Revista Colombiana de Estadí stica
Volumen 24 (2001) N° 1, páginas 59 *a* 72

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA EL PARÁMETRO DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

JUAN C. CORREA M.*
ESPERANZA SIERRA L.**

Resumen

La construcción de intervalos de confianza para la estimación del parámetro π, de la distribución binomial, es un problema importante en el trabajo estadístico aplicado. Revisamos diferentes procedimientos para su construcción y realizamos un estudio de simulación para analizar el comportamiento de los niveles de confianza reales y compararlos con los teóricos.
Palabras Claves: Estimación, Distribución Binomial, Intervalo de Confianza .

Abstract

Interval estimation of the binomial parameter is one of the most important problems in applied statistics. We review several procedures and compare them via simulation to analyze their performance considering the behavior of the real confidence level with respect to the theoretical value.
Keywords: Estimation, Binomial Distribution, Confidence Interval.

*Posgrado Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín; e-mail: jccorrea @perseus.unalmed.edu.co
**Posgrado Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín; e-mail: esierra@ perseus.unalmed.edu.co

1. Introducción

La construcción de intervalos de confianza para estimar el parámetro π, de la distribución binomial es un problema frecuente en el trabajo aplicado. Lamentablemente entre los investigadores que aplican estos intervalos es corriente el desconocimiento de los diferentes intervalos para estimar este parámetro, debido a su poca difusión en los textos básicos.

Cada uno de estos intervalos tiene ciertas ventajas y desventajas. Hacemos una revisión de los diferentes métodos de construcción de intervalos y mediante un estudio de simulación los comparamos. Nos interesamos en analizar el comportamiento del nivel de confianza real, que es la porcentaje de intervalos que en las simulaciones cubren el verdadero valor de π, y compararlo con 0,95 el nivel de confianza nominal usado.

El concepto de nivel de confianza real, aunque poco manejado en la práctica, es muy importante cuando se trabaja con procedimientos que son asintóticos. También comparamos los métodos usando los promedios de las longitudes de los intervalos calculados con cada método.

Supongamos que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ es una muestra aletoria de tamaño n de una distribución Bernoulli con parámetro π, esto es, si la observación i es un éxito $X_i = 1$, en otro caso $X_i = 0$ y $P(X_i = 1) = \pi$; entonces $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es el número de éxitos en la muestra. Sabemos que Y se distribuye como una binomial con parámetros n y π. Estamos interesados en la construcción de intrevalos de confianza para π.

El estimador de máxima verosimilitud para π está dado por

$$\hat{\pi} = \frac{Y}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Leemis y Trivedi (1996) compararon, para $n = 10$ y 100, $\alpha = 0{,}05$ y $Y = 3$, algunos intervalos obtenidos con métodos aproximados con el intervalo obtenido con un método “exacto”.

2. Métodos Utilizados

Dado que la distribución binomial es discreta, no es posible construir intervalos con cualquier nivel de confianza preespecificado, a no ser que se aleatorice, procedimiento que no es aceptado en la práctica, y se trabaja con métodos aproximados, en especial usando propiedades de muestras grandes.

2.1. Método Exacto Basado en la F

Para construir este intervalo con un nivel $(1-\alpha)100\,\%$ de confianza para π debemos determinar los límites inferior, L_I y superior, L_S de tal manera que $P(Y \geq y|\pi = L_I) = \alpha/2$ y $P(Y \leq y|\pi = L_S) = \alpha/2$. Leemis y Trivedi (1996) muestran dos procedimientos mediante los cuales se calculan L_I y L_S en términos de la distribución F. El intervalo "exacto" es:

$$\left(\frac{1}{1+\frac{n-y+1}{yF_{2y,2(n-y+1),1-\alpha/2}}}, \frac{1}{1+\frac{n-y}{(y+1)F_{2(y+1),2(n-y),\alpha/2}}}\right)$$

