U(w)) \;= \int_{\{Y_U\in E\}} Q(dw)\, \psi(w)\, P^{Y_U(w)}(g(w,\cdot))\;, \tag{25}$$

$U$ étant un temps d'arrêt de $(\Sigma_t)$.

Observons que $G^\circ$ vérifie, d'après (3), l'égalité

$$(G^\circ - u) \cap ]0, +\infty[ = G^\circ \circ \tau_u \quad \text{sur} \ \{Y_u \in E\} ,$$

par suite

$$s \in G^\circ \cap ]u, +\infty[ \ \Leftrightarrow \ s - u \in G^\circ(\tau_u) \quad \text{sur} \ \{Y_u \in E\} ,$$

$$Q\Big( I_{\{Y_u \in E_n^u\}} \sum_{\substack{s \in G^\circ \\ s > u}} V_s \, f(\tau_s) \Big) = Q\Big( I_{\{Y_u \in E_n^u\}} \sum_{s \in G^\circ(\tau_u)} V_{s+u}(\cdot/u/\tau_s) \, f(\tau_{s+u}) \Big) ,$$

$(E_n^u)$ étant la suite considérée dans la formule (5).

Il résulte de la formule (25) avec:

$$\Bigg( \ \psi = I_{\{Y_u \in E_n^u\}}, \quad g(w, \omega) = \Big( \sum_{s \in G^\circ} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, f(\theta_s) \Big)(\omega) \ \text{ et } \ U = u \ \Bigg)$$

que:

$$\begin{aligned} Q\Big( I_{\{Y_u \in E_n^u\}} \sum_{\substack{s \in G^\circ \\ s > u}} V_s \, f(\tau_s) \Big) &= \\ = \int_{\{Y_U \in E_n^u\}} Q(dw) \, P^{Y_u(w)} \Big( \sum_{s \in G^\circ} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, f(\theta_s) \Big) . \end{aligned} \tag{26}$$

D'après la formule (21) avec:

$$x = Y_u(w) \quad \text{ et } \quad Z_s = V_{s+u}(w \,/\, u \,/\, \cdot) ,$$

on a:

$$P^{Y_u(w)} \Big( \sum_{s \in G^\circ} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, f(\theta_s) \Big) = P^{Y_u(w)} \Big( \int_{\mathbb{R}_+} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, {}^\circ P^{X_{s-}^D}(f) \, L(ds) \Big) ,$$

et la formule (26) devient:

$$\begin{aligned} Q\Big( I_{\{Y_u \in E_n^u\}} \sum_{\substack{s \in G^\circ \\ s > u}} V_s \, f(\tau_s) \Big) &= \\ &= \int_{\{Y_U \in E_n^u\}} Q(dw) \, P^{Y_u(w)} \Big( \int_{\mathbb{R}_+} V_{s+u}(w/u/\cdot) \, {}^\circ P^{X_{s-}^D}(f) \, L(ds) \Big) \\ &= \int_{\{Y_U \in E_n^u\}} Q(dw) \, \Big( \int_{\mathbb{R}_+} V_{s+u}(w) \, {}^\circ P^{Y_{(s+u)^-}^D(w)}(f) \, L(\tau_u(w), ds) \Big) \\ &= \int_{\{Y_U \in E_n^u\}} Q(dw) \, \Big( \int_u^{+\infty} V_t(w) \, {}^\circ P^{Y_{t^-}^D(w)}(f) \, L(w, ds) \Big) , \end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité on a utilisée la formule (25) avec:

$$\left(\Psi = I_{\{Y_u \in E_n^u\}}, \quad g(w,\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} V_{s+u}(w/u/\omega)\,{}^\circ P^{X^D_{s-}(\omega)}(f)\,L(\omega,ds) \quad \text{et} \quad U = u\right),$$

et dans la dernière égalité on a utilisé la formule (22). La formule (24) s'obtient alors par le théorème de la convergence monotone. ∎