2.2. Métodos Aproximados

2.2.1. Basado en el Teorema Central del Límite

Este es el intervalo propuesto en la mayoría de textos básicos en estadística (Canavos, 1988; Wonnacott y Wonnacott, 1979; Roussas, 1973; Walpole, 1992; Meyer, 1986; Mood et al., 1974)

$$\left(\hat{\pi} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}, \hat{\pi} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right)$$

Se puede considerar la correción por continuidad (Snedecor y Cochran, 1980)

$$\left(\hat{\pi} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} - \frac{1}{2n}, \hat{\pi} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} + \frac{1}{2n}\right)$$

Mood et al. (1974, pp. 394-395) y Larson (1983, pp.309-310) presentan un intervalo de confianza que se halla como solución a una ecuación cuadrática. El intervalo resultante es (L_I, L_S), donde

$$L_I = \frac{\hat{\pi} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{2n} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi}) + \frac{z^2_{\alpha/2}}{4n}}}{1 + \frac{z^2_{\alpha/2}}{n}}$$

y

$$L_S = \frac{\hat{\pi} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{2n} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi}) + \frac{z^2_{\alpha/2}}{4n}}}{1 + \frac{z^2_{\alpha/2}}{n}}$$

2.2.2. Basado en la Transformación Arcoseno

En Hogg y Craig (1978, pp. 217) encontramos la justificación para que la función arcoseno pueda usarse en la construcción de intervalos de confianza para π a partir de la desigualdad

$$|\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{\pi}) - \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{\hat{\pi}})| \leq \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}$$

Chen(1990) muestra que este intervalo es mejor que el intervalo basado en el Teorema Central del Límite.

2.2.3. Basado en la Aproximación Poisson

Leemis y Trivedi (1996) apoyados en que la variable binomial Y con parámetros n y π es asintóticamente Poisson con parámetro $\lambda = n\pi$; usan la aproximación:

$$P(Y \geq y|\pi = L_I) \approx \sum_{k=y}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{y-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Esta expresión es igual a $P(\chi^2_{2y} \leq 2nL_I) = \alpha/2$ de donde se obtiene que: $L_I = 2n\chi^2_{2y,(1-\alpha/2)}$. Similarmente se obtiene L_S. El intervalo usando este método es:

$$\left(\frac{1}{2n}\chi^2_{(2y,1-\alpha/2)}, \frac{1}{2n}\chi^2_{(2(y+1),\alpha/2)}\right)$$

Para algunas combinaciones de π y n esta aproximación es muy burda, lo que hace que este intervalo no siempre sea adecuado.(Ver Tablas)

2.2.4. Intervalos Máximo Verosímiles

Kalbfleish (1985) presenta la metodología para construir intervalos de verosimilitud para el parámetro θ de una distribución. Si $L(\theta)$ es la función de verosimilitud, se define la *función de verosimilitud relativa* como

$$R(\theta) = \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})}$$

El conjunto de valores de θ para los cuales $R(\theta) \geq p$ es llamado la *intervalo de 100 %p de verosimilitud* para θ. Los intervalos del 14.7 % y del 3.6 % de verosimilitud corresponden a intervalos de confianza de niveles del 95 % y del 99 %

aproximadamente. Lo que se debe hacer entonces es hallar las raíces que dan los límites del intervalo. Para el caso del parámetro π de la Bernoulli, tenemos que un intervalo de confianza del 95 % se halla encontrando el par de raíces tal que

$$R(\pi) = \frac{L(\pi)}{L(\hat{\pi})} = \frac{\pi^y(1-\pi)^{n-y}}{\hat{\pi}^y(1-\hat{\pi})^{n-y}} \geq 0{,}147$$

Esto se resuelve numéricamente. Una solución se halla a la izquierda de $\hat{\pi}$ y la otra a su derecha.

3. Resultados de Simulación

Para comparar los distintos intervalos se realizó una simulación en SAS-IML. Se generaron muestras de tamaños 10, 20, 30, 40, 50, 75 y 100 de distribuciones binomiales con π =0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5.