**Démonstration du Théorème 4:** Comme $G^\circ \subset ]\alpha,\beta[$ et $L$ est portée par $]\alpha,\beta[$, alors on a:

$$Q\Big(I_{\{\beta\le u\}} \sum_{\substack{t\in G^\circ\\ t>u}} V_t\, f(\tau_t)\Big) = Q\Big(I_{\{\beta\le u\}} \int_u^{+\infty} V_t\,{}^\circ P^{Y^D_{t-}}(f)\,L(dt)\Big) = 0\,.$$

En vertu de la proposition 1, il suffit de démontrer la formule suivante:

$$Q\Big(I_{\{\beta\le\alpha<\beta\}} \sum_{\substack{t\in G^\circ\\ t>u}} V_t\, f(\tau_t)\Big) = Q\Big(I_{\{u\le\alpha<\beta\}} \int_u^{+\infty} V_t\,{}^\circ P^{Y^D_{t-}}(f)\,L(dt)\Big)\,. \tag{27}$$

Soit $(\alpha_n)$ l'approximation dyadique décroissante de $\alpha$.

D'après le raisonnement utilisé dans la démonstration de la proposition 1, on a en posant:

$$A_k = \left\{\frac{k-1}{2^n} \le \alpha < \frac{k}{2^n} < \beta\right\}$$

($n \in N$ et $k$ entier relatif):

$$Q\Big(I_{A_k} \sum_{\substack{t\in G^\circ\\ t>k/2^n}} V_t\, f(\tau_t)\Big) = Q\Big(I_{A_k} \int_{k/2^n}^{+\infty} V_t\,{}^\circ P^{Y^D_{t-}}(f)\,L(dt)\Big)\,. \tag{28}$$

En sommant par rapport à tous les entiers relatifs $k$ tels que $u \le k/2^n$, on obtient:

$$Q\Big(I_{\{u\le\alpha_n<\beta\}} \sum_{\substack{t\in G^\circ\\ t>u}} V_t\, f(\tau_t)\Big) = Q\Big(I_{\{u\le\alpha_n<\beta\}} \int_u^{+\infty} V_t\,{}^\circ P^{Y^D_{t-}}(f)\,L(dt)\Big) \tag{29}$$

l'égalité (27) s'obtient alors de (29) d'après le théorème de convergence dominée. ∎

Soit maintenant le processus (sur $W$) $(\widehat{Y}^g_t) = (\widehat{Y}_{-g_{-t}})$ et $(\widehat{L},{}^\circ\widehat{P})$ l'analogue de $(L,{}^\circ P)$ correspondant au processus indexé par $\mathbb{R}_+$:

$$X^{\widehat{D}}_s = X_{\widehat{D}_s} \quad \Big(\widehat{D}_s = \inf\{u \in \widehat{M}:\ u > s\} \ \ \text{sur } \Omega\Big)\,.$$

Les théorèmes 1, 2 et 3 peuvent être adaptés au conditionnement par rapport à $\Re_{G^-}$, $\widetilde{\Re}_{D^-}$ et $\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-}$ respectivement, a condition de remplacer $(B, {}^*P)$ par $(L, {}^\circ P)$, $(\widehat{B}, {}^*\widehat{P})$ par $(\widehat{L}, {}^\circ\widehat{P})$, $Y_G$ par $Y^D_{G^-}$ et $Y_{D^-}$ par $\widehat{Y}^g_{(-D)^-}$. La formule (6) devient:

$$Q\Big(f(\tau_G) \,|\, \Re_{G^-}\Big)(w) \;=\; {}^\circ P^{Y^D_{G^-}(w)}\Big(f|0 \leq A^w < R\Big) \tag{30}$$

pour presque tout $w \in \{Y^D_{G^-} \in E\}$, et la formule (9) devient:

$$Q\Big(\widehat{f}(\widetilde{\tau}_D) \,|\, \widetilde{\Re}_{D^-}\Big)(w) \;=\; {}^\circ\widehat{P}^{\widehat{Y}^g_{(-D)^-}(w)}\Big(\widehat{f}|0 \leq r^w < \widehat{R}\Big) \tag{31}$$

pour presque tout $w \in \{\widehat{Y}^g_{(-D)^-} \in E\}$.