Cada combinación n y π se replicó 2000 veces. Para cada muestra se construyó el intervalo de confianza del 95 % con cada uno de los métodos. Para cada método y combinación se calculó la longitud promedio de los 2000 intervalos calculados y la proporción de intervalos que cubren el verdadero valor de π, es lo que llamamos el nivel de confianza real.

La Tabla 1 muestra los niveles de confianza reales y la Tabla 2 los promedios de las longitudes de los intervalos, para cada método y combinación n y π.

En la 2^a columna de estas tablas, están los resultados calculados usando el método I basado en el Teorema Central del Límite, en la 3^a están los resultados usando el método "exacto" basado en la F, método II, en la 4^a los resultados usando la transformación arcoseno, método III, en la 5^a los resultados usando la aproximación Poisson, método IV y en la 6^a los resultados basados en la función de verosimilitud, método V.

Cuando π es pequeño, menor que 0.1, los intervalos basados en el Teorema Central del Límite tienen longitudes promedio menores que las de los intervalos construídos con los otros métodos (Tabla 2), pero no alcanzan, para ningún n, el nivel de confianza nominal (Tabla 1). A medida que π se acerca a 0.5 y n crece los niveles reales (Tabla 1) se aproximan al nominal pero, para estos casos, ya las longitudes promedio de los intervalos (Tabla 2) construidos a partir de la trasformación arcoseno y a partir de la función de verosimilitud son menores que los construidos con base en el Teorema Central del Límite.

Los intervalos basados en la F (método II) alcanzan, para todos los tamaños, niveles de confianza reales que superan el nivel nominal (Tabla 1). Cuando los tamaños de muestra son pequeños, las longitudes son grandes (Tabla 2) pero disminuyen cuando n aumenta, aproximándose a las longitudes de los intervalos del método I.

Los niveles de confianza reales alcanzados usando la transformación arcoseno (método III) son superiores a los alcanzados con el método I para todos los valores de π y n, aunque sólo se aproxima al nivel nominal cuando n ó π son grandes; corroborando la conclusión de Chen (1990): esta transformación acelera la rata de convergencia de la aproximación normal. Las longitudes promedio de los intervalos construídos con la trasformación arcoseno son pequeñas, muy similares a las del método I.

Los intervalos construídos usando la aproximación Poisson (método IV) tienen amplitudes muy grandes cuando $n < 100$ (tabla 2), sin embargo cuando π es pequeño, los niveles reales están cercanos al nominal; y si π se acerca a 0,5 estos niveles superan el 95 % (Tabla 1).

Los intervalos construídos a partir de la función de verosimilitud (método V), presentan para todos los tamaños, niveles reales muy próximos o superiores a los teóricos (Tabla 1), y las longitudes promedio son comparables a las del método I, especialmente cuando n y π no son muy pequeños.

Un buen método debería dar intervalos con longitudes pequeñas y niveles de confianza real cercanos al nominal, pero como se ve en las tablas, no necesariamente un intervalo corto tiene un nivel de confianza real cercano al nivel nominal. Para trabajar conjuntamente con la longitud promedio del intervalo y el nivel de confianza real construimos el siguiente índice:

$$I = (1 - LPI)\frac{NR}{NN}$$

donde LPI es la longitud promedio del intervalo, NR es el nivel de confianza real, y NN es el nivel de confianza nominal. Este índice es útil para el caso binomial, ya que la longitud de un intervalo estará siempre entre cero y uno. Idealmente la fracción NR/NN debe estar muy cercana a uno, pero si la longitud del intervalo es muy grande entonces el índice castigará el método. Por lo tanto entre mayor sea el índice tanto mejor el método. La Tabla 3 muestra los índices, para cada uno de los cinco métodos analizados y diferentes valores de n y π.

Si usamos este índice para clasificar los métodos, encontramos (Tabla 3) que el mejor método es el de la función de verosimilitud seguido por los otros métodos en este orden: método exacto, método usando el teorema central del límite, transformación arcoseno y aproximación de Poisson.

4. Conclusiones y Recomendaciones

De los análisis de las simulaciones, es claro que dos procedimientos son superiores a los otros tres: el intervalo basado en la función de verosimilitud y el intervalo basado en la F. El primero de ellos exige encontrar un par de raíces numéricamente, que con la ayuda de un computador es una tarea simple. El otro método, que llamamos exacto, basado en la F es directo. Los otros métodos, I, III y IV, dan intervalos con índices menores. Obviamente no se deberían utilizar y es extraño que los libros sobre métodos estadísticos los presenten como única alternativa.

Agradecimientos Agradecemos a los jurados que revisaron cuidadosamente el artículo, sus comentarios nos ayudaron a corregirlo y mejorarlo. Entre la fecha de realización de este trabajo y su publicación varios documentos sobre el tema han aparecido, entre ellos Agresti y Caffo (2000), Brown et al. (2001) y Newcombe (2001).

Referencias

[1] Agresti, A. y Caffo, B. (2000) *Simple and Effective Confidence Intervals for Proportions and Differences of Proportions Result From Adding Two Successes and Two Failures.* The American Statistician, Vol. 54, No. 4, pp. 280-288

[2] Brown, L. D., Cai, T. T. y DasGupta, A. (2001) *Interval Estimation for a Binomial Proportion.* Statistical Science, Vol. 16, No. 2, pp. 101-116

[3] Canavos, G. (1988).*Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos.* McGraw Hill: Madrid

[4] Chen,H. (1990) *The Accuracy of Approximate Intervals for a Binomial Parameter.* Journal of de American Statistical Association. Vol. 85, pp. 514-518

[5] Hogg, R.V. y Craig, A.T. (1978). *Introduction to Mathematical Statistics.* Cuarta Edición. Collier MacMillan International:New York

[6] Kalbfleish, J.G. (1985). *Probability and Statistical Inference. Vol. 2.* Segunda edición. Springer-Verlag: New York

[7] Larson, H.J. (1983). *Introducción a la Teoría de Probabilidades e Inferencia Estadística.* Editorial Limusa: México

[8] Leemis, L.M. y Trivedi, K.S. (1996) *A Comparison of Approximate Interval Estimators for the Binomial Parameter.* The American Statistician. Vol. 50, No. 1, pp. 63-68

[9] Meyer, P.L. (1986). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas.* Segunda Edición. Addison Wesley Iberoamericana: México.

[10] Mood , A.M, Graybill, F.A. y Boes, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics.* Third Edition. McGraw-Hill Kogasakua, Ltd: Tokyo.

[11] Newcombe, R. G. (2001) *Logit Confidence Intervals and the Inverse Sinh Transformation.* The American Statistician, Vol. 55, No. 3, pp. 200-202.

[12] Roussas, G.G. (1973). *A First Course in Mathematical Statistics.* Addison-Wesley Publishing Company: Reading, Massachusetts

[13] Schader, M. y Schmid, F. (1989). *Two Rules of Thumb for the Approximation of the Binomial Distribution by the Normal Distribution.* The American Statistician. Vol. 43, No.1, pp. 23-24

[14] Snedecor, G.W. y Cochran, W.G. (1980). *Statistical Methods.* Séptima Edición. The Iowa State University Press:Ames

[15] Walpole, R.E. y Myers, R.H. (1992). *Probabilidad y Estadística.* Cuarta Edición. MaGraw Hill: México

[16] Wardell, D.G. (1997) *Small-Sample Interval Estimation of Bernoulli and Poisson Parameters.* The American Statistician. Vol. 51, No. 4, pp. 321-325

[17] Wonnacott, T.H. y Wonnacott, R.J. (1979). *Fundamentos de Estadística para Administración y Economía.* Editorial Limusa: México