On notera que:

$$Y^D_{G^-} = Y_{G^-} \;\text{ sur } \{G \in G^\circ \backslash I\}\,, \qquad Y_G \;\text{ sur } \{G \in I\}\ ,$$

et que

$$\widehat{Y}^g_{(-D)^-} = Y_D \;\text{ sur } \{D \in D^\circ \backslash I\}\,, \qquad Y_{D^-} \;\text{ sur } \{G \in I\}\ ,$$

où $I$ est l'ensemble des points isolés de $M \cup \{\alpha, \beta\}$.

Comme dans le paragraphe précédent, si nous supposons que:

$$\sigma(G) \cap A \subset \widetilde{\Re}_{D^-} \quad \text{ et } \quad \sigma(D) \cap A \subset \Re_{G^-}\ ,$$

on obtient la $\sigma$-finitude de $Q$ sur la tribu $(\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-}) \cap A$ et l'analogue du théorème 3 de la même façon.

**Théorème 5.** *Pour presque tout $w \in A$*

$$Q\Big(F(\tau_G, \widetilde{\tau}_D) \mid \Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-}\Big)(w) \;=\; \mu^w \otimes \widehat{\mu}^w(F) \tag{32}$$

*pour toute fonction $F \geq 0$ et $F^* \otimes F^*$-mesurable, où les mesures $\mu^w$ et $\widehat{\mu}^w$ sont définies de la même manière que $\nu^w$ et $\widehat{\nu}^w$ avec ${}^\circ P^{Y^D_{G^-}(w)}$ au lieu ${}^*P^{Y_G(w)}$ et ${}^\circ\widehat{P}^{\widehat{Y}^g_{(-D)^-}(w)}$ au lieu de ${}^*\widehat{P}^{Y_{D^-}(w)}$.*

On remarquera que sur $A$, la tribu $(\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-})$ contient l'information fournie par $Y^D_{G^-}$, $\widehat{Y}^g_{(-D)^-}$ et par $(Y_u)_{D<u<G}$, et que les exemples 1, 2 et 3 s'adaptent également. Ainsi dans la situation de l'exemple 1, sur $A$ la loi conditionnelle du couple $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ par rapport à $(\Re_{G^-} \cap \widetilde{\Re}_{D^-})$ est

$${}^\circ P^{Y^D_{G^-}}\Big(\cdot|0 \leq U < R\Big) \otimes {}^\circ\widehat{P}^{\widehat{Y}^g_{(-D)^-}}\Big(\cdot|0 \leq U < \widehat{R}\Big)\ ,$$

ce qui signifie qu'il y a indépendance conditionnelle entre les variables aléatoires $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ étant donné $(Y^D_{G-}, \widehat{Y}^g_{(-D)-})$. Dans la situation de l'exemple 2, la loi citée plus haut est

$$ {}^{\circ}P^{A_T, Y^D_{G-}} \otimes {}^{\circ}\widehat{P}^{r_S, \widehat{Y}^g_{(-D)-}} $$

et il y a indépendance conditionnelle entre $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ étant donné $(Y^D_{G-}, A_T, \widehat{Y}^g_{(-D)-}, r_s)$, où ${}^{\circ}P^{a,x}$ et ${}^{\circ}\widehat{P}^{a,x}$ sont les analogues des mesures $P^{a,x}$ et $\widehat{P}^{a,x}$ définies avec ${}^{\circ}P^x$ et ${}^{\circ}\widehat{P}^x$ au lieu de ${}^{*}P^x$ et ${}^{*}\widehat{P}^x$. Dans la situation de l'exemple 3, la loi citée plus haut est ${}^{\circ}P^{a, Y^D_{G-}} \otimes {}^{\circ}\widehat{P}^{b, \widehat{Y}^g_{(-D)-}}$ et on a l'indépendance conditionnelle entre les variables aléatoires $(\tau_G, \widetilde{\tau}_D)$ et $(Y_u)_{D<u<G}$ étant donné $(Y^D_{G-}, \widehat{Y}^g_{(-D)-})$.