TABLA 1: Nivel de Confianza Real					
n	T.C.L	"Exacto" F	T. Arcoseno	A. Poisson	Verosimilitud
π=0.01					
10	0.1015	0.9935	0.0950	0.8985	0.9935
20	0.1750	0.9825	0.1575	0.8250	0.9825
30	0.2635	0.9970	0.2605	0.9640	0.9640
40	0.3460	0.9915	0.3375	0.9360	0.9915
50	0.4030	0.9885	0.3915	0.9165	0.9885
75	0.5365	0.9920	0.5295	0.9495	0.9495
100	0.6315	0.9855	0.6175	0.9305	0.9855
π=0.02					
10	0.1985	0.983	0.1815	0.8015	0.983
20	0.3235	0.9935	0.3180	0.9395	0.9935
30	0.4650	0.9755	0.4405	0.8815	0.9755
40	0.5590	0.9925	0.5525	0.9490	0.9925
50	0.6490	0.9810	0.6305	0.9225	0.9810
75	0.7855	0.9805	0.7675	0.9345	0.9805
100	0.8775	0.9865	0.8645	0.9485	0.9865
π=0.03					
10	0.2660	0.9965	0.2630	0.9610	0.9610
20	0.4685	0.9750	0.4435	0.8670	0.9750
30	0.6050	0.9875	0.5940	0.9420	0.9875
30	0.7015	0.9950	0.6970	0.9645	0.9645
50	0.7680	0.9845	0.7545	0.9380	0.9845
75	0.8985	0.9945	0.8940	0.9780	0.9780
100	0.8005	0.9890	0.9485	0.9645	0.9645
π=0.04					
10	0.3400	0.9945	0.3345	0.9320	0.9945
20	0.5675	0.9895	0.5595	0.9585	0.9895
30	0.6940	0.9955	0.6900	0.9740	0.9740
40	0.8210	0.9785	0.8000	0.9205	0.9785
50	0.8675	0.9850	0.8560	0.9455	0.9850
75	0.7985	0.9885	0.9445	0.9725	0.9725
100	0.9075	0.9600	0.8920	0.8825	0.9600
π=0.05					
10	0.3955	0.9900	0.3865	0.9130	0.9900
20	0.6345	0.9820	0.6220	0.9225	0.9820
30	0.7985	0.9810	0.7830	0.9335	0.9810
40	0.8895	0.9885	0.8815	0.9590	0.9885
50	0.9130	0.9835	0.9020	0.9585	0.9835
75	0.8990	0.9645	0.9645	0.8885	0.9440
100	0.8775	0.9805	0.9420	0.9330	0.9195

TABLA 1: Nivel de Confianza Real *cont.*					
n	T.C.L	"Exacto" F	T. Arcoseno	A. Poisson	Verosimilitud
π=0.1					
10	0.6625	0.9890	0.6520	0.9295	0.9890
20	0.8775	0.9905	0.8700	0.9590	0.9905
30	0.8115	0.9900	0.9250	0.9730	0.9730
40	0.9140	0.9725	0.9050	0.8960	0.9725
50	0.8790	0.9670	0.9275	0.9335	0.9275
75	0.9370	0.9640	0.9305	0.9170	0.9640
100	0.9375	0.9560	0.9560	0.9565	0.9560
π=0.2					
10	0.8850	0.9950	0.8615	0.9715	0.9715
20	0.9195	0.9785	0.9000	0.9110	0.9590
30	0.9375	0.9745	0.9250	0.9260	0.9250
40	0.9080	0.9740	0.9545	0.9545	0.9545
50	0.9405	0.9665	0.9405	0.9665	0.9530
75	0.9280	0.9525	0.9525	0.9525	0.9525
100	0.9210	0.9580	0.9430	0.9430	0.9430
π=0.3					
10	0.8500	0.9905	0.9710	0.9905	0.9315
20	0.9510	0.9765	0.9510	0.9510	0.9510
30	0.9505	0.9670	0.9505	0.9505	0.9505
40	0.9250	0.9600	0.9420	0.9600	0.9420
50	0.9265	0.9670	0.9265	0.9670	0.9505
75	0.9410	0.9555	0.9410	0.9665	0.9410
100	0.9545	0.9630	0.9545	0.9680	0.9545
π=0.4					
10	0.9095	0.9830	0.9525	0.9585	0.9525
20	0.9310	0.9685	0.9310	0.9845	0.9685
30	0.9275	0.9605	0.9275	0.974	0.9605
40	0.9490	0.9645	0.9490	0.9745	0.9490
50	0.9360	0.9645	0.9360	0.9745	0.9360
75	0.9485	0.9605	0.9605	0.9870	0.9605
100	0.9485	0.9570	0.9485	0.9865	0.9485
π=0.5					
10	0.8920	0.9785	0.8920	0.9905	0.8920
20	0.9600	0.9600	0.9600	0.9930	0.9600
30	0.9490	0.9490	0.9490	0.9850	0.9490
40	0.9260	0.9680	0.9680	0.9900	0.9680
50	0.9390	0.9635	0.9390	0.9930	0.9390
75	0.9390	0.9680	0.9390	0.9900	0.9390
100	0.9500	0.9655	0.9500	0.9915	0.9500