On notera que si $Q(G \in I) = Q(D \in I) = 0$, alors on a le même résultat avec $\Re_{G-}$, $\widetilde{\Re}_{D-}$, $Y^D_{G-}$, $\widehat{Y}^g_{(-D)-}$ remplacés par respectivement $\Sigma_{G-}$, $\widetilde{\Sigma}_{D-}$, $Y_{G-}$, $Y_D$.

## REFERENCES


**[1]** Boutabia, H. – Thèse de $3^{ème}$ cycle, Grenoble, 1985.

**[2]** Boutabia, H. et Maisonneuve, B. – Lois conditionnelles des excursions Markoviennes, *Sém. Prob.,* XXVI, Springer LN, 1526 (1992), 162–166.

**[3]** Dellacherie, C. et Meyer, P.A. – *Probabilités et Potentiel*, Chapitres I à IV, Hermann, 1975.

**[4]** Dellacherie, C. et Meyer, P.A. – *Probabilités et Potentiel*, Chapitres XII à XVI, Hermann, 1987.

**[5]** Dellacherie, C., Maisonneuve, B. et Meyer, P.A. – *Probabilités et Potentiel*, Chapitres XVII à XXIV, Hermann, 1992.

**[6]** Getoor, R.K. et Sharpe, M.J. – Excursion of dual processes, *Advances in Math.,* 45 (1982), 259–309.

**[7]** Getoor, R.K. – Killing a Markov process under a stationary measure involves creation, *Ann. Prob.,* 16 (1988).

**[8]** Kaspi, H. et Maisonneuve, B. – Predictible local times and exit systems, *Sém. Prob.,* XX, Springer LN, 1204 (1986), 95–100.

**[9]** Kuznetsov, S.E. – Construction of Markov processes with random times of birth and death, *Theor. Prob.,* 18 (1973), 571–575.

**[10]** Maisonneuve, B. – Exit systems, *Ann. Prob.,* 3 (1975), 399–411.

**[11]** Maisonneuve, B. – On the structure of certain excursions of Markov processes, *Z. Wahrs. Verw. Geb.,* 47 (1979), 61–67.

**[12]** Maisonneuve, B. – Systèmes de sorties $(F_{D_t})$-prévisibles, *Théor. Prob.,* 80 (1989), 395–405.

**[13]** Maisonneuve, B. – *Strict Past Conditioning at Arbitary Times*, Seminar on Stochastic Processes, 1985 (1986), 148–154, Birkhaüser, Boston.

**[14]** Maisonneuve, B. – Excursions chevauchant un temps aléatoire quelconque, *Asterisque,* 236, S.M.F. (1996).

**[15]** Mitro, J.B. – Dual Markov processes: Construction of useful auxiliary processes, *Z. Wahrs. Verw. Geb.,* 47 (1979), 139–156.
**[16]** Mitro, J.B. – Dual Markov functional: Applications of useful auxiliary processes, *Z. Wahrs. Verw. Geb.,* 48 (1979), 97–114.
**[17]** Mitro, J.B. – Exit systems for dual Markov processes, *Z. Wahrs. Verw. Geb.,* 66 (1984), 259–267.

Boutabia Hacène,
Université Badji Mokhtar Annaba, Institut de Mathématiques,
B.P. 12, El Hadjar, 23000 Annaba – ALGERIE