TABLA 2: Longitud Promedio del Intervalo					
n	T.C.L	"Exacto" F	T. Arcoseno	A. Poisson	Verosimilitud
π=0.01					
10	0.0301	0.3227	0.0361	0.9322	0.3002
20	0.0270	0.1833	0.0337	0.8555	0.1652
30	0.0280	0.1319	0.0350	0.7681	0.1165
40	0.0286	0.1052	0.0356	0.6861	0.0914
50	0.0271	0.0876	0.0337	0.6273	0.0754
75	0.0269	0.0650	0.0325	0.4918	0.0552
100	0.0246	0.0520	0.0295	0.3945	0.0438
π=0.02					
10	0.05957	0.3366243750	0.0712	0.8705	0.3083
20	0.0529	0.1978	0.0646	0.7355	0.1745
30	0.0537	0.1473	0.0652	0.5950	0.1269
40	0.0511	0.1192	0.0615	0.4963	0.1014
50	0.0501	0.1024	0.0596	0.4050	0.0864
75	0.0471	0.0786	0.0540	0.2623	0.0663
100	0.0446	0.0659	0.0495	0.1673	0.0559
π=0.03					
10	0.0830	0.3479	0.0977	0.8299	0.3157
20	0.0816	0.2142	0.0972	0.6232	0.1859
30	0.0761	0.1611	0.099	0.4772	0.1373
40	0.0730	0.1333	0.0844	0.3761	0.1131
50	0.0688	0.1149	0.0783	0.3024	0.0973
75	0.0644	0.0907	0.0702	0.1655	0.0775
100	0.0598	0.0770	0.0632	0.0992	0.0666
π=0.04					
10	0.1088	0.3604	0.1277	0.7864	0.3240
20	0.1030	0.2265	0.1212	0.5452	0.1948
30	0.0932	0.1719	0.1079	0.4066	0.1461
40	0.0925	0.1461	0.1044	0.2760	0.1237
50	0.088	0.1280	0.0968	0.2195	0.1092
75	0.07799	0.1005	0.0824	0.1211	0.0869
100	0.07171	0.0863	0.0736	0.0877	0.0759
π=0.05					
10	0.1287	0.3699	0.1490	0.7530	0.3302
20	0.1219	0.2376	0.1408	0.4949	0.2037
30	0.1188	0.1882	0.1333	0.3243	0.1601
40	0.1111	0.1584	0.1218	0.2218	0.1351
50	0.1017	0.1375	0.1092	0.1844	0.1182
75	0.0914	0.1107	0.0941	0.1095	0.0971
100	0.0819	0.0947	0.0827	0.0921	0.0845

TABLA 2: Longitud Promedio del Intervalo. *Cont.*					
n	T.C.L	"Exacto" F	T. Arcoseno	A. Poisson	Verosimilitud
π=0.1					
10	0.2452	0.4270	0.2698	0.6176	0.3733
20	0.2118	0.2919	0.2269	0.3459	0.2513
30	0.1907	0.2363	0.1973	0.2426	0.2060
40	0.1718	0.2021	0.1745	0.1866	0.1782
50	0.1575	0.1796	0.1580	0.1615	0.1602
75	0.1330	0.1464	0.1322	0.1361	0.1332
100	0.1162	0.1260	0.1155	0.1155	0.1160
π=0.2					
10	0.3990	0.5042	0.4089	0.5620	0.4409
20	0.3269	0.3675	0.3244	0.3579	0.3261
30	0.2768	0.3018	0.2726	0.2913	0.2724
40	0.2428	0.2614	0.2391	0.2544	0.2387
50	0.2182	0.2337	0.2155	0.2296	0.2151
75	0.1793	0.1901	0.1777	0.1902	0.1774
100	0.1555	0.1640	0.1545	0.1659	0.1543
π=0.3					
10	0.5083	0.5611	0.4971	0.6019	0.4961
20	0.3875	0.4123	0.3767	0.4354	0.3731
30	0.3222	0.3416	0.3155	0.3641	0.3131
40	0.2801	0.2961	0.2757	0.31787	0.2740
50	0.2509	0.2645	0.2477	0.2853	0.2465
75	0.2057	0.2156	0.2040	0.2353	0.2032
100	0.1786	0.1864	0.1775	0.2054	0.1769
π=0.4					
10	0.5638	0.5909	0.5369	0.6638	0.5274
20	0.4179	0.4382	0.4047	0.5085	0.3993
30	0.3438	0.3611	0.3365	0.4214	0.3332
40	0.3001	0.3147	0.2953	0.3708	0.2930
50	0.2688	0.2815	0.2653	0.3328	0.2636
75	0.2203	0.2298	0.2184	0.2740	0.2174
100	0.1908	0.1983	0.1897	0.2376	0.1889
π=0.5					
10	0.5800	0.600	0.5491	0.6929	0.5370
20	0.4269	0.4461	0.4134	0.5659	0.4074
30	0.3515	0.3682	0.3441	0.4766	0.3404
40	0.3061	0.3204	0.3012	0.4147	0.2987
50	0.2744	0.2868	0.2709	0.3738	0.2690
75	0.2249	0.2341	0.2229	0.3080	0.2218
100	0.1950	0.2024	0.1938	0.2676	0.1930

TABLA 3: Indices

n	T.C.L	"Exacto" F	T. Arcoseno	A. Poisson	Verosimilitud
π=0.01					
10	0.10363	0.70834	0.09639	0.06414	0.73185
20	0.17924	0.84465	0.16022	0.12552	0.86333
30	0.26961	0.91101	0.26461	0.23534	0.89655
40	0.35380	0.93387	0.34261	0.30929	0.94824
50	0.41273	0.94935	0.39821	0.35956	0.96203
75	0.54956	0.97631	0.53923	0.50795	0.94428
100	0.64839	0.98338	0.63079	0.59301	0.99191
π=0.02					
10	0.19650	0.68642	0.17745	0.10925	0.71568
20	0.32249	0.83888	0.31312	0.26152	0.86331
30	0.46319	0.87556	0.43343	0.37578	0.89657
40	0.55837	0.92022	0.54579	0.50317	0.93883
50	0.64892	0.92693	0.62409	0.57780	0.94337
75	0.78786	0.95098	0.76427	0.72563	0.96366
100	0.88251	0.97001	0.86491	0.83134	0.98038
π=0.03					
10	0.25677	0.68406	0.24980	0.17213	0.69226
20	0.45292	0.80648	0.42145	0.34389	0.83553
30	0.58838	0.87199	0.56899	0.51843	0.89674
40	0.68453	0.90770	0.67179	0.63336	0.90046
50	0.75280	0.91726	0.73199	0.68877	0.93542
75	0.88484	0.95191	0.87495	0.85911	0.94972
100	0.79225	0.96089	0.93530	0.91455	0.94764
π=0.04					
10	0.31892	0.66960	0.30747	0.20954	0.70770
20	0.53583	0.80560	0.51756	0.45890	0.83867
30	0.66241	0.86777	0.64794	0.60840	0.87547
40	0.78427	0.87953	0.75416	0.70146	0.90253
50	0.83265	0.90413	0.81378	0.77679	0.92363
75	0.77497	0.93591	0.91223	0.89969	0.93468
100	0.88676	0.92335	0.86983	0.84748	0.93383
π=0.05					
10	0.36273	0.65664	0.34622	0.23736	0.69795
20	0.58646	0.78801	0.56255	0.49049	0.82312
30	0.74063	0.83833	0.71433	0.66393	0.86732
40	0.83232	0.87566	0.81490	0.78556	0.89998
50	0.86332	0.89293	0.84579	0.82285	0.91292
75	0.85977	0.90283	0.91971	0.83281	0.89716
100	0.84803	0.93434	0.90961	0.89163	0.88615

TABLA 3: Indices *Cont.*

n	T.C.L	"Exacto" F	T. Arcoseno	A. Poisson	Verosimilitud
π=0.1					
10	0.52636	0.59648	0.50117	0.37416	0.65246
20	0.72805	0.73825	0.70795	0.66032	0.78063
30	0.69135	0.79588	0.78154	0.77570	0.81319
40	0.79679	0.81681	0.78637	0.76718	0.84123
50	0.77956	0.83509	0.82207	0.82391	0.81995
75	0.85513	0.86617	0.84995	0.83391	0.87952
100	0.87214	0.87949	0.89003	0.89053	0.88953
π=0.2					
10	0.55984	0.51924	0.53605	0.44787	0.57175
20	0.65148	0.65149	0.64005	0.61572	0.68024
30	0.71371	0.71623	0.70829	0.69083	0.70847
40	0.72376	0.75720	0.76450	0.74916	0.76488
50	0.77393	0.77963	0.77665	0.78376	0.78732
75	0.80173	0.81199	0.82443	0.81196	0.82471
100	0.81867	0.84306	0.83922	0.82797	0.83946
π=0.3					
10	0.43989	0.45761	0.51396	0.41509	0.49408
20	0.61313	0.60340	0.62397	0.56519	0.62759
30	0.67813	0.67021	0.68481	0.63627	0.68721
40	0.70091	0.71132	0.71821	0.68957	0.71988
50	0.73051	0.74861	0.73364	0.72749	0.75392
75	0.78673	0.78888	0.78846	0.77795	0.78923
100	0.82525	0.82469	0.82639	0.80962	0.82696
π=0.4					
10	0.41762	0.42326	0.46428	0.33917	0.47380
20	0.57047	0.57268	0.58335	0.50934	0.61244
30	0.64068	0.64591	0.64778	0.59317	0.67418
40	0.69918	0.69571	0.70395	0.64546	0.70626
50	0.72044	0.72950	0.72382	0.68439	0.72552
75	0.77848	0.77881	0.79022	0.75428	0.79127
100	0.80789	0.80759	0.80911	0.79163	0.80983
π=0.5					
10	0.39431	0.41190	0.42340	0.32021	0.43477
20	0.57915	0.55973	0.59278	0.45380	0.59887
30	0.64779	0.63109	0.65524	0.54271	0.65886
40	0.67639	0.69250	0.71204	0.60994	0.71458
50	0.71719	0.72332	0.72065	0.65456	0.72250
75	0.76616	0.78039	0.76805	0.72117	0.76914
100	0.80497	0.81060	0.80622	0.76438	0.80700